STOCHASTICA Vol. V nº 1 (1981)

NEGACIONES EN LA TEORIA DE CONJUNTOS DIFUSOS

F. Esteva

ABSTRACT

All the negations of $P_L(X)$ satisfying the extension principle and the generalized extension principle are fully described through the negation of L. Necessary and suficient conditions are given for n to be an ortho or u-complementation and for n to satisfy the DeMorgan laws.

INTRODUCCION

Dado un retículo $(L,\wedge,\vee)$ con supremo 1 e ínfimo 0 y un universo X, se define $P_L(X)$ como el conjunto de los subconjuntos difusos de X a valores en L, es decir, como el conjunto de aplicaciones $A:X \to L$. Sabemos que este conjunto con el orden puntual tiene estructura de retículo $(P_L(X),\wedge,\vee)$, retículo que conserva las propiedades de L: así si L es completo, distributivo o modular, $P_L(X)$ también lo es.

El problema que nos planteamos es el de estudiar cual es la "complementación" que podemos definir en $P_L(X)$. En el caso particular de que L sea [0,1], Trillas en [5], Esteva y Domingo en [6] y finalmente Esteva, Trillas y Domingo en [9] han estudiado las posibles funciones negación n sobre [0,1], funciones n a partir de las cuales se puede definir el "complemento" de $A \in P_{\sim}(X)$ de la forma $\bar{A}=n\circ A$.

En el presente trabajo se hallan las posibles "complementaciones" de $P_L(X)$ a partir del estudio de las posibles negaciones que pueden definirse en $P_L(X)$, entendiendo estas como aplicaciones antítonas, de cuadrado menor o igual que la identidad y que aplican el máximo en el mínimo. Se parte de los resultados de Esteva en [2] sobre negaciones en retículos y de los de Ovchinnikov en [8] en los que se inicia el estudio de cierto tipo de negaciones fuertes o involuciones de $P_L(X)$.

Nosotros nos interesamos por aquellas negaciones n tales que $(P(X),\wedge,\vee,n|_{P(X)})$ sea una subálgebra de $P_L(X)$ bien como álgebra de Boole -caso de las negaciones que cumplen el principio de extensión- bien como álgebra de DeMorgan -caso de las negaciones que cumplen el principio de extensión generalizado.

Negaciones en $P_L(X)$.

Dado un retículo $(L,\wedge,\vee)$ con máximo 1 y mínimo 0 y definido $P_L(X)$ como el conjunto de los subconjuntos difusos de un universo X a valores en L, notaremos por δ_a el subconjunto unitario de X de elemento a -es decir la aplicación dada por $\delta_a(x)=0$ si $x\neq a$, $\delta_a(a)=1$ -, por $\bar{\delta}_a$ el complemento de δ_a en el álgebra de Boole $P(X)$, por $\underset{\sim}{\alpha}$ el difuso de valor cte. α, por X el difuso $\underset{\sim}{1}$ y por $\emptyset$ el $\underset{\sim}{0}$.

<u>Definición 1.</u> Llamaremos <u>negación</u> n de un retículo $(R,\wedge,\vee)$ a toda aplicación $n:R\to R$ tal que:

(i) $a\leqslant b$ implica $n(a)\geqslant n(b)$,

(ii) $n^2(a)\geqslant a$ para todo $a\in R$,

(iii) $n(1)=0$.

Si $n^2=I$ diremos que la negación es <u>fuerte</u> o es una involución; en los demás casos hablaremos de negaciones <u>débiles.</u>

De [2] y [4] sacamos los siguientes resultados que luego aplicaremos:

Proposición 1. Si n es una negación en un retículo $(R,\wedge,\vee)$, se cumple:

a) Si existe $\bigvee_{i\in I} a_i$, existe $\bigwedge_{i\in I} n(a_i)$ y es $n(\bigvee_{i\in I} a_i)= \bigwedge_{i\in I} (n(a_i))$,

b) Si existen $\bigwedge_{i\in I} a_i$ y $\bigvee_{i\in I} n(a_i)$, es $n(\bigwedge_{i\in I} a_i) \geqslant \bigvee_{i\in I} n(a_i)$,

c) $n(R)$ es $\wedge$-semirretículo de R, contiene al máximo u y al mínimo 0 y es retículo con el ínfimo restricción del de R y el supremos $\bar{\vee}$ definido por $a \mathbin{\bar{\vee}} b = \wedge \{t\in n(R) \mid t \geqslant a, t \geqslant b\} = n(a\wedge b)$. En general $(n(R),\wedge,\bar{\vee})$ no es subretículo de R.

