STOCHASTICA Vol. V nº 1 (1981)

GEOMETRIA DE GRAMIANOS EN EL ESPACIO DE HILBERT

Pedro J. Burillo López
Joaquín Aguilella Almer

ABSTRACT

The purpose of the Part I of this paper is to develop the geometry of Gram's determinants in Hilbert space. In Parts II and III a generalization is given of the Pythagorean theorem and triangular inequality for finites vectors families.

Introducción.

W, N. Everitt, en [1], demuestra dos resultados relativos a desigualdades para determinantes de Gram de funciones de cuadrado integrable. Posteriormente C. F. Mopper en [2] generaliza ambos resultados al marco de los espacios de Hilbert $\mathcal{H}$ y considerando proyecciones ortogonales. Los resultados de Everitt se reencuentran en [2] debido a la posibilidad, para dos conjuntos medibles $E_1 \subset E_2$ de considerar una proyección ortogonal entre los espacios $L^2(E_2)$ y $L^2(E_1)$.

No obstante, el primero de los resultados de ambos autores se encuentra con anterioridad en la obra de Courant-Hilbert [3] y expresa la desigualdad

$$G(Px_1,\dots,Px_n) \leqslant G(x_1,\dots,x_n) \qquad (1)$$

en donde $G(x_1,\ldots,x_n)=\det\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}} (x_i|x_j)$ es el determinante de Gram de los vectores $x_1,\ldots,x_n$ de $\mathcal{H}$, $(.|.)$ designa el producto en $\mathcal{H}$ y P es un operador proyección ortogonal en $\mathcal{H}$.

Más tarde K. Vala [4] generaliza de nuevo los resultados de los anteriores autores aún en el espacio de Hilbert pero considerando un operador lineal acotado cualquiera A, de modo que para una família de vectores $x_1,\ldots,x_n$ linealmente independientes se tiene

$$G(Ax_1,\ldots,Ax_n)\leq \|A\|^2\ G(A_1,\ldots,Ax_{n-1})\frac{G(x_1,\ldots,x_n)}{G(x_1,\ldots,x_{n-1})} \tag{2}$$

En el caso de ser A un operador proyección ortogonal en $\mathcal{H}$, (2) es la desigualdad de Everitt-Moppert, obteniéndose también de modo natural (1).

En la primera parte de este trabajo se estudian propiedades de Gramianos de proyecciones ortogonales de vectores. La parte segunda generaliza la desigualdad (1) para el caso de descomposiciones ortogonales de $\mathcal{H}$ y la parte tercera se dedica al estudio de propiedades análogas para hipervolúmenes de vectores.

I. Gramianos de Proyecciones Ortogonales.

Consideraremos en todo lo que sigue un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ no necesariamente separable. Para un subespacio cerrado M de $\mathcal{H}$, con P designaremos el operador proyección ortogonal asociado, con rango (P)=M. Con E_α indicaremos un subespacio de $\mathcal{H}$ de dimensión finita α.

Por su constante utilización en lo que sigue, destacamos (v.[5]) el

Lema 1. Sean $x_1,\ldots,x_n$ vectores independientes de $\mathcal{H}$ y $E_n=\mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_n\}$. Si A es un operador lineal y acotado definido en $\mathcal{H}$, el cociente

$$\frac{G(Ax_1,\ldots,Ax_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)}$$

es constante para cualquier família de n vectores independientes de E_n. Designaremos a dicha constante por $G_A(E_n)$ y se tendrá en particular

$$G_A(E_n)=G(Ae_1,\dots,Ae_n)$$

para cualquier base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E_n.

Consideremos ahora un subespacio cerrado M en $\mathcal{H}$ y sea P su proyección asociada. Si $x_1,\dots,x_n$ son vectores independientes es evidente que de (2) se puede escribir

$$\frac{G(Px_1,\dots,Px_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}\leqslant \min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\|Px_i\|^2}{\|x_i\|^2} \tag{3}$$

Pero como cualquier vector $x\in E_n=\mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\}$ puede completarse a una base de E_n, el Lema 1 autoriza a poner

$$\frac{G(Px_1,\dots,Px_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}\leqslant \frac{\|Px\|^2}{\|x\|^2} \qquad \forall x\in E_n \ ;$$

ahora bien, $\dfrac{\|Px\|}{\|x\|}=\cos\alpha(x,M)$ siendo $\alpha(x,M)$ el ángulo entre 0 y $\pi/2$ formado por x y M; escribiendo

$$\beta=\sup_{\substack{x\in E_n\\ \|x\|=1}}\alpha(x,M)$$

se tendrá evidentemente $G_P(E_n)=\dfrac{G(Px_1,\dots,Px_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}\leqslant\cos^2\beta.$ (4)

Es interesante caracterizar el caso de igualdad en (4): la continuidad de la función $\alpha(x,M)$ en la esfera unidad de E_n asegura por compacidad la existencia de un vector $e_\beta\in E_n$ para el que

$$\|e_\beta\|=1$$
$$\alpha(e_\beta,M)=\beta.$$

Si con $e_\beta^\perp$ representamos el complemento ortogonal de e_β en E_n se tiene

<u>Teorema 1.</u> La igualdad se verifica en (4) si y solo si

$$e_\beta^\perp \subset M.$$

Demostración. Supondremos dim $M \geqslant n$, pues en caso contrario es $G_P(E_n)=0$. Si $e_\beta^\perp \subset M$ y $\{e_2,\ldots,e_n\}$ es base ortonormal de $e_\beta^\perp$, como para $i=2,\ldots,n$ es $(Pe_\beta|Pe_i)=(Pe_\beta|e_i)=(e_\beta|e_i)=0$ se tiene, siendo $E_n=\mathrm{lin}\{e_\beta,e_2,\ldots,e_n\}$

$$G_P(E_n)=G(Pe_\beta,Pe_2,\ldots,Pe_n)=G(Pe_2,\ldots,Pe_n)\|Pe_\beta\|^2=\cos^2\beta. \quad (*)$$

