Stochastica, Vol. IV, nº 2 (

SOBRE LAS ISOMETRIAS DE LOS GRUPOS Y ANILLOS RETICULADOS

José Grané Manlleu(*)

INTRODUCCION

El contenido de este trabajo tiene un objetivo fundamental: el estudio, clasificación y caracterización de las isometrías de un grupo reticulado. Se introducen los conceptos de grupo de isometrias M(G) de un grupo reticulado G, grupo de siometrías homogéneas H(G) y traslaciones T(G). Se estudia primero el caso elemental de los grupos totalmente ordenados y utilizando luego las representaciones de los grupos (y f-anillos) en un producto de totalmente ordenados, se introduce el concepto de conjunto admisible de índices asociado a una simetría. Tal concepto permite, con un método que podríamos llamar de "tomar coordenadas", trasladar las propiedades de las isometrias a las de una cierta subálgebra de Boole de la de las partes del conjunto de índices de la representación, obteniéndose la propiedad fundamental de que toda isometría homogénea es involutiva y morfismo aditivo. Sus consecuencias son inmediatas: el semigrupo H(G) es un grupo, los elementos de M(G) son productos de traslaciones por elementos de H(G), M(G) es un grupo y T(G) es normal en él, y el resultado clásico, válido aquí, de que M(G) es producto semidirecto de T(G) y H(G). Una vez reducido el problema del estudio de las isometrías al del estudio de H(G), se enuncian en el párrafo 4 los resultados que permiten calcular los grupos de isometrías homogéneas de productos y sumas directas en función de los correspondientes grupos de los factores. En el caso de que el grupo sea un f-anillo, con unidad, la mayor riqueza de estructura de éste, permite aportar nuevos datos al estudio de $H(G)$: las isometrías homogéneas se corresponden biunívocamente con los idempotentes del anillo, y la estructura de álgebra de Boole de éstos es isomorfa a la que posee el grupo $H(G)$, que aparte de su ley de composición que hace el papel de suma- posee otra operación que le da estructura de anillo de Boole. Este es el contenido del párrafo 5.

Se complementa la teoría desarrollada analizando los ejemplos siguientes: el anillo de funciones contínuas sobre un espacio topológico conexo, que no posee más isometrias que las dos triviales; el anillo de funciones contínuas sobre un espacio topológico localmente conexo, cuyas isometrías homogéneas dependen del cardinal de componentes conexas; el anillo de funciones medibles sobre un espacio medible, que posee tantas isometrías como conjuntos medibles; el grupo $L^p(R)$, que sin ser anillo, tiene tantas isometrías como conjuntos medibles-Lebesgue hay en R; y los anillos de sucesiones reales, de sucesiones convergentes y de sucesiones convergentes a cero, con los cuales queda bien clara la relación entre idempotentes e isometrías, y cómo aquellos son insuficientes para describir éstas si el anillo no posee unidad.

§ 1. Generalidades.

Sean (Ω,φ,d), (Ω',φ,d') dos espacios métricos generalizados valorados en el mismo semigrupo φ, con d, d' separadoras.

<u>Definición 1.</u> Llamaremos isometría de Ω en Ω' a una aplicación $\tau:\Omega \to \Omega'$ tal que

$$d(x,y) = d(\tau(x), \tau(y)), \quad x,y \in \Omega.$$

Toda isometría es necesariamente una aplicación inyectiva pues si $\tau(x) = \tau(y)$, será $d(\tau(x), \tau(y)) = 0 = d(x,y)$, de donde $x = y$.

Un caso especial importante es el siguiente: Sea G un grupo abeliano reticulado y pongamos $\Omega = G$, $\varphi = G^+$ y

$$d_v(x,y) = |v(x) - v(y)|.$$

Siendo $v : G \to G^+$ una valoración inyectiva de G, es decir una aplicación inyectiva que cumple:

$$v(x) + v(y) = v(x \wedge y) + v(x \vee y), \quad x,y \in G.$$

El conjunto G se convierte en un espacio métrico generalizado; si la aplicación v es la identidad obtenemos la llamada "métrica natural" en G que se define, por tanto, mediante

$$d(x,y) = |x-y|.$$

La propiedad triangular es consecuencia de la propiedad $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ válida en todo grupo abeliano reticulado. Se puede comprobar que esta propiedad es necesaria y suficiente para la abelianidad.

Definición 2. Llamaremos $M_v(G)$ al conjunto de todas las isometrias de G con la distancia d_v. Si v es la identidad escribiremos simplemente $M(G)$.

Puesto que la composición de isometrías es una isometría, y la aplicación identidad de G en G también lo es, $M_v(G)$ es un semigrupo con la composición.

Definición 3. Dado a G, llamaremos traslación de G definida por a, a la aplicación

$$t_a : G \to G$$

dada por

$$t_a(x) = x + a.$$

El conjunto de todas las traslaciones de G se designará por $T(G)$.

Lema 1. $T(G)$ es un grupo isomorfo a G y además es un subsemigrupo de $M(G)$.

En efecto, basta observar que $t_a \circ t_b = t_{a+b}$ y que $|t_a(x) - t_a(y)| = |x-y|$, $x,y \in G$.

El grupo T(G) es pues abeliano.

Definición 4. Llamaremos isometría homogénea a una aplicación $\tau:G \to G$ que sea isometría y que verifique la condición $\tau(o) = o$.

El conjunto de todas las isometrías homogéneas se designará por H(G).

Lema 2. Las isometrías homogéneas son aplicaciones que conservan el valor absoluto. Además H(G) es un subsemigrupo de M(G).

En efecto, de $|\tau(x) - \tau(y)| = |x-y|$, para $y = 0$ sale la primera propiedad. La segunda es trivial.

La conservación del valor absoluto no es suficiente para asegurar que una aplicación de G en G sea una isometría homogénea. Por ejemplo la aplicación $\tau:G \to G$ dada por $\tau(x) = |x|$ conserva el valor absoluto y sin embargo, no es una isometría ni siquiera para un grupo totalmente ordenado. Más adelante se verá que las isometrías homogéneas son precisamente las aplicaciones que además de conservar el valor absoluto son morfismos de la estructura aditiva de G.