d) n restringida a $n(R)$ es una negación fuerte y se cumple:

- Toda negación n define una negación fuerte asociada $\bar{n}=n|_{n(R)}$.
- Toda negación fuerte $\bar{n}$ sobre un $\wedge$-semirretículo $R'\subset R$ que cumpla la condición del mínimo y contenga al mínimo, 0, define una única negación n de R que tiene $\bar{n}$ como negación fuerte asociada. Esta n viene dada por:

$$n(x) = \bar{n}(\wedge\{t\in R' \mid t\geqslant x\}).$$

a) Negaciones de $P_L(X)$ que son extensión de la complementación de $P(X)$.

Definición 2. Diremos que una negación n de $P_L(X)$ cumple el principio de extensión (P.E.) si es extensión de la complementación C del álgebra de Boole $P(X)$. ($n|_{P(X)}= C$).

Ejemplo 1. Sea $\{n_a \mid a\in X\}$ una família de negaciones de L. Definimos $n:P_L(X) \to P_L(X)$ como la aplicación que hace corresponder a cada $A\in P_L(X)$ el subconjunto difuso $n(A)$ dado por: $[n(A)](x)=n\,(A(x))$ para todo $x\in X$.

Veamos que n es una negación de $P_L(X)$ que cumple el P.E.:

a) Es evidente que n cumple (i) y (iii) de la definición 1 y que cumple el P.E.

b) $[n^2(A)](x)= n((n(A))(x))=n_x^2(A(x)) \geqslant A(x)$ para todo $A\in P_L(X)$ y todo $x\in X$. Luego $n^2 \geqslant I$.

<u>Definición 3.</u> Una negación n de $P_L(X)$ diremos que es <u>puntualmente funcionalmente expresable</u> (p.f.e.) a partir de una família $\{n_a | a\in X\}$ de negaciones de L si para todo $A\in P_L(X)$ y todo $x\in X$ es $[n(A)](x)=n_x(A(x))$. Si para todo $x\in X$ es $n_x=n'$, diremos que n es <u>funcionalmente expresable</u> (f.e.) a partir de la negación n' de L y será: $n(A)=n'\circ A$.

<u>Teorema 1.</u> Una negación n de $P_L(X)$ cumple el Principio de extensión si, y sólo si, n es puntualmente funcionalmente expresable.

En efecto:

El ejemplo 1 demuestra que si n es p.f.e., n cumple el P.E.

Por otra parte si n cumple el P.E., entonces n transforma $[\underset{\sim}{0},\delta_a]$ en $[\bar{\delta}_a,1]$, es decir, transforma los elementos de la forma $\delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha}$ en los de la forma $\bar{\delta}_a \vee \underset{\sim}{\beta}$ por lo que para cada $a\in X$ podemos definir una $n_a : L \to L$ dada por:

$$n_a(\alpha)= \beta \text{ si, y sólo si, } n(\delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha})= \bar{\delta}_a \vee \underset{\sim}{\beta}$$

Veamos que n_a es una negación de L para cada $a\in X$:

(i) y (iii) de la definición 1 se cumplen obviamente. Veamos que ocurre con (ii): $(\delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha}) \leqslant n^2(\delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha})=n(\bar{\delta}_a \vee \underset{\sim}{n_a(\alpha)})=\delta_a \wedge n(\underset{\sim}{n_a(\alpha)})$ de donde $n(\underset{\sim}{n_a(\alpha)}) \geqslant \underset{\sim}{\alpha}$ pero $n(\delta_a \wedge \underset{\sim}{n_a(\alpha)}) \geqslant \bar{\delta}_a \vee n(\underset{\sim}{n_a(\alpha)})$, de donde $n_a^2(\alpha)=[n(\underset{\sim}{n_a(\alpha)})](a) \geqslant \underset{\sim}{\alpha}(a)= \alpha$ para todo $\alpha\in L$.