Recíprocamente, supuesta la verificación de la igualdad en (4), como para $i=2,\ldots,n$ es

$$G(Pe_\beta,Pe_2,\ldots,Pe_n)=G(Pe_\beta,Pe_2,\ldots,Pe_{i-1},Pe_{i+1},\ldots,Pe_n).\ \|(Pe_i)'\|^2$$

con

$$Pe_i=(Pe_i)'+(Pe_i)''\in P(E_{n-1})^\perp \oplus P(E_{n-1})$$

en donde $E_{n-1}=\mathrm{lin}\{e_\beta,e_2,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_n\}$, se puede escribir, ya que

$$\|(Pe_i)'\| \leqslant \|Pe_i\| \leqslant \|e_i\| = 1,$$

$$\cos^2\beta=G(Pe_\beta,Pe_2,\ldots,Pe_n)\leqslant G(Pe_\beta,Pe_2,\ldots,Pe_{i-1},Pe_{i+1},\ldots,Pe_n). \quad (5)$$

Ahora bien la expresión del último miembro de (5) puede mayorarse en virtud de (4) por $\cos^2\beta_1$ en donde $\beta_1=\sup_{x\in E_{n-1}}\alpha(x,M)$. Dado que $E_{n-1}\subset E_n$, es $\beta_1=\beta$ y entonces la expresión (5) es una cadena de igualdades, teniéndose pues

$$\|(Pe_i)'\|=1 \qquad i=2,\ldots,n$$

(*) Es conocido, (v.[6]) que $G(x_1,\ldots,x_n)=G(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n).\|x_i'\|^2$ con

$$x_i=x_i'+x_i''\in \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\}^\perp\oplus \mathrm{lin}\{x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n\}$$

de donde es claro que se deduce $\|Pe_i\|=\|e_i\|=1$, es decir

$$e_i\in M \qquad\qquad i=2,\dots,n$$

Notemos que $\dim(E_n\cap M)=n$ ó $n-1$ según que $e_\beta\in M$ ó $e_\beta\notin M$ respectivamente. Observemos también que las amplitudes angulares extremas entre E_n y M caracterizadas por las condiciones $e_\beta\in M^\perp$ y $e_\beta\in M$ corresponden respectivamente a las igualdades triviales $0=0$ y $1=1$ en (4). Concretamente se obtiene en el siguiente Corolario la desigualdad (1) de Courant-Hilbert:

Corolario 1. En las condiciones del teorema 1,

$$\frac{G(Px_1,\dots,Px_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}\leqslant 1$$

verificándose la igualdad si y solo si $Px_i=x_i$ $i=1,\dots,n$.

Demostración. Evidente.

En el Teorema 1 se pone además de manifiesto que para los espacios E_n y E_{n-1} que allí aparecen es $G_P(E_n)=G_P(E_{n-1})$. Esta situación se formaliza de modo general en el

Teorema 2. Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y E_n un subespacio n-dimensional de $\mathcal{H}$ con $E_n\cap M^\perp=\{0\}$. Si $E_m\subset E_n$ se tiene

$$G_P(E_m)=G_P(E_n) \Leftrightarrow E_m^\perp\cap E_n\subset M,$$

y entonces

$$\dim(E_n\cap M)=n-m+\dim(E_m\cap M). \tag{6}$$

Demostración. Sea $\{e_i\}_1^m$ una base ortonormal de E_m que completamos a una base ortonormal $\{e_i\}_1^n$ de E_n. Para el operador P proyección ortogonal asociado a M se tiene

$$G_P(E_n)=G(Pe_1,\dots,Pe_n)=G(Pe_1,\dots,Pe_m)\|(Pe_{m+1})'\|^2\dots\|(Pe_n)'\|^2$$

con

$$Pe_i=(Pe_i)'+(Pe_i)''\in lin\{Pe_1,\dots,Pe_{i-1}\}^{\perp}\oplus lin\{Pe_1,\dots,Pe_{i-1}\}. \quad (7)$$

$i=m+1,\dots,n$

Ahora bien, la condición $E_n\cap M^{\perp}=0$ garantiza en la hipótesis la independencia lineal de los vectores $Pe_1,\dots,Pe_n$ y por consiguiente la no anulación de $G_P(E_n)$ y $G_P(E_m)$. Así, de (7) se obtiene

$$G_P(E_m)=G_P(E_n) \Leftrightarrow \|(Pe_i)'\|^2=1 \qquad i=m+1,\dots,n .$$

Pero

$$\begin{cases} \|(Pe_i)'\|^2=1 \\ i=m+1,\dots,n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|(Pe_i)'\|=\|Pe_i\|=\|e_i\|=1 \\ 1=m+1,\dots,n \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Pe_i=e_i & (A) \\ Pe_i\in lin\{Pe_1,\dots,Pe_{i-1}\}^{\perp} & (B) \end{cases} \qquad i=m+1,\dots,n.$$

Se verifica además que (A) $\Rightarrow$ (B) pues para $j=1,\dots,i-1$ es $(Pe_i|Pe_j)=(e_i|Pe_j)=(Pe_i|e_j)=(e_i|e_j)=0$, luego en definitiva

$$G_P(E_m)=G_P(E_n) \Leftrightarrow Pe_i=e_i \qquad i=m+1,\dots,n,$$

es decir $E_m^{\perp}\cap E_n\subset M$.