§ 2. Estudio del semigrupo H(G).

Para estudiar la estructura del semigrupo H(G) se abordará primero el caso totalmente ordenado utilizándose luego la representación de Ribenboim para el caso general.

Es evidente que la identidad I y el cambio de signo -I son isometrías homogéneas de cualquier grupo reticulado.

Proposición 1. Las únicas isometrías homogéneas de un grupo totalmente ordenado son la identidad y el cambio de signo.

En efecto, sea $\sigma:G \to G$ una isometría que verifique $\sigma(o) = o$. Entonces $|\sigma(x)| = |x|$ y por lo tanto o bien $\sigma(x) = x$ ó bien $\sigma(x) = -x$.

Si existieran x_1, $x_2 \in G$ tales que:

$$\sigma(x_1) = x_1 \neq o, \quad \sigma(x_2) = -x_2 \neq o$$

aplicando la condición de isometría sale

$$|x_1 - x_2| = |\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| = |x_1 + x_2|$$

de donde $(x_1 - x_2) = \pm(x_1 + x_2)$.

Si fuese $x_1 - x_2 = x_1 + x_2$, tendríamos $x_2 + x_2 = o$ y como que en un grupo reticulado no hay elementos de torsión será $x_2 = o$; si fuese $x_1 - x_2 = -x_1 - x_2$, saldría análogamente $x_1 = o$. Por tanto σ debe conservar o cambiar los signos en bloque.

Obsérvese que en este caso es $H(G) \cong Z_2$ (grupo de dos elementos) y que todas las isometrías homogéneas son biyectivas y morfismos de la suma del grupo G.

Podría pensarse que esta condición $H(G) \cong Z_2$ es característica de los grupos totalmente ordenados, pero no es así. Veremos más adelante un ejemplo de grupo no totalmente ordenado que la verifica.

En el caso general de un grupo reticulado G arbitrario debemos utilizar una realización concordante $\theta : G \to \prod_{x \in X} G_x$ que sabemos que existe siempre. En adelante, para simplificar las notaciones, identificaremos, si conviene, los elementos de G con sus correspondientes imágenes en $\prod_{x \in X} G_x$. Las propiedades de que goza θ permiten hacerlo.

Sea $\sigma \in H(G)$, y pongamos

$$(g) = (g_x)_{x \in X}, \quad (\sigma(g)) = (g'_x)_{x \in X},$$

se verifica la siguiente igualdad en $\prod_{x \in X} G_x$

$$|(g'_x)_{x \in X}| = |(g_x)_{x \in X}|$$

que, por la conmutatividad de θ con el valor absoluto y el orden del producto:

$$(|g'_x|)_{x\in X} = (|g_x|)_{x\in X},$$

de donde:

$$|g'_x| = |g_x| \quad \forall\, x\in X.$$

Por ser cada grupo G_x totalmente ordenado, deducimos que los elementos g'_x, g_x son iguales salvo quizás el signo. Esto nos lleva a definir los conjuntos

$$J_g = \{x\in X / g'_x \neq g_x\} = \{x\in X / g'_x = -g_x \neq o\}$$

$$J_g^c = \{x\in X / g'_x = g_x\}.$$

Tenemos el siguiente

Lema 3. Si $J_\sigma = \bigcup_{g\in G} J_g \subset X$, entonces se verifica

$$J_f = J_\sigma \cap \text{sop}\ (f), \quad \forall\, f\in G.$$

siendo sop $(f) = \{X/f_x \neq o\}$.

En efecto, por una parte se tiene $J_f \subset J_\sigma$ y $J_f \subset$ sop (f), puesto que si $i\in J_f$ será $f_i = -f_i \neq o$ y por tanto $i\in$ sop (f). Tenemos pues:

$$J_f \subset J_\sigma \cap \text{sop}\ (f).$$

Sea ahora $k\in L_\sigma \cap$ sop (f). Se tendrá, por un lado, que

$$k\in J_\sigma = \bigcup_{g\in G} J_g$$

o lo que es lo mismo, existe un $g\in G$ con $k\in J_g$. Por otro lado $k\in$ sop (f), es decir $f_k \neq o$. Se verificará en cualquier caso, si ponemos $f = (f_x)_{x\in X}$, $\sigma(f) = (f'_x)_{x\in X}$, y con análoga notación para g, que:

$$|(g'_x)_{x\in X} - (f'_x)_{x\in X}| = |(g_x)_{x\in X} - (f_x)_{x\in X}|,$$

por ser σ una isometría.

De la igualdad anterior resulta

$$(|g'_x - f'_x|)_{x\in X} = (|g_x - f_x|)_{x\in X},$$

y por lo tanto, $\forall x\in X$: $|g'_x - f'_x| = |g_x - f_x|$.

Pueden ocurrir dos casos:

1) $g'_x - f'_x = g_x - f_x$

2) $g'_x - f'_x = f_x - g_x$.

Si supusiéramos $f'_k = f_k$, de la posibilidad 1) tendríamos $g'_k = g_k$, absurdo si $k\in J_g$; de la posibilidad 2) y de $k\in J_g$ tenemos $g'_k = -g_k$ de donde $-f'_k = f_k$ lo cual implicaría, junto con $f'_k = f_k$, que $f_k = o$, absurdo si $k\in sop\ (f)$. Deducimos que $f'_k \neq f_k$ y por tanto $k\in J_f$.

El conjunto J_σ así definido depende solamente de la transformación $\sigma\in H(G)$.

<u>Definición 5.</u> Llamaremos <u>conjunto admisible</u> de elementos de X, correspondientes a $\sigma\in H(G)$, al conjunto de índices J_σ antes definido.

<u>Nota.</u> Obsérvese que <u>esta definición depende esencialmente de la realización</u> del grupo que se considere.

<u>Proposición 2.</u> La transformación $\sigma\in H(G)$ opera de la siguiente manera:

$$\sigma\ (f_x)_{x\in X} = (f'_x)_{x\in X},$$

con $f'_x = f_x$ si $x\in J^c_\sigma$, $f'_x = -f_x$ si $x\in J_\sigma$.

