STOCHASTICA, Vol. IV, nº 1 (1980)

UNA NUEVA DEFINICION DE APLICACION DIFUSA

Miguel Delgado Calvo-Flores

ABSTRACT

If X,Y are universes of discourse, a fuzzy mapping $f:X\to Y$ is defined as a classical mapping $f:X\times[0,1]\to \underset{\sim}{P}(Y)$. Their basic properties are studied as well as their relations with the classical model of fuzzy mapping.

La definición "clásica" de aplicación difusa

Dados dos conjuntos X e Y, una aplicación de X a Y se define como un subconjunto del producto cartesiano X x Y. Coherentemente, (ver [3], [4]):

Definición 1. Una aplicación difusa de X a Y es un subconjunto difuso del producto cartesiano X x Y. Notaremos $\mathcal{F}_{XY}$ la clase de estas aplicaciones.

Es inmediato que si notamos F_{XY} el conjunto de las aplicaciones (en sentido clásico) de X a Y, es $F_{XY} \subset \mathcal{F}_{XY}$.

Sea $f\in\mathcal{F}_{XY}$, con función de pertenencia $\mu_f(x,y)$. Para cada $x\in X$ sea $\mu_{f(x)}(.)\ :\ Y \to [0,1]$ dada por $\mu_{f(x)}(y)=\mu_f(x,y)$; f puede interpretarse como una aplicación $f\ :\ X \to \underset{\sim}{P}(Y)$.

Definición 2. Si $A\in\underset{\sim}{P}(X)$ y $f\in\mathcal{F}_{XY}$, f(A) es el subconjunto difu so de Y con función de pertenencia:

$$\mu_{f(A)}(y) = \bigvee_{x\varepsilon X} \{\mu_A(x) \wedge \mu_f(x,y)\}, \tag{1}$$

donde $\vee$ y $\wedge$ son los operadores supremo e ínfimo respectivamente.

Definición 3. Sean $f\varepsilon F_{XY}$ y $g\varepsilon F_{YZ}$ con funciones de pertenencia $\mu_f(x,y)$ y $\mu_g(y,z)$ respectivamente. Notaremos $g*f$ (aplicación compuesta) al elemento de F_{XZ} con función de pertenencia:

$$\mu_{g*f}(x,z) = \bigvee_{y\varepsilon Y} \{\mu_f(x,y) \wedge \mu_g(y,z)\}.$$

Es inmediato que la ley de composición * es asociativa.

Si bien la definición de aplicación difusa clásica permite describir situaciones en las que aparece la imprecisión "y se asocia con (es el transformado de) x con un cierto grado", existen otras asociaciones y transformaciones a las que se puede asignar un grado y que, sin embargo, no pueden ser descritas con el modelo expuesto, como es el caso de los sistemas estímulo-respuesta a través de una caja negra, en los que, para la respuesta, varíe el grado de pertenencia que inicialmente tenía el estímulo.

La formulación que presentamos mejora la que se dió en [1] y [2].

Una nueva definición de aplicación difusa

Sea X e Y dos referenciales arbitrarios.

Definición 4. Denominaremos aplicación difusa de X a Y a toda aplicación $f: X \times [0,1] \rightarrow \tilde{P}(Y)$. Notaremos $\tilde{F}_{XY}$ el conjunto de estas aplicaciones.

Dados $x\varepsilon X$ y $r,r'\varepsilon[0,1]$, atendiendo a la relación existente entre los difusos $f(x,r)$ y $f(x,r')$, podemos establecer:

c.1) f es <u>monótona no decreciente en x</u> si para todo y,

$$r \leqslant r' \Rightarrow f(x,r) \subset f(x,r') \Leftrightarrow \mu_{f(x,r)}(y) \leqslant \mu_{f(x,r')}(y).$$

Diremos que f es monótona no decreciente si esto se cumple para todo x de X.

c.2) f es <u>monótona no creciente en x</u> si para todo y,

$$r \leqslant r' \Rightarrow f(x,r') \subset f(x,r) \Leftrightarrow \mu_{f(x,r')}(y) \leqslant \mu_{f(x,r)}(y).$$

Diremos que f es monótona no creciente si esta propiedad se cumple para todo x de X.

c.3) f es <u>regular en x</u> si para todo $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que:

$$|r-r'| \leqslant \delta \Rightarrow |\mu_{f(x,r)}(y) - \mu_{f(x,r')}(y)| \leqslant \varepsilon, \text{ para todo } y \in Y.$$

Diremos que f es <u>regular</u> si esta condición se cumple para todo x de X. Nótese que δ puede depender de x.