Probemos ahora (6): como $E_m\subset E_n$ es claro que

$$E_n\cap M=(E_m\cap M)\oplus[(E_m\cap M)^{\perp}\cap(E_n\cap M)]$$

luego

$$\dim(E_n\cap M)=\dim(E_m\cap M)+\dim[(E_m\cap M)^{\perp}\cap(E_n\cap M)] . \qquad (8)$$

Demostremos que $(E_m\cap M)^{\perp}\cap(E_n\cap M)=E_m^{\perp}\cap(E_n\cap M)$. En efecto,

$E_m \cap M \subset E_m \Rightarrow E_m^{\perp} \subset (E_m \cap M)^{\perp} \Rightarrow E_m^{\perp} \cap E_n \cap M \subset (E_m^{\perp} \cap M) \cap E_n \cap M$. Recíprocamente, supongamos $x \in (E_m \cap M)^{\perp} \cap E_n \cap M$ y descompongamos

$$x = y + z \in E_m \oplus E_m^{\perp} \ ;$$

como $x \in E_n$, $y \in E_m \subset E_n$, se tiene $z \in E_n$ luego $z \in E_m^{\perp} \cap E_n \subset M$ y por ende $y = x - z \in M$. Será pues $y \in E_m \cap N$ y como $x \in (E_m \cap M)^{\perp}$, se sigue la ortogonalidad de x e y, obteniéndose en consecuencia y=0 y por consiguiente $x = z \in E_m^{\perp}$, luego en definitiva x pertenece a $E_m^{\perp} \cap E_n \cap M$. Así en (8) se puede escribir

$$\dim(E_n \cap M) = \dim(E_m \cap M) + \dim(E_m^{\perp} \cap E_n \cap M) = \dim(E_m \cap M) + \dim(E_m^{\perp} \cap E_n) = \dim(E_m \cap M) + n - m.$$

Notemos que si la condición $E_n \cap M^{\perp} = \{0\}$ del Teorema no es satisfecha, entonces $G_P(E_n) = 0$ y los únicos subespacios E_m de E_n cuya constante asociada es nula son aquellos que cortan a $M^{\perp}$.

<u>Corolario 2.</u> Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ con $\dim M = r \geq 2$ y E_m un subespacio m-dimensional con $G_P(E_m) \neq 0$ $(m<r)$. Si n es entero $m<n \leq r$ existen subespacios E_n verificando

i) $E_m \subset E_n$
ii) $G_P(E_n) = G_P(E_m)$.

Demostración. En primer lugar observemos que la condición dada $G_P(E_m) \neq 0$ es imprescindible, pues en caso contrario cualquier espacio E_n verificando i) poseerá constante $G_P(E_n) = 0$. La misma justificación es válida para exigir que $n \leq r$.

Supuesta la existencia de un espacio E_n verificando las condiciones exigidas, por el Teorema anterior será $E_m^{\perp} \cap E_n \subset M$, luego

$$\dim(E_m^{\perp} \cap E_n \cap M) = n - m,$$

igualdad que indica el único procedimiento constructivo de tales espacios: sea $e_1, \ldots, e_m$ una base ortonormal de E_m y consideremos $P(E_m) = \mathrm{lin}\{Pe_1, \ldots, Pe_m\}$.

La condición $G_P(E_m)\neq 0$ garantiza la independencia lineal de $Pe_1,\dots,Pe_m$ y por consiguiente es $\dim P(E_m)=m$. Se tendrá entonces $\dim[M \ominus P(E_m)] = r-m$ y podremos elegir en $M \ominus P(E_m)$ una família $e_{m+1},\dots,e_n$ de vectores ortonormales. Así, resulta muy sencillo comprobar que el espacio $E_n=\mathrm{lin}\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n\}$ verifica las condiciones i) y ii) del enunciado.

Hasta aquí hemos expuesto la posibilidad de ampliar y reducir el número de dimensiones de subespacios conservando los valores de sus constantes asociadas. Pasaremos ahora a desarrollar el mismo proceso pero asignando a dichas constantes valores prefijados.

Teorema 3. Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, $\dim M=r\geqslant 2$, y E_n un subespacio n-dimensional con $G_P(E_n)\neq 0$ y $n<r$. Sea b un número real $0<b<G_P(E_n)$. Existen subespacios E_m con $n<m<r$ verificando

i) $E_n\subset E_m$

ii) $G_P(E_m)=b$.

Demostración. Bastará probar el Teorema para $m=n+1$ y aplicar luego un simple proceso iterativo. Consideremos una base ortonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E_n. Como $G_P(E_n)\neq 0$ se tiene $\dim P(E_n)=n$ y al ser $r>n$ elegimos un vector $x\in M$ verificando

$$1.-\quad \|x\|^2=\frac{b}{G_P(E_n)}$$

$$2.-\quad x\in P(E_n)^{\perp}.$$

Con estas condiciones es evidente que $x\in E_n^{\perp}$ pues

$$(x|e_i)=(Px|e_i)=(x|Pe_i)=0 \qquad i=1,\dots,n.$$

Sea ahora $z_o\in M^{\perp}$ un vector unitario. Determinemos un vector $y_o\in P(E_n)$ de modo que $x+y_o+z_o$ pertenezca a $E_n^{\perp}$: un tal vector vendrá dado por

$$y_o=\lambda_1 Pe_1+\lambda_2 Pe_2+\dots+\lambda_n Pe_n=P(\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\dots+\lambda_n e_n)$$

y la condición $(x+y_o+z_o|e_i)=0$ $i=1,\dots,n$ se traduce en

$$(y_o|e_i)+(z_o|e_i)=0 \qquad i=1,\dots,n$$

o bien en

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(e_j|Pe_i)= -(z_o|e_i) \qquad i=1,\dots,n$$