En efecto, tomemos $f = (f_x)_{x\in X} \in G$. Tendremos $J_f \subset J_\sigma$ y por lo tanto

$$\sigma(f) = (f'_x)_{x\in X} \quad \text{con} \quad \begin{cases} f'_x = -f_x \neq o & x\in J_f \\ f'_x = f_x & x\notin J_f \end{cases}$$

ya que si $x\in J_\sigma$, puede ser $x\in J_f$ ó $x\notin J_f$, pero en este caso $x\notin sop(f)$. Si esto ocurre $f_x = o$ y $f'_x = o = \pm f_x$. Si $x\notin J_\sigma$ será $x\notin J_f$ y $f'_x = f_x$.

La transformación σ actúa por tanto "cambiando los signos" de las componentes de J_σ, y dejando los mismos signos en el complementario de J_σ.

Por comodidad de notación introducimos la aplicación $\varepsilon_J: X \to \{+1, -1\}$ para $J \subset X$ definida por

$$\varepsilon_J(i) = \begin{cases} +1 & \text{si} \quad i\in J^c \\ -1 & \text{si} \quad i\in J \end{cases}$$

Escribiremos $\varepsilon_{i,J}$ en lugar de $\varepsilon_J(i)$.

Con esta aplicación podemos escribir "simbólicamente":

$$\sigma(f_x)_{x\in X} = \varepsilon_{x,J_\sigma} \cdot f_x \qquad x\in X$$

Como consecuencia de lo anterior, tenemos

Proposición 3. Toda transformación $\sigma\in H(G)$ verifica

$$\sigma^2 = 1$$

Corolario 1. El semigrupo $H(G)$ es un grupo abeliano.

Corolario 2. El grupo $H(G)$ es suma directa de grupos de dos elementos.

Hecho que proviene de la teoria de grupos de orden acotado [20].

Corolario 3. Toda transformación $\sigma: G \to G$ tal que $\sigma(o) = o$ y que conserve la distancia es necesariamente biyectiva.

Proposición 4. Toda isometría homogénea $\sigma\in H(G)$ es un morfismo de la suma.

La demostración sale del hecho que σ actúa sobre g multiplicando los componentes de g por $(\varepsilon_{x,J_\sigma})$, operación que es evidentemente distributiva.

<u>Corolario 1.</u> Los elementos de H(G) son exactamente las aplicaciones que conservan el valor absoluto y que son a la vez morfismos de la suma.

En efecto; si $\sigma:G \to G$ verifica $|\sigma(x)| = |x|$ y $\sigma(x + y) = \sigma(x) + (y)$, entonces $\sigma(o) = o$ y además $|\sigma(x) - \sigma(y)| = |\sigma(x-y)| = |x-y|$. El recíproco ya se ha visto.

<u>Proposición 5.</u> La familia de conjuntos admisibles es cerrada por diferencia simétrica, complementación, y además contiene al $\emptyset$ y al conjunto X.

Si $\sigma = I$, entonces $J_\sigma = \emptyset$ y si $\sigma = -I$ entonces $J_\sigma = X$. Además $J_{\sigma\circ\tau} = J_\sigma \Delta J_\tau$, pues si $J,K \subset X$ se verifica por comprobación directa en todos los casos,

$$\varepsilon_{x,J} \cdot \varepsilon_{x,K} = \varepsilon_{x,J\,\Delta\,K}$$

<u>Definición 6.</u> Dados G y la realización $\theta:G \to \prod_{x\in X} G_x$, $I \subset X$ es un conjunto "truncador" si para todo $(g_x)_{x\in X} \in G$, el elemento obtenido anulando las componentes fuera de I es también de G.

Será útil la siguiente aplicación $\delta_I:X \to \{o,1\}$, dada por:

$$\delta_I(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } x\in I \\ o, & \text{si } x\notin I \end{cases}$$

Escribiremos $\delta_{x,I}$ en lugar de $\delta_I(x)$.

Evidentemente se obtienen las siguientes reglas de cálculo simbólico:

$$\varepsilon_{x,I} = \delta_{x,I^c} - \delta_{x,I};\ \delta_{x,I} \cdot \delta_{x,J} = \delta_{x,I\cap J}$$

La definición anterior puede reformularse así:

<u>I es truncador si y sólo si $(g_x)_{x\in X} \in G$ implica</u> $(g_x \cdot \delta_{x,I})_{x\in X} \in G$.

Lema 4. Si I es truncador, I^c también lo es.

Basta observar que $\delta_{x,I^c} = 1-\delta_{x,I}$ de donde

Lema 5. La família de conjuntos truncadores es cerrada por intersección.

En efecto, sean $I,J \subset X$ truncadores. Entonces si $(g_x)_{x\in X} \in G$ también será de G el elemento $(g_x \cdot \delta_{x,I})_{x\in X}$ por ser I truncador, y también el elemento $(g_x \cdot \delta_{x,I} \cdot \delta_{x,J})_{x\in X}$ por ser J a su vez truncador. Pero este último elemento no es más que

$$(g_x \cdot \delta_{x,I\cap J})_{x\in X}$$

lo cual indica que $I \cap J$ es truncador.

Proposición 6. $J \subset X$ es admisible si y sólo si J es truncador.

En efecto, supongamos primero que J es truncador. Entonces J^c también lo es y si $(g_x)_{x\in X} \in G$, también $(g_x \cdot \delta_{x,I})_{x\in X} \in G$ y $(g_x \cdot \delta_{x,I^c})_{x\in X} \in G$. Por consiguiente de $\varepsilon_{x,I} = \delta_{x,I^c} - \delta_{x,I}$ resulta que la correspondencia

$$\tau\ (g_x)_{x\in X} = (g_x \cdot \varepsilon_{x,I})_{x\in X},$$

es una isometría cuyo conjunto admisible es I.