<u>Definición 5.</u> Sea $A \in \underset{\sim}{P}(X)$ con función de pertenencia $\mu_A(x)$ y sea $f \in \underset{\sim}{F}_{XY}$. f(A) es el subconjunto difuso de Y definido por:

$$f(A) = \bigcup_x f(x, \mu_A(x)) \qquad (2);$$

en términos de funciones de pertenencia:

$$\mu_{f(A)}(y) = \sup_x \{u;\ (y,u) \in f(x,\mu_A(x))\} = \sup_x \{\mu_{f(x,\mu_A(x))}(y)\}, \qquad (3)$$

para cada $y \in Y$.

<u>Definición 6.</u> Sean $B \in \underset{\sim}{P}(Y)$ y $f \in \underset{\sim}{F}_{XY}$. Notaremos $f^{-1}(B)$ al máximo subconjunto difuso de X cuya imagen esté contenida en B; en términos de funciones de pertenencia:

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \sup \{r; f(x,r) \subset B\}.$$

Si $f(\emptyset) \neq \emptyset$, no existe imagen inversa para ningún B contenido en $f(\emptyset)$. Esta situación no debe ser confundida con el hecho de que la imagen inversa sea vacía, ya que $\emptyset$ es el subconjunto difuso con función de pertenencia idénticamente nula y recibe el mismo tratamiento que cualquier otro conjunto. Para resolver esta ambiguedad tenemos dos opciones:

a) Admitir $f(x,0) = \emptyset$, para todo $x \in X$,

b) Admitir, por convenio, $f^{-1}(B) = \emptyset$ si $B \subset f(\emptyset)$.

Puesto que ambas producen los mismos resultados, aceptaremos la segunda para no restar generalidad a nuestra definición.

Definición 7. Dadas $f \in \underset{\sim}{F}_{XY}$ y $g \in \underset{\sim}{F}_{YZ}$, notaremos $g.f$ (aplicación compuesta), al elemento de $\underset{\sim}{F}_{XZ}$ tal que:

Para todo $(x,r) \in X \times [0,1]$, $(g.f)(x,r) = g(f(x,r))$ (4).

Proposición 1. Cualesquiera que sean X e Y, $F_{XY} \subset \underset{\sim}{F}_{XY}$.

Demostración: Establezcamos $i: F_{XY} \rightarrow \underset{\sim}{F}_{XY}$ de modo que para toda $f \in F_{XY}$ de función de pertenencia $\mu_f(x,y)$, $i(f)$ sea el elemento de $\underset{\sim}{F}_{XY}$ que asocia a cualquier par (x,r), el subconjunto difuso de Y con función de pertenencia $\mu_{i(f)(x,r)}(y) = r \wedge \mu_f(x,y)$, $y \in Y$. Puede comprobarse fácilmente que i es una inyección y por tanto que $F_{XY} \subset \underset{\sim}{F}_{XY}$.

Como consecuencia de esta inclusión, a todo elemento de $\underset{\sim}{F}_{XY}$ le llamaremos aplicación difusa generalizada.

Proposición 2. Cualquiera que sea A, subconjunto difuso de X, y cualquiera que sea $f \in F_{XY}$, es $f(A) = i(f)(A)$.

Demostración: De acuerdo con (3) y (5) para todo $y \in Y$ es:

$$\mu_{i(f)(A)}(y) = \sup_x\{\mu_{i(f)(x,\mu_A(x))}(y)\} =$$

$$= \sup_x\{\mu_A(x)\wedge\mu_f(x,y)\} = \mu_{f(A)}(y).$$

<u>Proposición 3.</u> Para toda f de F_{XY}, es $i(f)\varepsilon \underset{\sim}{F}_{XY}$ monótona no decreciente y regular.

Demostración: Sea $x\varepsilon X$ y $r,r'\varepsilon[0,1]$ con $r \leqslant r'$. Para todo y de Y:

$$\mu_{i(f)(x,r)}(y)=r\wedge\mu_f(x,y) \leqslant r'\wedge\mu_f(x,y)=\mu_{i(f)(x,r')}(y),$$

lo que prueba que i(f) es monótona no decreciente.

Por otra parte, para todo x de X y cualesquiera r y r', de [0,1] se tiene:

$$|\mu_{i(f)(x,r)}(y)-\mu_{i(f)(x,r')}(y)|=|r\wedge\mu_f(x,y)-r'\wedge\mu_f(x,y)| \leqslant |r-r'|,$$

lo que prueba que i(f) es regular.

<u>Proposición 4.</u> Cualesquiera que sean $f\varepsilon F_{XY}$, $g\varepsilon F_{YZ}$, se cumple $i(g).i(f) = i(g*F)$.

Demostración: De acuerdo con la definición de la aplicación i y de la ley *, para todo $(x,r)\varepsilon X\times[0,1]$, y cualquier $z\varepsilon Z$, se puede escribir:

$$\mu_{i(g*f)(x,r)}(r) = r\wedge\mu_{g*f}(x,z) = r \wedge \sup_y\{\mu_f(x,y)\wedge\mu_g(y,z)\}.$$

Por la definición de la ley . se tiene :

$$\mu_{(i(g).i(f))(x,r)}(z) = \mu_{i(g)(i(f)(x,r))}(z) =$$

$$= \sup_y\{u;(z,u)\varepsilon i(g)(y,\lambda),(y,\lambda)\varepsilon i(f)(x,r)\}.$$

Ahora bien: $(z,u)\varepsilon i(g)(y,\lambda)$ implica $u=\lambda\wedge\mu_g(y,z)$ y de $(y,\lambda)\varepsilon i(f)(x,r)$

resulta $\lambda = r\wedge\mu_f(x,y)$, de modo que

$$\mu_{(i(g).i(f))(x,r)}(z) = \sup_y\{r\wedge\mu_f(x,y)\wedge\mu_g(y,z)$$

$$= r\wedge\sup_y\{\mu_f(x,y)\wedge\mu_g(y,z)\} = \mu_{i(g*f)(x,r)}(z),$$

lo que equivale a la igualdad $i(g).i(f) = i(g*f)$.

AGRADECIMIENTOS. El autor agradece a los profesores L.A. Zadeh (Berkeley) y E. Trillas (Barcelona) sus críticas y sugerencias durante la realización de la presente Nota.

Referencias

[1] DELGADO, M., "On a definition of fuzzy function", Proceedings of the First World Conference on Mathematics at the Service of Man. Barcelona, Julio 1977, p.p. 426-448.

[2] DELGADO, M., "Nota sobre procesos de decisión polietápicos en ambiente difuso", Contribuciones en Probabilidad y Estadística Matemática, Enseñanza de la Matemática y Análisis. Publicaciones de la Universidad de Granada, 1979, p.p. 109-115.

[3] GOGUEN, J., "L-Fuzzy sets", J. Mat. Ann. and Appl. Vol 18, n°. 1, 1967, p.p. 145-174.

[4] NEGOIŢA, C.V., RALESCU, D.A., "Representation of fuzzy condepts", Kybernetes, 4, 1975, p.p. 169-174.

[5] SCHEWEDE, G.W., KANDEL, A., "Fuzzy Maps", I.E.E.E. Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, S.M.C. 7, n°. 9, 1977, p.p. 669-674.

[6] ZADEH, L.A., "Fuzzy sets", Information and Control, 8, n°. 3, 1965, p.p. 338-353.

[7] ZADEH, L.A.; FU, K.S.; TANAKA, K.; SHIMURA, M.' "Fuzzy sets and their applications", Academic Press, Nueva York, 1975.

Departamento de Estadística Matemática.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Granada.
Granada. España.