que es un sistema de n ecuaciones en las incógnitas $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Como el determinante de sus coesficientes es

$$\det_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} (e_j|Pe_i)= \det_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} (Pe_j|Pe_i)=G_P(E_n)\neq 0$$

dicho sistema proporciona solución y_o. Construiremos ahora el vector

$$e_{n+1}=x+\left(\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\right)^{1/2} y_o+\left(\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\right)^{1/2} z_o$$

para el que es evidente que $e_{n+1}\epsilon E_n^{\perp}$ pues $y_o+z_o\epsilon E_n^{\perp}$, y también

$$\|e_{n+1}\|^2=\|x\|^2+\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\|y_o\|^2+\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\|z_o\|^2=1$$

pues $x\epsilon P(E_n)^{\perp}\cap M\subset M$, $y_o\epsilon P(E_n)\subset M$, $z_o\epsilon M^{\perp}$.

Consideremos por último el espacio $E_{n+1}=\mathrm{lin}\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$ y calculemos $G_P(E_{n+1})$; se tendrá

$$G_P(E_{n+1})=G(Pe_1,\dots,Pe_{n+1})=G(Pe_1,\dots,Pe_n).\|(Pe_{n+1})'\|^2 \tag{9}$$

siendo $(Pe_{n+1})'$ la proyección ortogonal de Pe_{n+1} sobre $P(E_n)^{\perp}$. Pero como

$$Pe_{n+1}=Px+\left(\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\right)^{1/2} Py_o+\left(\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\right)^{1/2} Pz_o=x+\left(\frac{1-\|x\|^2}{1+\|y_o\|^2}\right)^{1/2} y_o\epsilon P(E_n)^{\perp}\oplus P(E_n)$$

es evidente que $(Pe_{n+1})'=x$ y por consiguiente en (9) se tiene

$$G_P(E_{n+1})=G_P(E_n)\|x\|^2=b.$$

El siguiente Teorema viene a resolver la cuestión análoga a la precedente pero en cuanto a reducción de la dimensión del subespacio inicial.

<u>Teorema 4.</u> Sea M un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y E_n un subespacio n-dimensional con dim $M\geqslant n$ y $G_P(E_n)<1$. Son equivalentes las siguientes condiciones

1.- $\forall b\in[G_P(E_n),\ 1]$, $\exists\ E_{n-1}\subset E_n$ con $G_P(E_{n-1})=b$

2.- $\dim(E_n\cap M)n-1$.

Demostración. Consideremos la família $\mathcal{F}_{n-1}$ de sistemas de n-1 vectores ortonormales de E_n. Si $S_n=S\cap E_n$, en donde S designa la esfera unidad en $\mathcal{H}$, el conjunto $\overbrace{S_n x\ldots xS_n}^{n-1}$ es un compacto de $\overbrace{E_n x\ldots xE_n}^{n-1}$ con la topología dada por la métrica producto. Como $\mathcal{F}_{n-1}\subset S_n x\ldots xS_n$ probaremos que $\mathcal{F}_{n-1}$ es compacto viendo que es cerrado y para ello,

si $\left\{\left\{e_i^m\right\}_{i=1}^{n-1}\right\}_m\subset\mathcal{F}_{n-1}$ es tal que $\left\{e_i^m\right\}_{i=1}^{n-1}\xrightarrow[m]{}\left\{a_i\right\}_{i=1}^{n-1}$ se tendrá

$$\sum_1^{n-1}\|e_i^m-a_i\|\ \xrightarrow[m]{}\ 0,$$

luego $e_i^m\xrightarrow[m]{}a_i$ $i=1,\ldots,n-1$ y la continuidad del producto en $\mathcal{H}$ prueba que $\left\{a_i\right\}_{i=1}^{n-1}$ es un sistema de vectores ortonormales y por consiguiente se tiene $\left\{a_i\right\}_{i=1}^{n-1}\in\mathcal{F}_{n-1}$.

Probemos ahora que $\mathcal{F}_{n-1}$ es conexo: sea $\{e_1,\ldots,e_{n-1}\}$ un elemento fijo de $\mathcal{F}_{n-1}$ y designemos por $\mathcal{U}$ el conjunto de operadores unitarios definidos en E_n. La aplicación

$$\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}_{n-1}$$
$$U \rightsquigarrow \psi(U) = \{Ue_1, \ldots, Ue_{n-1}\}$$

es claramente suprayectiva, pues fijados los vectores $Ue_1, \ldots, Ue_{n-1}$ queda fijado de modo único el operador U en E_n: además ψ es contínua pues $\sum_1^{n-1} \| Ue_i - Ve_i \| \leqslant (n-1) \| U-V \|$ y como (v.[7]) $\mathcal{U}$ es un conjunto conexo por arcos en la topología de la convergencia uniforme, $\mathcal{F}_{n-1}$ también lo es, luego conexo.