Recíprocamente, sea I admisible correspondiente a la isometría τ. Si $g\in G$, también es del grupo G el elemento

$$(\tau(g_+) \vee o) + (-\tau(g_-) \wedge o)$$

pero si $g = (g_x)_{x\in X}$ y ponemos

$$P = \{ x\in X \ / g_x \geqslant o \}$$

$$N = \{ x\in X \ / g_x \leqslant o \}$$

tendremos:

$$(g_x)_{x\in X\,+} = (g_x\ \delta_{x,p})_{x\in X}$$

$$\tau\,(g_+) = (g_x\delta_{x,p}\varepsilon_{x,I})_{x\in X} = (g_x\delta_{x,p}\delta_{x,I^c})_{x\in X} - (g_x\delta_{x,p}\delta_{x,I})_{x\in X}$$

$$\tau\,(g_+)\vee o = (g_x\delta_{x,p}\delta_{x,I^c})_{x\in X} = (g_x\delta_{x,p\,\cap\, I^c})_{x\in X}\ .$$

y análogamente

$$-\tau(g_-)\wedge o = (g_x\delta_{x,N\,\cap\, I^c})_{x\in X}$$

de donde

$$\tau(g_+)\vee o + (-\tau(g_-)\wedge o) = (g_x\delta_{x,P\,\cap\, I^c})_{x\in X} + (g_x\delta_{x,N\,\cap\, I^c})_{x\in X} =$$

$$= (g_x\delta_{x,I^c})_{x\in X},$$

pues aunque P y N no son disjuntos, se cortan en índices que corresponden a componentes nulas, cuya suma es o. Por tanto I^c es truncador.

Proposición 7. La família Ad(X) de conjuntos admisibles es un álgebra de Boole subálgebra de P(X).

En efecto, la família es cerrada por diferencia simétrica por la proposición 5, y cerrada por intersección por el lema 5.

Proposición 8. La correspondencia $H(G) \to Ad(X)$ dada por $\sigma \to J_\sigma$ es biyectiva.

En efecto, es epiyectiva por la misma definición de Ad(X). Además si $J_\sigma = J_\tau$, puesto que la definición de σ y τ es

$$\sigma(g_x)_{x\in X} = (g_x \cdot \varepsilon_{x,I_\sigma})_{x\in X}$$

$$\tau(g_x)_{x\in X} = (g_x \cdot \varepsilon_{x,I_\tau})_{x\in X}$$

y $\varepsilon_{x,I} = \varepsilon_{x,J}$ si y sólo si $I = J$, se deduce que σ y τ coinciden.

Corolario 1. El grupo H(G) es el grupo abeliano subyacente de un anillo de Boole.

Las operaciones del grupo son la composición $\sigma \circ \tau$ que corresponde a la diferencia simétrica $J_\sigma \Delta J_\tau$ en Ad(X) y una nueva operación que designaremos $\sigma * \tau$ que corresponde a la intersección $J_\sigma \cap J_\tau$. Hay que aclarar que la operación $\sigma * \tau$ depende en principio de la representación considerada. Veremos más adelante, en el caso de f-anillos, que tal operación es "natural" y no depende más que del anillo A.

Ejemplo 1. Grupo reticulado no totalmente ordenado que solamente admite dos isometrías homogéneas.

Sea Ω un espacio topológico conexo y $G = \mathscr{C}(\Omega)$ las funciones reales continuas sobre Ω. Es evidente que G es un grupo reticulado, que no es totalmente ordenado si Ω no está reducido a un punto. Además $G \subset R^\Omega$ y esta inclusión es una realización concordante de G,

Evidentemente G posee las dos isometrías homogéneas $\pm$ Identidad. Supongamos que $\sigma \in H(G)$ fuese distinta de ellas.

El conjunto $I \subset \Omega$ admisible, asociado a σ, sería no vacío y distinto de Ω. Entonces

$$(\sigma f)(x) = -f(x), \quad \text{si} \quad x \in I$$

$$(\sigma f)(x) = f(x), \quad \text{si} \quad x \in I^c.$$

De la igualdad $\Omega = I \cup I^c$ y de la conexión se deduce que uno de los dos I, I^c no es abierto, digamos I. Entonces si $\alpha \in I$, y α no es interior a I, será $\alpha \in \bar{I}$, $\alpha \in \bar{I}^c$ y por tanto $\alpha \in \partial I \neq \emptyset$.

Tomemos sobre Ω una función continua no nula, por ejemplo la constante $f(x) = a$, $\forall x \in \Omega$. Entonces $\sigma(f) \in G$ sería.

$$\sigma(f)(x) = -a, \quad x \in I$$

$$\sigma(f)(x) = a, \quad x \in I^c.$$

Sean $(x_\mu)_{\mu \in M}$, $(y_\nu)_{\nu \in N}$ dos redes convergentes a α de puntos de I y de I^c, respectivamente. Por la continuidad de f tendríamos que $(f(x_\mu))_{\mu\in M}$, $(f(y_\nu))_{\nu\in N}$ convergerían a $f(\alpha)$, pero $f(x_\mu) = a$, $\forall\mu\in M$ y $f(y_\nu) = -a, \forall\nu\in N$, lo cual dice que $a = f(\alpha) = -a$ lo que es absurdo. Luego ó I ó I^c son vacios y $H(G)\cong Z_2$.

§3. Estudio del semigrupo M(G).

El estudio de M(G) se reduce, como en el caso clásico, a la descomposición de los elementos de M(G) en productos de traslaciones por isometrías homogéneas.

Lema 6. Toda isometría es producto de una traslación por una siometría homogénea.

En efecto, sea $\sigma\in M(G)$. Consideremos la traslación t_a con $a = -\sigma(o)$ y el producto

$$\sigma_1 = t_a \circ \sigma$$

evidentemente σ_1 es una isometría y además $\sigma_1(o)=t_a(\sigma(o))=\sigma(o)-\sigma(o)=o$. Luego tenemos

$$\sigma = t_{-a} \circ \sigma_1$$

Corolario 1. Toda isometría es una aplicación biyectiva, y su inversa es una isometría. M(G) es un grupo con la composición.

Basta observar que $\sigma^{-1} = \sigma_1 \circ t_a$ si $\sigma= t_a\circ\sigma_1$.

Proposición 9. El grupo T(G) de las traslaciones es normal en M(G).