Sólo resta probar que la negación p.f.e. definida por la família $\{n_a | a\in X\}$ es la negación inicial n, lo que es cierto puesto que:

$$[n(A)](x)=[n[\bigvee_{a\in X}(\delta_a \wedge \underset{\sim}{A(a)})]](x)=[\bigwedge_{a\in X} \bar{\delta}_a \vee \underset{\sim}{n_a(A(a))}](x)=n_x(A(x)).$$

<u>Corolario 1.</u> Una negación fuerte n de $P_L(X)$ cumple el Principio de Extensión si, y sólo si, es puntualmente funcionalmente expresable a partir de una família $\{n_a | a\in X\}$ de involuciones de L.

Sólo hay que observar que n es involución si, y sólo si, todas las n_a lo son.

Nota. Si L es totalmente ordenado y finito (cardinal de L=k) entonces se cumple:

a) De negaciones fuertes de $P_L(X)$ que cumplan el P.E. solo existe una, la funcionalmente expresable a partir de la única involución $\bar{n}$ de L. De ahí que de Algebras de DeMorgan $(P_L(X),\wedge,\vee,n)$ que sean extensión del Algebra de Boole $(P(X),\wedge,\vee,C)$ sólo existe una.

b) De negaciones débiles que cumplan el P.E. existen tantas como funciones $f:X \to N$ siendo N el conjunto de las 2^{k-2} negaciones débiles que podemos definir en L (ver [6]). Si X es finito (cardinal X=n) de negaciones que cumplan el P.E. hay $VR^n_{2^{k-2}} = 2^{n(k-2)}$.

En general, es claro que aunque n cumpla el P.E., no es ni ortocomplementación - $n(A)\wedge A=\emptyset$ para todo $A\in P_L(X)$ - ni u-complementación - $n(A)\vee A=X$ para todo $A\in P_L(X)$ - ni complementación. En este sentido son válidos los resultados siguientes:

Proposición 2. Una negación n de $P_L(X)$ que cumple el P.E. es ortocomplementación (u-complementación) si, y sólo si, todos los n_a son ortocomplementaciones (u-complementaciones) de L.

En efecto:

Si n cumple el P.E., n es p.f.e. a partir de una família $\{n_a | a\in X\}$ de donde $(n(A)\wedge A)(x) = n_x(A(x))\wedge A(x)$ y $(n(A)\vee A)(x)=n_x(A(x))\vee A(x)$.

De ahí el resultado es inmediato.

Proposición 3. Toda complementación de $P_L(X)$ cumple el P.E.

En efecto:

Si n es complementación, $n(\delta_a)= \bar{\delta}_a$ lo que implica $n|_{P(X)} = C$.

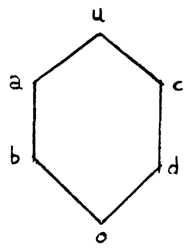
Corolario 3.1. Si L es distributivo, existe una complementación n de $P_L(X)$ si, y sólo si, L es álgebra de Boole. Esta complementación, caso de que exista, es única.

En efecto:

Si L es distributivo, $P_L(X)$ también, por lo que si existe una complementación esta será única y $(P_L(X),\wedge,\vee n)$ será álgebra de Boole. Por la proposición 3 si una tal complementación n existe cumplirá el P.E. por lo que n será p.f.e. a partir de una família $\{n_a | a\in X\}$ de complementaciones de L. Pero al ser L distributivo si existe una complementación $\bar{n}$ ésta será única y $(L,\wedge,\vee,\bar{n})$ álgebra de Boole.

Si L no es distributivo el resultado no es cierto como puede verse en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2. Sea L ={o,u,a,b,c,d} el retículo del grafo adjunto.



En L se pueden definir n complementaciones:

$n_1: L \to L$	$n_2: L \to L$	$n_3: L \to L$	$n_4: L \to L$
$a \to d$	$a \to c$	$a \to c$	$a \to d$
$b \to c$	$b \to c$	$b \to c$	$b \to c$
$c \to b$	$d \to a$	$d \to a$	$d \to a$
$d \to a$	$c \to b$	$c \to a$	$c \to a$

En este caso, en $P_L(X)$ se pueden definir tantas complementaciones como funciones $f:X \to \{n_i | i=1,2,3,4\}$.