Definimos ahora la aplicación

$$G : \mathcal{F}_{n-1} \longrightarrow [\, G_P(E_n), \quad 1]$$
$$\{e_1, \ldots, e_{n-1}\} \mapsto G(Pe_1, \ldots, Pe_{n-1})$$

que es evidentemente contínua, pues si $\left\{\left\{e_i^m\right\}_{i=1}^{n-1}\right\}_m$ es una família de $\mathcal{F}_{n-1}$ convergente a $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ se tiene

$$\{e_i^m\}_{i=1}^{n-1} \xrightarrow[m]{} \{e_i\}_{i=1}^{n-1} \Rightarrow e_i^m \xrightarrow[m]{} e_i \quad i=1,\ldots,n-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Pe_i^m \xrightarrow[m]{} Pe_i \quad i=1,\ldots,n-1 \Rightarrow G(Pe_1^m, \ldots, Pe_{n-1}^m) \xrightarrow[m]{} G(Pe, \ldots, Pe_{n-1}).$$

Así pues al ser $\mathcal{F}_{n-1}$ compacto y conexo, su imagen por G es un intervalo cerrado $[\, p,q \,]$ de $[G_P(E_n), 1]$. Es evidente además que

$$p = \inf G_P(E_{n-1}) \wedge E_{n-1} \subset E_n$$

$$q = \sup G_P(E_{n-1}) \wedge E_{n-1} \subset E_n$$

siendo ambos valores accesibles. Entonces $\forall b \in [p,q]$ existe un subespacio $E_{n-1} \subset E_n$ tal que $G_P(E_{n-1}) = b$. Con esto resulta que la aseveración del Teorema 1 se verifica si y solo si $p = G_P(E_n)$ y $q=1$. Ahora bien, $q=1$ exige que $\dim(E_n \cap M) = n-1$ por el Corolario 1. Recíprocamente si $\dim(E_n \cap M) = n-1$ el mismo Corolario asegura que $q=1$ y por el Teorema 2 se sigue que el valor $G_P(E_n)$ es accesible para uno de los subespacios (n-1)-dimensionales de E_n.

Notemos que el caso excluido en el Teorema, correspondiente a la situación dada por $G_P(E_n)=1$ es trivial, pues entonces cualquier subespacio E_{n-1} de E_n verifica $G_P(E_{n-1})=1$ en virtud del Corolario 1.

En la demostración del Teorema no se ha puesto de manifiesto el procedimiento de construir E_{n-1} a partir de E_n y de b con $G_P(E_n)<b<1$ (los casos $b=G_P(E_n)$ y b=1 ya han sido tratados en los Teoremas 2 y Corolario 1 respectivamente). Daremos ahora un proceso para construir E_{n-1} supuesto que $\dim(E_n\cap M)=n-1$: elegimos vectores ortonormales $\psi_1,\ldots,\psi_{n-1}$ en $E_n\cap M$ y completamos con un vector ψ_n a una base ortonormal de E_n. Determinemos un vector $e\in\text{lin}\,\{\psi_{n-1},\psi_n\}$ que verifique las siguientes condiciones

1. $\|e\|=1$
2. $\|(Pe)'\|^2=b$ siendo $Pe=(Pe)'+(Pe)''$ con

$$(Pe)'\in\text{lin}\,\{P\psi_1,\ldots,P\psi_{n-2}\}^{\perp}$$
$$(Pe)''\in\text{lin}\,\{P\psi_1,\ldots,P\psi_{n-2}\}.$$

La primera de ellas se verificará poniendo $e=\cos\alpha\cdot\psi_{n-1}+\text{sen}\,\alpha\cdot\psi_n$ (10)

y respecto a la segunda es

$$Pe=\cos\alpha\cdot P\psi_{n-1}+\text{sen}\,\alpha\cdot P\psi_n = \cos\alpha\cdot\psi_{n-1}+\text{sen}\,\alpha\cdot P\psi_n;$$

como $(\psi_{n-1}|\psi_n)=0$ se tiene $(\psi_{n-1}|P\psi_n)=0$ luego la ortogonalidad de los vectores ψ_{n-1} y $P\psi_n$ asegura que

$$\|Pe\|^2=\cos^2\alpha\cdot\|\psi_{n-1}\|^2+\text{sen}^2\alpha\cdot\|P\psi_n\|^2=\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha\cdot\|P\psi_n\|^2 \quad (11)$$

Además $e\in\text{lin}\{\psi_{n-1},\psi_n\} \Rightarrow (e|\psi_i)=0\ \ i=1,\ldots,n-2 \Rightarrow (Pe|\psi_i)=(e|P\psi_i)=(e|\psi_i)=0$
$i=1,\ldots,n-2$

$\Rightarrow Pe\in\text{lin}\,\{P\psi_1,\ldots,P\psi_{n-2}\}^{\perp} \Rightarrow Pe=(Pe)'$ en la condición 2. Se sigue así de (11) que

$$\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha\cdot\|P\psi_n\|^2 = b$$

es la ecuación cuya resolución nos proporcionará en (10) el vector buscado. La ecuación (12) es resoluble, pues

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-b}{1-\|P\psi_n\|^2}$$

y $\|P\psi_n\|^2<b$, ya que por una parte al ser $\psi_1,\dots,\psi_n$ una base ortonormal de E_n se tiene

$$G_P(E_n)=G(P\psi_1,\dots,P\psi_n)=G(P\psi_1,\dots,P\psi_{n-1})\cdot\|(P\psi_n)'\|^2=\|(P\psi_n)'\|^2$$

pues $P\psi_i=\psi_i$ $1=1,\dots,n-1$; en segundo l-gar como $P\psi_n$ es ortogonal a $P\psi_i$ $i=1,\dots,n-1$ es claro que $P\psi_n=(P\psi_n)'$ luego en definitiva

$$\|P\psi_n\|^2=\|(P\psi_n)'\|^2=G_P(E_n)<b.$$

Queda pues garantizada la existencia de un vector e con las condiciones exigidas, y si formamos el subespacio E_{n-1} envoltura lineal de los vectores $\{\psi_i,\dots,\psi_{n-2}, e\}$ es evidente que

$$G_P(E_{n-1})=G(P\psi_1,\dots,P\psi_{n-2},Pe)=G(P\psi_1,\dots,P\psi_{n-2})\ \|(Pe)'\|^2=b$$

quedando así resuelto el proceso constructivo del espacio E_{n-1}.