En efecto, sea $t_a\in T(G)$, hace falta demostrar que $\sigma\circ t_a \circ \sigma^{-1}\in T(G)$, $\forall\ \sigma\in M(G)$. Pongamos $\sigma=t_{\sigma(o)}\circ \sigma_1$, con $\sigma_1\in H(G)$. Entonces

$$\sigma \circ t_a \circ \sigma^{-1} = t_{\sigma(o)} \circ \sigma_1 \circ t_a \circ \sigma_1^{-1} \circ t_{-\sigma(o)}$$

Es suficiente ver que $\sigma_1 \circ t_a \circ \sigma_1^{-1}$ es una traslación. Pero $\sigma_1\circ t_a\circ \sigma_1^{-1}(x)=$

$=\sigma_1(\sigma_1^{-1}(x)+a) = x+\sigma_1(a)$ por ser σ_1 morfismo. Esto demuestra el enunciado.

Proposición 10. El grupo $M(G)$ es producto semidirecto de $H(G)$ y $T(G)$.

En efecto, se verifican las condiciones:

1) $M(G) = T(G) \circ H(G)$ (por Lema 6).

2) $T(G)$ es normal en un $M(G)$ (por Proposición 9).

3) $T(G) \cap H(G) = \{1\}$

que aseguran el enunciado.

§4. Grupo de isometrias de un producto y de una suma de grupos reticulados.

Sean $\{G_i\}$, $i \in I$ una família de grupos reticulados y $G = \prod_{i\in I} G_i$ su producto como grupo reticulado. Se verifica la siguiente

Proposición 11. El grupo de isometrías homogéneas del producto de grupos reticulados G_i es el producto directo de los grupos de isometrías homogéneas de los factores.

$$H\left(\prod_{i\in I} G_i\right) \cong \prod_{i\in I} H(G_i)$$

Establezcamos primero una aplicación

$$\prod_{i\in I} H(G_i) \xrightarrow{\varphi} H\left(\prod_{i\in I} G_i\right)$$

de la siguiente forma: dado un elemento $(\tau_i)_{i\in I}$ de $\prod_{i\in I} H(G_i)$, definimos

$$\varphi\,(\tau_i)_{i\in I} : G \to G$$

tal que $$\varphi\,(\tau_i)_{i\in I}\,(g_i)_{i\in I} = (\tau_i g_i)_{i\in I}$$

Se verifica:

$$|\varphi(\tau_i)_{i\in I}(x_i)_{i\in I} - \varphi(\tau_i)_{i\in I}(y_i)_{i\in I}| = |(\tau_i x_i - \tau_i y_i)_{i\in I}| =$$

$$= |\tau_i x_i - \tau_i y_i|_{i\in I} = |x_i - y_i|_{i\in I} = |(x_i - y_i)_{i\in I}| =$$

$$= |(x_i)_{i\in I} - (y_i)_{i\in I}|$$

y esto justifica la definición pues $\varphi(\tau_i)_{i\in I} \in H(G)$.

φ es un morfismo ya que:

$$\varphi(\tau_i)(\sigma_i)\ (x_i) = \varphi(\tau_i\sigma_i)\ (x_i) = (\tau_i\sigma_i x_i) =$$

$$= \varphi(\tau_i)(\sigma_i x_i) = \varphi(\tau_i)\varphi(\sigma_i)(x_i) \quad \text{de donde sale}$$

$$\varphi(\tau_i)(\sigma_i) = \varphi(\tau_i)\ \varphi(\sigma_i)$$

La aplicación φ es inyectiva ya que si tenemos $\varphi(\tau_i)$ = identidad, es $\varphi(\tau_i)(x_i) = (\tau_i x_i) = (x_i)$ y por tanto τ_i = identidad para cada $i \in I$.

Dado $\tau \in H(G)$, pongamos $\tau(o,\dots,x_i,\dots,o) = (\alpha_i)_{i\in I}$. Pero $|\tau(o,\dots,x_i,\dots o)| = |(o,\dots,x_i,\dots,o)| = (o,\dots,|x_i|,\dots o) = (|\alpha_i|)_{i\in I}$, con lo que $\alpha_j = o$ si $j \neq i$ y $|\alpha_i| = |x_i|$.

Hemos definido pues τ_i tal que $\alpha_i = \tau_i x_i$, de forma que para todo $i \in I$, tenemos $\tau_i : G_i \to G_i$ que verifica $\tau_i(o) = o$ y $|\tau_i(x_i)| = |x_i|$, con esto y por ser morfismo $\tau_i \in H(G_i)$.

Para ver la epiyectividad de φ bastará comprobarse que $\tau = \varphi(\tau_i)_{i\in I}$. Dado $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i$ pongamos $\tau(x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$. Tomando un $j \in I$ consideremos el elemento $(o,\dots,x_j,\dots,o)$. Por un lado $\tau(o\dots,x_j,\dots o) = (o\dots,\tau_j x_j,\dots o)$ y por otro lado $|\tau(x_i)_{i\in I} - \tau(o\dots x_j\dots o)| = |(y_i)_{i\in I} - (o\dots\tau_j x_j\dots o)| =$
$= |(x_i)_{i\in I} - (o\ \dots\ x_j\ \dots\ o)| = |(z_k)|_{k\in I} = (\text{con } z_j = o) = |z_k|_{k\in I}$. Igualando

términos sale $y_j - \tau_j x_j = o$ de donde $\tau = \varphi(\tau_i)_{i\in I}$. Es pues un isomorfismo y se acaba la demostración.

(Para abreviar notación, hemos designado por $(o \ldots x_i \ldots o)$ al elemento de $\prod_{i\in I} G_i$, que tiene en la componente i-ésima el elemento $x_i \in G_i$, y las demás todas nulas).

Corolario 1. Si $G = \prod_{i\in I} G_i$, entonces:

$$D(G) = \prod_{i\in I} G_i \times' \prod_{i\in I} H(G_i) \quad \text{(producto semidirecto)}$$

Corolario 2. El producto de grupos totalmente ordenados $\prod_{i\in I} G_i$ tiene por grupo de isometrías homogéneas al grupo Z_2^I.