En el caso particular de que L sea $[0,1]$, entonces debemos recordar que la única ortocomplementación de L es la $\bar{n}_o:[0,1] \to [0,1]$ definida por $\bar{n}_o(x)=0$ para todo $x\neq 0$, $\bar{n}_o(o)=1$. De ahí que de ortocomplementaciones de $P_L(X)$ que cumplan el P.E. sólo existe una, la n_o funcionalmente expresable a partir de la $\bar{n}_o$.

b) <u>Negaciones de $P_L(X)$ que son extensión de involuciones de P(X).</u>

<u>Definición 4.</u> Diremos que una negación n de $P_L(X)$ cumple el <u>principio generalizado de extensión</u> (P.G.E.) si es extensión de una involución de P(X) ($n|_{P(X)}$ es fuerte).

<u>Definición 5.</u> Dada una permutación s de X, llamaremos <u>automorfismo generado por s</u> al automorfismo H_s de $P_L(X)$ definido por $H_s(A)=A\circ s$ para todo $A\in P_L(X)$.

Es inmediato que todo automorfismo H_s conserva las uniones e intersecciones infinitas, caso de que existan.

<u>Lema 1.</u> Toda involución de P(X) es del tipo $C\circ H_s = H_s\circ C$ siendo s una permutación de X tal que $s^2 = I$.

<u>Ejemplo 3.</u> Sea s una permutación de X tal que $s^2=I$ y sea $N=\{n_a \mid a\in X\}$ una família de negaciones de L tales que para todo $a\in X$, $n_a=n_{s(a)}$. Sea n' la negación p.f.e. definida a partir de la família N. Entonces $n=n'\circ H_s$ es una negación de $P_L(X)$ que cumple el P.G.E.

En efecto:

a) n cumple obviamente los apartados (i) y (iii) de la definición 1 y el P.G.E.

b) $n^2 \geqslant I$ ya que:

$$(n' \circ H_s)^2(\delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha}) = (n' \circ H_s)(\bar{\delta}_{s(a)} \vee n_{s(a)}(\alpha)) = \delta_a \wedge n_a(n_{s(a)}(\alpha)) = \delta_a \wedge n_a^2(\alpha) \geqslant \delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha}.$$

Luego para todo $A\in P_L(X)$ es:

$$(n'\circ H_s)^2(A) = (n'\circ H_s)^2\Big(\bigvee_{x\in X}(\delta_x \wedge \underset{\sim}{A(x)})\Big) \geqslant \bigvee_{x\in X}\big[(n'\circ H_s)^2(\delta_x \wedge \underset{\sim}{A(x)})\big] \geqslant \bigvee_{x\in X}(\delta_x \wedge \underset{\sim}{A(x)}) = A.$$

<u>Proposición 4.</u> Sea n una negación p.f.e. definida a partir de la família de negaciones de L, $\{n_a \mid a\in X\}$ y sea s una permutación de X. $n\circ H_s$ es negación de $P_L(X)$ sí, y sólo si, $s^2=I$ y $n_x=n_{s(x)}$ para todo $x\in X$.

En efecto:

- Si $s^2=I$ y $n_x=n_{s(x)}$ para todo $x\in X$, el ejemplo 3 nos dice que $n\circ H_s$ es una negación de $P_L(X)$ que cumple el P.G.E.

- Dada una negación p.f.e. n y una permutación s siempre es cierto que $n\circ H_s$ cumple las propiedades (i) y (iii) de la definición 1.

También es cierto que $n|_{P(X)}$ y $H_s|_{P(X)}$ son biyecciones de P(X) en sí mismo por lo que si $n\circ H_s$ es negación de $P_L(X)$, $n\circ H_s|_{P(X)}$ debe ser una involución de P(X) de donde debe ser $\delta_a=(n\circ H_s)^2(\delta_a)=\delta_{s^2(a)}$ lo que implica $s^2=I$.