Es obvio que tanto el Teorema 4 como el método precedente pueden iterarse convenientemente para rebajar en más de una unidad las dimensiones de los subespacios de E_n que en ellos aparecen.

II. Determinantes de Gram y descomposiciones en $\mathcal{H}$.

Supongamos una descomposición de $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = \sum_1^r M_i \tag{13}$$

en suma directa topológica de subespacios cerrados M_i y designemos con P_i la proyección ortogonal asociada a M_i (los M_i no son necesariamente ortogonales dos a dos). Sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ un sistema de vectores independientes y $E_n=\mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\}$ el subespacio por ellos engendrado. Si $\beta_i=\sup\limits_{x\in E_n}\alpha(x,M_i)$ es evidente que en virtud de (4) se tendrá para una base ortonormal cualquiera $\{e_1,\dots,e_n\}$ de E_n

$$\sum_1^r G_{P_i}(E_n)=\sum_1^r G(P_ie_1,\dots,P_ie_n)\leqslant\sum_1^r \cos^2\beta_i\ , \qquad (14)$$

expresión que proporciona una cota a la suma de constantes $G_{P_i}(E_n)$, cota que depende exclusivamente del espacio E_n. Caracterizamos a continuación la igualdad en (14)

Teorema 5. La igualdad se verifica en (14) si y solo si es cierta una de las proposiciones siguientes

i) $n=1$.

ii) $n=r=2 \wedge E_2=\mathrm{lin}\{e_1,e_2\} \wedge e_1\in M_1 \wedge e_2\in M_2$ y con la notación del Teorema 1, $e^{\perp}_{\beta_1}=e_1 \quad e^{\perp}_{\beta_2}=e_2$.

Demostración. Si en (14) se tiene la igualdad, en virtud de (4) se puede escribir

$$G_{P_i}(E_n)=\cos^2\beta_i \qquad i=1,\dots,r \qquad (15)$$

y de acuerdo con el Teorema 1 se tendrá $\dim(E_n\cap M_i)=\begin{cases}n\\ n-1\end{cases}$ $i=1,\dots,r$. Ahora bien, si existe un índice j tal que $\dim(E_n\cap M_j)=n$, será $E_n\subset M_j$ y por consiguiente $\dim(E_n\cap M_i)=0$ $i\neq j$, luego $n=1$. Si por el contrario $\dim(E_n\cap M_i)=n-1$, $i=1,\dots,r$, el carácter de suma directa de la descomposición (13) permite poner $n=r(n-1)$ de donde resulta $n=\frac{r}{r-1}$, igualdad que tiene sentido solo si $n=r=2$. Además $\dim(E_n\cap M_i)=1$, luego $E_2=\mathrm{lin}\{e_1,e_2\}$ con $e_1\in M_1$ $e_2\in M_2$. Sea entonces $e_{\beta_1}\in E_2$ el vector unitario tal que

$$\alpha(e_{\beta_i},M_1)=\sup_{\substack{x\in E_2\\ \|x\|=1}}\alpha(x,M_1)$$

y sea $e^{\perp}_{\beta_1}$ su complemento ortogonal en E_2. Como por (15) es $G_{P_1}(E_2)=\cos^2\beta_1$, el Teorema 1 asegura que $e^{\perp}_{\beta_1}\in M_1$, luego debe ser $e_{\beta_1}=e_1$. Análogamente se tiene $e^{\perp}_{\beta_2}=e_2$.

Recíprocamente, si n=1 la igualdad en (14) es cierta pues obviamente si $E_1=\text{lin}\{x\}\wedge\|x\|=1$,

$$G_{P_i}(E_1)=\|P_ix\|^2=\cos^2\alpha(x,M_i)=\cos^2\beta_i.$$

Supuesto por último que se cumple la proposición ii), las condiciones $e^{\perp}_{\beta_i}=e_i$ garantizan por el Teorema 1 que $G_{P_i}(E_2)=\cos^2\beta_i$, c.q.d.

Analizaremos ahora el caso en que los subespacios M_i de la descomposición (13) son ortogonales dos a dos.

Teorema 6. Supongamos la descomposición (13) con los subespacios M_i cerrados y ortogonales dos a dos. Sea P_i la proyección ortogonal asociada a M_i y $E_n=\text{lin}\{x_1,\ldots,x_n\}$ con los vectores $\{x_i\}_{i=1}^n$ linealmente independientes.

Entonces

$$\sum_1^r G_{P_i}(E_n)\leqslant 1 \tag{16}$$

verificando la igualdad si y solo si ó $E_n\subset M_j$ para algún índice j, en cuyo caso (16) es una identidad, ó n=1.

Demostración. Como $$G_{P_i}(E_n)=\frac{G(P_ix_1,\ldots,P_ix_n)}{G(x_1,\ldots,x_n)}\leqslant\min_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{\|P_ix_j\|^2}{\|x_j\|^2} \tag{17}$$

si elegimos en los últimos miembros de estas desigualdades un vector fijo x_k se tendrá

$$\sum_1^r G_{P_i}(E_n)\leqslant\sum_1^r\frac{\|P_ix_k\|^2}{\|x_k\|^2}=1$$

que es (16). Notemos que esta expresión equivale a escribir

$$\sum_1^r G(P_i x_1,\dots,P_i x_n) \leqslant G(x_1,\dots,x_n)$$

fórmula que relaciona los gramianos de una família de vectores y de sus proyecciones ortogonales simultáneas sobre cada uno de los subespacios coordenados y que puede interpretarse como una generalización del Teorema de Pitágoras en $\mathcal{H}$. Como caso particular se obtiene de (16) la desigualdad de Courant-Hilbert (1).