En efecto, basta aplicar la proposición anterior y que el grupo de isometrías de un grupo totalmente ordenado es Z_2.

Sea ahora $\{G_i\}_{i\in I}$ una família de grupos reticulados y $\sum_{i\in I} G_i$ su suma directa. Se verifica la siguiente

Proposición 12. El grupo de isometrias homogéneas de una suma directa de grupos reticulados G_i es el producto directo de los grupos de isometrias homogéneas de los factores

$$H\left(\sum_{i\in I} G_i\right) = \prod_{i\in I} H(G_i).$$

La demostración es análoga a la de la proposición 11, con los cambios necesarios.

Corolario 1. Si $G = \sum_{i\in I} G_i$ entonces

$$D(G) = \sum_{i\in I} G_i \times' \prod_{i\in I} H(G_i) \quad \text{(producto semidirecto)}$$

Corolario 2. La suma de grupos totalmente ordenados $\sum_{i\in I} G_i$ tiene por grupo de isometrias homogéneas el grupo Z_2^I.

EJEMPLO 2. Grupo reticulado de funciones reales contínuas sobre un espacio topológico localmente conexo.

Sea X un espacio topológico. Se verifica que $X = \bigcup_{j\in J} X_j$, siendo X_j componentes conexas de X que son cerrados en X. Supuesto X localmente conexo, las componentes X_j son además abiertos.

En este caso se verifica

$$\ell(X) = \prod_{j\in J} \ell(X_j).$$

Efectivamente, tenemos el morfismo natural de grupos

$$\ell(X) \to \ell(X_j),$$

dado por la restricción de una función contínua sobre X a la componenete X_j. En consecuencia, tenemos elmorfismo

$$\ell(X) \to \prod_{j\in J} \ell(X_j)$$

que es un isomorfismo.

Si $f\in\ell(X)$ es positiva, todas las restricciones son positivas. Al revés, si f es tal que todas sus restricciones son positivas, es necesariamente positiva. El isomorfismo anterior lo es pues también de orden.

Finalmente puesto que

$$(f \vee g)|_{X_j} = f|_{X_j} \vee g|_{X_j},$$

el morfismo es reticular.

Esta última afirmación, junto con la proposición nos permite asegurar

$$H(\ell(X)) = \prod_{j\in J} H(\ell(X_j))$$

pero como además $H(\ell(X_j)) \cong \mathbb{Z}_2$ por el ejemplo 1,

$$H(\ell(X)) \cong Z_2^J,$$

siendo J el cardinal de componentes conexas de X.

Si X no es localmente conexo, el morfismo

$$\ell(X) \to \prod_{j\in J} \ell(X_j)$$

no es epiyectivo, y en consecuencia lo anterior no es válido.

§5. Estudio de las isometrias de un f-anillo reticulado.

Sea A un f-anillo conmutativo y con unidad. La estructura del grupo reticulado subyacente de A permite aplicar los teoremas de los apartados anteriores al estudio de H(A), T(A), y M(A). Pero la estructura adicional que ahora posee A permite precisar más la estructura de H(A).

Se verifica el siguiente

Lema 7. $I \subset X$ es admisible si y sólo si

$$\varphi_I = (\delta_{x,I})_{x\in X}$$

es un elemento de A. (A los elementos del tipo anterior los llamaremos "indicadores").

En efecto, supongamos I_σ admisible. Entonces $-1\in A$ y por lo tanto

$$\sigma(-1) \vee o \in A.$$

Pero $\sigma(-1) \vee o$ es precisamente $(\delta_{x,I})_{x\in X}$.

Recíprocamente, sea $\varphi_I \in A$. Entonces $1-\varphi_I = \varphi_{I^c} \in A$ y si $f \in A$ el elemento

$$f.\varphi_{I^c} - f.\varphi_I$$

es también de A.

La correspondencia τ: $A \to A$ dada por

$$\tau(f) = f.\varphi_{I^c} - f.\varphi_I$$

es isometría homogénea que tiene precisamente por conjunto admisible el I, pues

$$f.\varphi_{I^c} - f.\varphi_I = (f_x.\delta_{x,I^c})_{x\in X} - (f_x.\delta_{x,I})_{x\in X} = (f_x.\delta_{x,I})_{x\in X}.$$

Proposición 13. Existe correspondencia biyectiva entre las isometrias homogéneas de A y los elementos idempotentes de A.

En efecto, cada elemento indicador $\varphi_I \in A$ es un elemento idempotente puesto que si

$$\varphi_I = (\delta_{x,I})_{x\in X} \quad \text{será} \quad (\varphi_I)^2 = (\delta^2_{x,I})_{x\in X} = (\delta_{x,I})_{x\in X} = \varphi_I$$

de la igualdad $\delta^2_{x,I} = \delta_{x,I}$.

Recíprocamente sea $e \in A$ idempotente, es decir tal que $e^2 = e$. Pongamos

$$e = (e_x)_{x\in X}$$

se verificará

$$(e^2_x)_{x\in X} = (e_x)_{x\in X},$$

y por lo tanto $e^2_x = e_x$ $x \in X$. Pero como que cada A_x es un anillo totalmente ordenado, y en un tal anillo, los únicos idempotentes son o y 1 resulta que

$$e_x = \delta_{x,I} \quad \text{para} \quad I = \{ x\in X \mid e_x = 1_x \}.$$

Luego $e = \varphi_I$.

Designaremos por Id (A) al conjunto de elementos idempotentes de A.

Corolario 1. Si A es un f-anillo conmutativo y con unidad y $\theta: A \to \prod_{x\in X} A_x$

una representación, los conjuntos Ad(X), H(A) y Id(A) admiten pares de operaciones que los convierten en álgebras de Boole isomorfas.

Las operaciones son:

1) En Ad(X) : $I \Delta J$, $I \cap J$.