Por otra parte si $n\circ H_s$ es negación de $P_L(X)$, para todo $\alpha\in L$ debe ser:

$$(n\circ H_s)^2(\delta_a\wedge\underset{\sim}{\alpha})=\delta_a\wedge n_a(n_{s(a)}(\alpha))\geqslant\delta_a\wedge\underset{\sim}{\alpha} \text{ de donde } n_a(n_{s(a)}(\alpha))\geqslant\alpha$$

$$(n\circ H_s)^2(\delta_{s(a)}\wedge\underset{\sim}{\alpha})=\delta_{s(a)}\wedge n_{s(a)}(n_a(\alpha))\geqslant\ \delta_{s(a)}\wedge\underset{\sim}{\alpha} \text{ de donde } n_{s(a)}(n_a(\alpha))\geqslant\alpha$$

Además si $\delta_a\wedge\underset{\sim}{\alpha}\in(n\circ H_s)(P_L(X))$ -lo que equivale a que $\alpha\in n_a(L)$ - debe ser $n_a(n_{s(a)}(\alpha))=\alpha$ (1). Análogamente si $\alpha\in n_{s(a)}(L)$ debe ser $n_{s(a)}(n_a(\alpha))=\alpha$ (2).

Veamos que $n_a(L)\subset n_{s(a)}(L)$:

Si $\alpha\in n_a(L)$ lo que equivale a $n_a(n_{s(a)}(\alpha))=\alpha$, entonces $\alpha\in n_{s(a)}(L)$ lo que equivale a $n_{s(a)}(n_a(\alpha))=\alpha$ ya que si $n_{s(a)}(n_a(\alpha))>\alpha$ sería $n_a(n_{s(a)}(n_a(\alpha)))=n_a(\Lambda\{\beta\in n_a(L)\ \ \beta\geqslant n_{s(a)}(n_a(\alpha))\})>n_a(\alpha)$ en contradicción con (1) ya que $n_a(\alpha)\in n_a(L)$.

Luego $n_a(L)\subset n_{s(a)}(L)$ y un razonamiento análogo permite demostrar el recíproco de donde $n_a(L)=n_{s(a)}(L)=L'$ para todo $a\in X$. Además (1) y (2) nos dice que para todo $\alpha\in L'$ es $n_{s(a)}(n_a(\alpha))=n_a(n_{s(a)}(\alpha))$, de donde $n_a|_{L'}=n_{s(a)}|_{L'}$. De ahí, por el resultado d) de la proposición 1, resulta ser $n_a=n_{s(a)}$ para todo $a\in X$.

<u>Proposición 5.</u> Sea n una negación de $P_L(X)$ que cumple el principio generalizado de extensión; entonces existe una permutación s de X y una negación n' puntualmente funcionalmente expresable tales que $n=n'\circ H_s$.

En efecto:

$n|_{P(X)}$ es una involución de P(X) lo que implica $n|_{P(X)}=C\circ H_s$ con $s^2=I$.

Veamos que $n\circ H_s$ es una negación de $P_L(X)$ que cumple el P.E.:

- $n\circ H_s$ cumple (i) y (iii) de la definición 1 y el P.E.

$$-\ (n\circ H_s)^2(\delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha}) = (n\circ H_s)(n(\delta_{s(a)} \wedge \underset{\sim}{\alpha})) \geqslant (n\circ H_s)(\bar{\delta}_a \vee n(\underset{\sim}{\alpha}))$$

$$\geqslant n(\bar{\delta}_{s(a)} \vee n(\underset{\sim}{\alpha})) = \delta_a \wedge n^2(\underset{\sim}{\alpha}) \geqslant \delta_a \wedge \underset{\sim}{\alpha}.$$

De donde: $(n\circ H_s)^2(A) = (n\circ H_s)^2[\bigvee_{x\in X} (\delta_x \wedge \underset{\sim}{A(x)})] \geqslant \bigvee_{x\in X} (\delta_x \wedge \underset{\sim}{A(x)}) = A.$

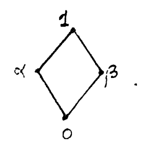
Por tanto $n\circ H_s$ es una negación p.f.e. n' definida a partir de la família $\{n_a | a\in X\}$. De ahí $n\circ H_s = n'$ lo que equivale a $n = n'\circ H_s$.

Es claro que n_a viene dado por $n_a(\alpha) = (n(\underset{\sim}{\alpha}))(a)$ de donde está unívocamente determinada por n por lo que podemos hablar de família $\{n_a | a\in X\}$ asociada a toda negación n que cumpla el P.G.E.

De ahí el siguiente teorema:

Teorema 2. Una negación cumple el principio generalizado de extensión si, y sólo si, $n = n'\circ H_s$ donde n' es una negación puntualmente funcionalmente expresable a partir de la família $\{n_a | a\in X\}$, s es una permutación tal que $s^2 = I$ y para todo $a\in L$ es $n_a = n_{s(a)}$.

Ejemplo 3. Sea $L = \{o, \alpha, \beta, 1\}$ el álgebra de Boole dada por el grafo adjunto y sea $X = \{a, b\}$.



De negaciones en L se pueden definir cinco (dos involuciones y 3 que no lo son), correspondientes n_1 a la involución que deja fijos α y β, n_2 a la que los intercanvia y n_3, n_4, n_5 a las negaciones débiles determinadas por $n_3(P_L(X)) = \{o, \alpha, 1\}$, $n_4(P_n(L)) = \{o, \beta, 1\}$ y $n_5\ (P_L(X)) = \{0, 1\}$.

Luego de negaciones de $P_L(X)$ que cumplan el P.E. hay tantas como funciones $f: \{a, b\} \to \{n_i | i = 1, 2, 3, 4, 5\}$, es decir que hay 5^2 negaciones (4 involuciones y 21 que no lo son) y de negaciones de $P_L(X)$ que cumplan el P.G.E. hay exactamente 5 que se corresponden con la composición de las negaciones n' generadas por las famílias $\{n_a, n_b | n_a = n_b\}$, la H_s definida por la única permutación s de X, $s \neq I$. Es evidente que de estas habrá sólo 2 involuciones.

Es evidente que en $P_L(X)$ se pueden definir negaciones distintas de las descritas, incluso involuciones distintas de las descritas lo que nos dice que en general las negaciones que cumplen el P.E. y el P.G.E. no son todas las negaciones posibles.

Veamos, por último, que ocurre con el cumplimiento de las leyes de DeMorgan. En general una negación n de $P_L(X)$, si no es involución, no tiene porque cumplirlas pero es cierto el resultado siguiente:

Proposición 6. Una negación n de $P_L(X)$ que cumpla el P.G.E. cumple las leyes de DeMorgan si, y sólo si, las satisface cada una de las n_a de la família que define la negación p.f.e. n' asociada a n.

En efecto:

- Si algún n_a no cumple las leyes de DeMorgan, existen $\alpha,\beta \in L$ tales que $n_a(\alpha\wedge\beta) > n_a(\alpha) \vee n_a(\beta)$ de donde:

$$(n'\circ H_s)[(\delta_{s(a)}\wedge\underset{\sim}{\alpha})\wedge(\delta_{s(a)}\wedge\underset{\sim}{\beta})] = (n'\circ H_s)(\delta_{s(a)}\wedge(\underset{\sim}{\alpha\wedge\beta})) = \bar{\delta}_a\wedge\underset{\sim}{n_a(\alpha\wedge\beta)} >$$

$$> \bar{\delta}_a\wedge(\underset{\sim}{n_a(\alpha)}\vee\underset{\sim}{n_a(\beta)}) = (\bar{\delta}_a\wedge\underset{\sim}{n_a(\alpha)})\vee(\bar{\delta}_a\wedge\underset{\sim}{n_a(\beta)}) =$$

$$= (n'\circ H_s)(\delta_{s(a)}\wedge\underset{\sim}{\alpha})\vee(n'\circ H_s)(\delta_{s(a)}\wedge\underset{\sim}{\beta}).$$

Luego $n = n'\circ H_s$ tampoco cumple las leyes de DeMorgan.

Por otra parte si para todo $a \in X$, n_a cumple las leyes de DeMorgan, entonces para todo $A,B \in P_L(X)$ es:

$$(n'\circ H_s)(A\wedge B) = (n'\circ H_s)\Big(\bigvee_{a\in X}(\delta_a\wedge\underset{\sim}{(A\wedge B)(a)})\Big) = \bigwedge_{a\in X}(\bar{\delta}_{s(a)}\vee\underset{\sim}{n_{s(a)}((A\wedge B)(a))})$$

$$= \bigwedge_{a\in X}[\bar{\delta}_{s(a)}\vee(\underset{\sim}{n_{s(a)}(A(a))}\vee\underset{\sim}{n_{s(a)}(B(a))})]$$

$$= [\bigwedge_{a\in X}(\bar{\delta}_{s(a)}\vee\underset{\sim}{n_{s(a)}(A(a))})]\vee[\bigwedge_{a\in X}(\bar{\delta}_{s(a)}\vee\underset{\sim}{n_{s(a)}(B(a))})] =$$

$$= (n\circ H_s)(A)\vee(n'\circ H_s)(B).$$

Corolario 5.1. Si n es una negación de $P_L(X)$ que cumple el P.G.E., $n(P_L(X))$ es subretículo de $P_L(X)$ si, y sólo si, para cada $a \in X$, $n_a(L)$ es subretículo de L.

Basta recordar que para cualquier retículo R y cualquier negación n de R, n(R) es subretículo de R si, y sólo si, se cumple las leyes de DeMorgan.

Corolario 5.2. Si L es una cadena, toda negación de $P_L(X)$ que cumpla el P.G.E., cumple las leyes de DeMorgan.

Así en el caso particular en el que $L=[0,1]$, entonces toda negación de $P_L(X)=P_{\sim}(X)$ que cumpla el P.G.E. cumple las leyes de DeMorgan finitas. Luego $(n(P_{\sim}(X)),\wedge,\vee,\bar{n})$ será un álgebra de DeMorgan subálgebra del álgebra intuicionista (caso en que n es débil) o de DeMorgan (caso de ser n fuerte) $(P_{\sim}(X),\wedge,\vee,n)$.

En general debe tenerse en cuenta que a pesar de que $(P_{\sim}(X),\wedge,\vee,n)$ es un retículo completo, si n no es fuerte, $(n(P_{\sim}(X),\wedge,\vee,\bar{n})$ no es subretículo completo de $(P_{\sim}(X),\wedge,\vee,n)$ como puede verse en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 4. Sea $X=\{a\}$ y $L=[0,1]$ y sea n la negación definida por $n([0,1]=[0,1/2)]\cup\{1\}$ siendo la negación fuerte asociada $\bar{n}$ la dada por $\bar{n}\,(x)=1/2-x$ si $x\in(0,1/2)$, $\bar{n}\,(0)=1$. Es evidente que n cumple el P.E. y las leyes de DeMorgan finitas y no obstante $(n(P_{\sim}(X)),\wedge,\vee)$ no es subretículo completo de $(P_{\sim}(X),\wedge,\vee)$ ya que el supremo de $(0,1/2)$ en $P_{\sim}(X)$ es 1/2 mientras que en $n(P_{\sim}(X))$ es 1.

Bibliografía.

[1] G. BIRKOFF. "Lattice Theorie", Amer.Math.Soc.Collec. Publ. 25 (1948).

[2] F. ESTEVA. "Negaciones en retículos completos". Stochastica Vol.I (1975) pág. 49-66.

[3] G. SASZ. "Théorie des treillis". Dunod, Ed. Paris 1971.

[4] V. VERDÚ. "Sobre clausuras en conjuntos ordenados". Tesis de licenciatura. Barcelona 1975.

[5] E. TRILLAS. "Sobre negaciones en la teoría de conjuntos difusos". Stochastica Vol. III n°. 1 (1979) pág. 47-60.

[6] F. ESTEVA - X. DOMINGO. "Sobre funciones de negación en [0,1]". Stochastica Vol. IV n°. 2 (1980) pág. 141-166.

[7] S. OVCHINNIKOV. "General negations in fuzzy set theory". To appear in J. Math. Anal. and Aplications.

[8] S. OVCHINNIKOV. "Involutions in fuzzy set theory". Stochastica. Vol IV, n°. 3 (1980) pág. 227-231.

[9] F. ESTEVA - E. TRILLAS - X. DOMINGO. "Weak and strong negation functions for fuzzy set theory". To appear in the Proceedings of the I.S.M.V.L'81 Oklahoma.

Departament de Matemàtiques i Estadística.
Escola Tècnica Superior d'Arquitectura.
Universitat Politècnica de Barcelona.
Diagonal 649.
Barcelona-28.