Para caracterizar la igualdad en (16) notemos que si para un índice $j(1\leqslant j\leqslant r)$ es $E_n \subset M_j$ se tiene $G_{P_i}(E_n)=\partial_{ij}$ y (16) se convierte en la identidad 1=1. Lo mismo ocurre si n=1. Recíprocamente, si se verifica $\sum_1^r G_{P_i}(E_n)=1$, como $G(x_1,\dots,x_n)>0$, al menos para un índice $h(1\leqslant h\leqslant r)$ es $G_{P_h}(E_n)>0$. Como

$$G_{P_h}(E_n)>0 \Leftrightarrow G(P_h x_1,\dots,P_h x_n)>0 \Leftrightarrow P_h x_1,\dots,P_h x_n$$

son linealmente independientes $\Leftrightarrow E_n \cap \sum_{i\neq h}^r M_i=\{0\}$, consideremos el conjunto

$$\Omega=\{h\in\{1,\dots,r\} \mid E_n\cap \sum_{i\neq h}^r M_i=\{0\}\}$$

y probemos que card Ω=1. En efecto, supuesta la existencia de dos índices $h\neq k$ en Ω, a partir de (2) se tiene

$$\frac{G(P_i x_1,\dots,P_i x_n)}{G(x_1,\dots,x_n)} \leqslant \frac{G(P_i x_1,\dots,P_i x_{n-1})}{G(x_1,\dots,x_{n-1})} \qquad i=1,\dots,r$$

luego

$$1=\sum_1^r \frac{G(P_i x_1,\dots,P_i x_n)}{G(x_1,\dots,x_n)} \leqslant \sum_1^r \frac{G(P_i x_1,\dots,P_i x_{n-1})}{G(x_1,\dots,x_{n-1})} \leqslant 1$$

siendo entonces la cadena anterior de igualdades, pudiendo poner

$$\frac{G(P_i x_1,\dots,P_i x_n)}{G(x_1,\dots,x_n)} = \frac{G(P_i x_1,\dots,P_i x_{n-1})}{G(x_1,\dots,x_{n-1})} \qquad i=h,k. \quad (18)$$

Pero si $x_n = x_n' + x_n'' \in \mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_{n-1}\}^\perp \oplus \mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ y

$$P_i x_n=(P_i x_n)'+(P_i x_n)''\in \mathrm{lin}\{P_i x_1,\dots,P_i x_{n-1}\}^{\perp}\oplus \mathrm{lin}\{P_i x_1,\dots,P_i x_{n-1}\}$$

la igualdad (18) equivale (v.[4]) a que $(P_i x_n)'=x_n'$, $i=h,k$, y como $(P_i x_n)'=P_i x_n - (P_i x_n)''\in M_i$ $i=h,k$ se tiene que

$$x_n'\in M_h\cap M_k=0$$

luego $x_1,\dots,x_n$ es una família de vectores linealmente dependientes, en contra de la hipótesis. Así pues, para el único índice $h\in\Omega$ es

$$G(P_h x_1,\dots,P_h x_n)=G(x_1,\dots,x_n) \tag{19}$$

como se deduce de la verificación de la igualdad en (16). Ahora bien la igualdad (19) viene caracterizada en el Corolario 1 por las condiciones $P_h x_i=x_i$ o equivalentemente por $E_n\subset M_h$ c.q.d.

III. Hipervolúmenes y proyecciones ortogonales en $\mathcal{H}$.

Es conocido (v. [5]) que para una família de vectores linealmente independientes $x_1,\dots,x_n$ de $\mathcal{H}$, la cantidad positiva $\sigma(x_1,\dots,x_n)$ definida por

$$\sigma(x_1,\dots,x_n)=G(x_1,\dots,x_n)^{1/2}$$

mide el hipervolúmen del poliedro determinado por dichos vectores. De acuerdo con el Lema 1, el cociente

$$\frac{\sigma(Ax_1,\dots,Ax_n)}{\sigma(x_1,\dots,x_n)}=G_A(E_n)^{1/2}$$

es independiente de los vectores $x_1,\dots,x_n$ elegidos en el espacio $E_n=\mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\}$ pudiéndose tomar en particular bases ortonormales en E_n para representar las constantes $G_A(E_n)^{1/2}$.

Es evidente que todos los resultados expuestos en el apartado I se verifica trivialmente para hipervolúmenes. Se prueba a continuación un resultado análogo al desarrollo en el Teorema 6 del apartado II.

Teorema 7. Supongamos la descomposición (13) con los subespacios M_i cerrados y ortogonales dos a dos, y sea P_i la proyección ortogonal asociada a M_i. Si $\{x_1,\dots,x_n\}$, con $n>1$, es un sistema de vectores independientes en $\mathcal{H}$ y $E_n=\mathrm{lin}\{x_1,\dots,x_n\}$ se tiene

$$\sum_1^r G_{P_i}(E_n)^{1/2}\leqslant 1. \tag{20}$$

Demostración. Procederemos por inducción sobre r y n. En primer lugar probemos (20) para r=n=2; si e_1,e_2 es una base ortonormal de E_2 bastará probar que

$$\sigma(P_1e_1,P_1e_2)+\sigma(P_2e_1,P_2e_2)\leqslant 1. \tag{21}$$

En efecto,

$$\left.\begin{array}{l}\sigma(P_1e_1,P_1e_2)=\|P_1e_1\|\cdot\|P_1e_2\| \ \mathrm{sen}\alpha(P_1e_1,P_1e_2)\\ \sigma(P_2e_1,P_2e_2)=\|P_2e_1\|\cdot\|P_2e_2\| \ \mathrm{sen}\alpha(P_2e_1,P_2e_2)\end{array}\right. \quad \begin{array}{c}0\leqslant\alpha P_ie_1,P_ie_2)\leqslant\frac{\pi}{2},\\ i=1,2\end{array}$$

en donde se podrá escribir para ciertos valores angulares ω y θ $\|P_1e_1\|=\cos\omega$, $\|P_1e_2\|=\cos\theta$, $\|P_2e_1\|=\mathrm{sen}\,\omega$, $\|P_2e_2\|=\mathrm{sen}\,\theta$ con lo que

$$\sigma(P_1e_1,P_1e_2)+\sigma(P_2e_1,P_2e_2)\leqslant\cos\omega\cos\theta+\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\theta=\cos(\omega-\theta)\leqslant 1$$

que es exactamente (21).