2) En H(A) : $\sigma \circ \tau$, $\sigma * \tau$

3) En Id(A) : $e \oplus e' = e + e' - 2e.e'$, $e.e'$

En efecto, las dos primeras álgebras ya se han estudiado anteriormente. El isomorfismo de la primera y de la tercera sale de

$$\varphi_{I \Delta J} = \varphi_I + \varphi_J - 2\,\varphi_{I \cap J}$$

$$\varphi_{I \cap J} = \varphi_I \,.\, \varphi_J$$

para los elementos indicadores.

La consecuencia que deducimos es que H(A) tiene en este caso una característica independiente de toda representación del anillo A, pues solamente de-- pende de los idempotentes de A. No era así el caso de los grupos, ni lo sería tampoco el caso de anillos sin unidad, como se verá en los ejemplos que seguirán.

<u>Proposición 14.</u> Si el f-anillo A es un cuerpo, entonces $H(A) \cong Z_2$.

Basta observar que en este caso A es, necesariamente totalmente ordenado.

<u>Proposición 15.</u> Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una família de f-anillos reticulados, conmutativos y con unidad, entonces el f-anillo $A = \prod_{i \in I} A_i$ tiene por álgebra de Boole $H(A_i)$.

En efecto, dado el isomorfismo $H(A) \cong \prod_{i \in I} H(A_i)$ ya conocido para la estructura aditiva, basta comprobar que $Id(A) = \prod_{i \in I} Id(A_i)$ y que la correspondencia conserva el producto.

Esto nos dice, a la vista de la proposición 13, colorario 1, que si $\sigma, \tau \in H(A)$, con $\sigma = (\sigma_i)_{i \in I}$, $\tau = (\tau_i)_{i \in I}$, entonces $\sigma * \tau = (\sigma_i * \tau_i)_{i \in I}$ y el isomorfismo

$$H(A) \cong \prod_{i \in I} H(A_i)$$

lo es de álgebras de Boole.

Proposición 16. Dada un álgebra de Boole cualquiera B, existe un anillo conmutativo y con unidad A, tal que $H(A) \cong B$.

En efecto, por el teorema de la representación de Stone, existirá un conjunto X tal que B sea sub-álgebra de P(X). Consideremos el anillo Z^X que es conmutativo y tiene unidad.

Sea A el conjunto de elementos de Z^X del tipo

$$\sum_i n_i \varphi_{I_i} ,$$

φ_{I_i} función indicatriz de conjuntos $I_i \in B$ y los $n_i \in Z$ nulos todos salvo un número finito. Por su misma definición estos elementos forman un subgrupo de Z^X cerrado respecto a la suma. Además, la condición $\varphi_I . \varphi_J = \varphi_{I \cap J}$ nos dice que son cerrados respecto el producto. Luego A es un anillo, subanillo de Z^X. Es conmutativo y tiene unidad φ_X. El anillo es reticulado, pues dados $\sum_i n_i \varphi_{I_i}$, $\sum_j m_j \varphi I_j$, podemos encontrar expresiones para ambos que tengan en común los conjuntos básicos I_i (por ejemplo tomando todos los $I_i \cap I_j$). Entonces

$$\left(\sum_k n_k \varphi I_k \right) \vee \left(\sum_k m_k \varphi I_k \right) = \sum_k \text{máx } (n_k, m_k) \varphi_{I_k}$$

$$\left(\sum_k n_k . \varphi I_k \right) \wedge \left(\sum_k m_k \varphi I_k \right) = \sum_k \text{mín } (n_k, m_k) \varphi_{I_k}$$

Es evidente que los únicos idempotentes de A son los φ_I y por lo tanto

$$H(A) \cong B$$

§ 6. Ejemplos.

3) Funciones reales contínuas sobre espacios topológicos.

Sea X un espacio topológico y $\mathcal{C}(X)$ el f-anillo de funciones reales contínuas sobre X. $\mathcal{C}(X)$ es un anillo conmutativo y con unidad y podemos aplicar los resultados del § 5. El álgebra de Boole $H(\mathcal{C}(X))$ será el álgebra de Boole de idempotentes de $\mathcal{C}(X)$, que a su vez son las funciones indicatrices $_A$ de conjuntos $A \subset X$. Se verifica el siguiente

Lema. La función $\varphi_A : X \to R$, indicatriz de A es continua si y sólo si A es abierto y cerrado a la vez.

La demostración es conocida.

Resulta que el álgebra de Boole de isometría homogéneas de $\mathcal{C}(X)$ es isomorfa al álgebra de Boole de abiertos y cerrados de X.

Si el espacio X es localmente conexo entonces se verifica $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, X_i componentes conexas de X (la reunión es disjunta). Entonces se verifica que los conjuntos abiertos y cerrados de X son precisamente las uniones de componentes X_i.

El álgebra de Boole de abiertos y cerrados es $P(I)$, lo que concuerda con el tratamiento de este mismo ejemplo en §4, ya que como álgebras de Boole, $P(I)$ y Z_2^I son isomorfas con la correspondencia que asigna a cada parte de I su indicador valorado en Z_2. A la diferencia simétrica de conjuntos corresponde la suma de indicadores, y a la intersección el producto. Queda por tanto en este caso $H(\mathcal{C}(X)) = P(I) = Z_2^I$. Si X es conexo sale $\mathcal{C}(X) = Z_2$; como se había visto directamente en el §2.

4) Funciones reales contínuas con soporte compacto sobre un espacio topológico X.

Si X es un espacio topológico, sea $\mathcal{C}'(X)$ el anillo de funciones contí--

nuas con soporte compacto valoradas en R. $\ell'(X)$ es un anillo, que no posee unidad a menos que X sea compacto. Al carecer de unidad no se puede asegurar ya que isometrías homogéneas de $\ell'(X)$ estén en correspondencia biyectiva con los idempotentes de $\ell'(X)$. En rigor, a cada idempotente de $\ell'(X)$ corresponde un elemento de $H(\ell'(X))$, pero hay elementos de $H(\ell'(X))$ que no provienen de ningún idempotente. Sea por ejemplo X un espacio cuyas conponentes conexas sean compactas pero que X no lo sea, $X = \bigcup_{i\in I} X_i$, X_i compacto (necesariamente I debe ser un conjunto infinito). Podemos tomar para concretar una suma topológica de infinitos intervalos cerrados de la recta real. Las componentes conexas son tales intérvalos. Entonces los idempotentes de $\ell'(X)$ son exactamente los indicadores de un número finito de componentes, los cuales naturalmente dan lugar a una isometría de $\ell'(X)$. Pero podemos obtener isometrias que no provengan de idempotentes, por ejemplo, efectuando un cambio de signo de infinitas componentes conexas. En concreto en este caso el álgebra de Boole $H(\ell'(X))$ sería P(I) mientras que los idempotentes no formarían álgebra de Boole al fallar la unidad y la complementación.

Si X es conexo, $\ell'(X)$ no admite más isometrías que la identidad y el cambio de signo.

5) Funciones medibles e integrables.

Sea X un conjunto, $\mathcal{a}$ una subálgebra de P(X) y $\mu:\mathcal{a} \to R$ una medida.

Llamemos $\mathfrak{m}(X)$ al conjunto de funciones reales medibles respecto de $\mathcal{a}$ y μ. Evidentemente $\mathfrak{m}(X)$ es un anillo representable en R^X de forma natural. Este anillo evidentemente es conmutativo y posee unidad. Sus idempotentes son precisamente las funciones características de los conjuntos medibles y el álgebra de Boole que forman es la misma álgebra $\mathcal{a}$. Tenemos pues

$$H(\mathfrak{m}(X)) \cong \mathcal{a}$$

Lo anterior es válido por ejemplo para $X=R$, con $\mathcal{a}$ el álgebra de conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue y μ la medida de Lebesgue.

Dentro del anillo anterior consideremos, por ejemplo, el subgrupo $\mathcal{L}^p(R)$, que no es un anillo puesto que no es cerrado por producto. Sin embargo la representación de anillos

$$\mathcal{L}^{p}(R) \to R^{R}$$

sigue siendo representación de grupos.

$$\mathcal{L}^{p}(R) \to R^{R}$$

Tenemos que un subconjunto $I \subset R$ es truncador para $\mathcal{L}^{p}(R)$ si y sólo si es medible. En efecto, si $f \in \mathcal{L}^{p}(R)$ e I es medible se verifica, $|f| \in \mathcal{L}^{p}(R)$, $\varphi_{I} . |f| \leqslant |f|$ y por tanto $\varphi_{I} . |f| \in \mathcal{L}^{p}(R)$ de donde $\varphi_{I} . f \in {}^{p}(R)$ ya que su valor ab soluto también lo es.

Recíprocamente si I no es medible, tendrá una parte acotada $I' \subset [a,b]$ no medible. Entonces $\varphi_{[a,b]} \in \mathcal{L}^{p}(R)$ pero $\varphi_{[a,b]}$, $\varphi_{I} \in \mathcal{L}^{p}(R)$ y el conjunto I no es truncador. Obtenemos que $H(\mathcal{L}^{p}(R))$ es el álgebra de Boole de conjuntos medibles Lebesgue.

6) Sucesiones de números reales.

Sea S el conjunto de todas las sucesiones de números reales. Con las operaciones de suma y producto puntuales S se convierte en un anillo, que es precisamente R^{N}. En S tenemos un orden puntual que es evidentemente reticulado. Se tiene $H(S) = Z_{2}^{N}$.

Sea ahora C, el conjunto de sucesiones convergente hacia algún límite. Evidentemente $C \subset S$ y pongamos el orden puntual en C: $\{a_{n}\} \geqslant o$ si $a_{n} \geqslant o$, $\forall\, n \in N$. C es un anillo reticulado conmutativo y con unidad, y la inclusión $C \quad S$ es una representación de C.

Al poseer C unidad, podemos estudiar $H(C)$ por medio de los elementos idempotentes. Para que una sucesión valorada en $\{o,1\}$ sea convergente, debe ser constante a partir de un lugar. Luego los conjuntos truncadores son los finitos y sus complementarios, y solamente estos. El álgebra de Boole $H(C)$ es precisamente la $P_{fc}(N)$ finita-cofinita de N formada por las partes finitas de N y sus complementarios.

Si designamos por C_{o} el conjunto de sucesiones convergentes hacia cero, obtenemos de nuevo un anillo, ahora sin unidad. Para estudiar $H(C_o)$ debemos forzosamente tomar en consideración los conjuntos truncadores de $C_o \subset R^N$. Pero es cierto que si una sucesión tiende a cero, truncada por cualquier conjunto de índices sigue teniendo límite cero. Por lo tanto $H(C_o) = P(N)$.

De todos los ejemplos anteriores podemos deducir que no se puede establecer en principio ninguna relación entre las álgebras de isometrías homogéneas de un grupo y un subgrupo.

Bibliografia.

[1] BIRKHOFF, G., "Lattice Theory". American Math. Soc., New York, (1948).

[2] CLIFFORD, A. H., "Partially ordered abelian groups". Annals of Math. 41, (1940) 465-473.

[3] JAFFARD, P., "Les systemes d'ideaux", Dunod, 1960.

[4] KY FAN, "Partially ordered additive groups of continuous functions". Annals of Math. 51-2, (1950), 409-427.

[5] MENGER, K., "Statistical metrics". Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28, (1942).

[6] RIBENBOIM, P., "Théorie des groupes ordonnés", Univ. Nacional del Sur, Bahía Blanca, 1963.

[7] RIBENBOIM, P., "Un Théoreme de réalisation pour les groupes reticulés", Pac. Math. J., 10, (1960), 305-308.

[8] SCHWEITZER, B., "Statistic metric spaces". Pacific, Jour. Math. 10-1 (1960).

[9] TRILLAS, E., "Sobre métricas aleatórias". Actas R.A.M.E. VIII, Publicaciones del Instituto Jorge Juan, 1969.

[10] TRILLAS, E., Tesis Doctoral, Univ. de Barcelona, 1972.

[11] VULIKH, B. Z., "Introduction to the theory of partially ordered spaces", Wolters-Noordhoff, (1967).

Dpto. de Matemáticas y Estadística.
E.T.S. Arquitectura.
Universidad Politécnica.
Diagonal 649, Barcelona-28.