Ahora, fijado n=2, supongamos que (20) se verifica para r=h-1 y probemosla para r=h. Siendo $\mathcal{H}=\sum_1^h M_i$ la correspondiente descomposición para $\mathcal{H}$ tendremos

$$e_j=\sum_1^h P_ie_j \qquad j=1,2$$

que escribiremos en la forma

$$e_j = \sum_1^{h-2} P_i e_j + z_j \qquad j=1,2$$

con

$$z_j = P_{h-1}e_j + P_h e_j \in M_{h-1} \oplus M_h .$$

Por otra parte es evidente que $\mathcal{H} = \sum_1^{h-2} M_i \oplus N$ es una descomposición de con las mismas propiedades de ortogonalidad que la dada siendo $N = M_{h-1} \oplus M_h$, pero con h-1 sumandos. La hipótesis de inducción permite escribir

$$\sum_1^{h-2} \sigma(P_i e_1, P_i e_2) + \sigma(z_1, z_2) \leqslant 1; \tag{22}$$

Ahora bien, la prueba efectuada para r=n=2 autoriza a poner $\sigma(z_1,z_2) \geqslant \sigma(P_{h-1}e_1, P_{h-1}e_2) + \sigma(P_h e_1, P_h e_2)$ de donde se sigue en (22) la conclusión.

Comencemos ahora el proceso de inducción para n: supuesto que (20) se verifica para n=h=1 la probaremos para n=h. Considerando una base $\{e_1,\ldots,e_h\}$ de vectores ortonormales de E_h, tendremos

$$\sigma(P_i e_1,\ldots,P_i e_h) = \sigma(P_i e_1,\ldots,P_i e_{h-1}) . \| (Pe_h)' \| \qquad i=1,\ldots,r$$

con

$$P_i e_h = (P_i e_h)' + (P_i e_h)'' \in \mathrm{lin}\{P_i e_1,\ldots,P_i e_{h-1}\}^{\perp} \oplus \mathrm{lin}\{P_i e_1,\ldots,P_i e_{h-1}\}$$

luego $\sigma(P_i e_1,\ldots,P_i e_h) \leqslant \sigma(P_i e_1,\ldots,P_i e_{h-1})$ y ya podremos poner

$$\sum_1^r \sigma(P_i e_1,\ldots,P_i e_h) \leqslant \sum_1^r \sigma(P_i e_{h-1}) \leqslant 1.$$

Es importante destacar la necesidad de exigir la condición n>1 en el Teorema, pues para n=1 la desigualdad (20) cambia de signo y refleja la desigualdad triangular. Caracterizaremos en último lugar la igualdad en (20):

Teorema 8. En las condiciones del Teorema 7, la igualdad se verifica en (20) si y solo si se verifica en (16).

Demostración. Es evidente que si $\sum_1^r G(P_ie_1,\ldots,P_ie_n)=1$ se tiene

$1 = \sum_1^r G(P_ie_1,\ldots,P_je_n) \leqslant \sum_1^r \sigma(P_ie_1,\ldots,P_ie_n) < 1$ verificándose pues en (20) la igualdad.

Recíprocamente, si $\sum_1^r \sigma(P_ie_1,\ldots,P_ie_n) = 1$, de la cadena

$$1 = \sum_1^r \sigma(P_ie_1,\ldots,P_ie_n) \leqslant \sum_1^r \sigma(P_ie_1,\ldots,P_ie_{n-1}) \leqslant 1$$

se sigue que $\sigma(P_ie_1,\ldots,P_ie_n) = \sigma(P_ie_1,\ldots,P_ie_{n-1})$ y por iteración se obtiene

$$\sigma\,(P_ie_1,\ldots,P_ie_n) = \| P_ie_1 \|$$

con lo que

$$\sum_1^r G(P_ie_1,\ldots,P_ie_n) = \sum_1^r \| P_ie_1 \|^2 = 1\ .$$

Bibliografia

[1] EVERITT, W. N. Inequalities for Gram determinants. Quart. J. Math. Oxford (2) 8 (1957) 191-6.

[2] MOPPERT, C. F. On the Gram determinant. Quart. J. Math. Oxford (2) 10 (1959) 161-4.

[3] COURANT, R., HILBERT, D. Methods of Mathematical Physics. New York 1953.

[4] VALA, K. On the Gram determinant and linear transformations of Hilbert spaces. Annales Acad. Csi. Fennicae. Series A 306 (1961) 3-8.

[5] BURILLO, P. J. Hipervolúmenes, su límite y propiedades de permanencia en los operadores acotados del espacio de Hilbert. Tesis Doctoral. Zaragoza 1974.

[6] GANTMACHER, F. R. Matrix Theory. New York 1960.

[7] HALMOS, P. R. A Hilbert space problem book. New York 1967.

Cátedra de Ampliación de Matemáticas.
E.T.S. de Ingenieros Agrónomos.
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA.