STOCHASTICA, Vol. IV, nº 1 (1980)

LA TOPOLOGIA DE REDFIELD DEL GRUPO RETICULADO DE LAS MEDIDAS REGULARES SOBRE UN ESPACIO TOPOLOGICO LOCALMENTE COMPACTO Y σ-COMPACTO

Nadal Batle(*) y José Grané(**)

1. Introducción

En este trabajo se estudia la topología de Redfield (R-topología) en el espacio de las medidas finitas y regulares sobre un espacio topológico numerable en el infinito. Para ello debemos estudiar bajo qué condiciones suficientes se puede asegurar que una una medida bivalorada es exactamente una carga puntual. En general esta afirmación no es cierta y de ahí las condiciones restrictivas impuestas sobre el tipo de medidas y sobre la naturaleza del espacio topológico en lo que se refiere a la compacidad.

Los resultados a que se llega son los siguientes: El grupo reticulado de todas las medidas es producto directo de las medidas concentradas en puntos (necesariamente una cantidad numerable) y de las medidas difusas (sin cargas puntuales). La R-topología es grosera sobre la parte difusa y sobre la parte concentrada es Hausdorff y coincide con la topología de la convergencia puntual de "saltos".

Este trabajo es continuación de otros dos anteriores en los que se estudiaba la topología de los grupos reticulados de funciones continuas sobre un espacio topológico, y la del grupo reticulado de medidas localmente finitas sobre la recta (medidas de Lebesgue-Stieltjes), en cuyo caso la posibilidad de manejar las fun ciones de distribución asociadas a una medida obviaba el proble ma de caracterizar las medidas L-S bivaloradas, ya que estas se reducian trivialmente a las funciones "salto" de Heaviside.

2. El filtro de entornos de 0 en el grupo reticulado $\mathcal{M}$.

Sea E un espacio topológico y sea $\mathcal{M}$ el conjunto de medidas finitas y regulares sobre E. Entonces si μ es una tal medida se define

$$|\mu|(A) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E_i)|$$

con el supremo tomado sobre todas las particiones numerables $\{E_i\}_{i\in N}$ del conjunto A. Con esta definición de "variación total" de la medida μ sobre A, $|\mu|$ resulta una medida regular positiva y finita y $\mathcal{M}$ adquiere de forma natural una estructura de grupo reticulado. [4]

En la definición de $|\mu|$, el supremo puede tomarse sobre todas las particiones que contengan a una dada.

Designemos como es habitual por $\mathcal{M}^+$ el cono positivo de $\mathcal{M}$ que en este caso es el conjunto de las medidas positivas de $\mathcal{M}$, y por $\mathcal{M}_o^+$ el conjunto $\mathcal{M}^+ - \{0\}$.

De acuerdo con la definición de R-topología, debemos definir, para $\mu\in\mathcal{M}^+$

$$I(\mu) = \{\lambda\in\mathcal{M}^+ \mid \exists\lambda', \lambda \vee \lambda' = \mu, \lambda\wedge\lambda' = 0\}$$

Un elemento $\mu\in\mathcal{M}^+$ se llama <u>indescomponible</u> si $I(\mu)=\{0,\mu\}$. Designemos por J al conjunto de elementos indescomponibles no nulos.

Una sucesión (μ_n) de elementos de J se llama <u>contractiva</u> para el elemento $\mu\in J$ si se verifica

1) $\mu_1 = \mu$

2) $\mu_{n+1} + \mu_{n+1} \leqslant \mu_n$

3) $\mu_{n+1} = \mu_n^{\ 1}$

Pondremos

$$D_1 = \{\mu \in J \mid \text{existe una sucesión contractiva para } \mu\}$$

$$D_2 = \{\lambda \in \mathcal{G}_o^+ \mid [0,\lambda] = (0,\lambda)\}$$

y para cada $\mu \in \mathcal{G}_o^+$ definimos

$$N(0,\mu) = [-\mu,\mu] + \mu^{\perp}$$

$$\eta_1(0,\mu) = \{N(0,\mu) \mid \mu \in D_1\}$$

$$\eta_2(0;\mu) = \{\mu^{\perp} \mid \mu \in D_2\}$$

$$\eta_3(0,\mu) = \eta_1(0,\mu) \cup \eta_2(0,\mu)$$

Si $D_1 \cup D_2 \neq \emptyset$ se pone

$$\eta(0) = \{\bigcap_{i=1}^{k} H_i \mid H_i \in \eta_3 \ \ i = 1,2,\dots,n\}$$

Si $D_1 \cup D_2 = \emptyset$ se pone

$$\eta(0) = \mathcal{G}$$

Con esta definición se puede verificar que existe una única topología del grupo reticulado $\mathcal{G}$, que llamaremos topología R, tal que el filtro de entornos de 0 venga generado por $\eta(0)$.

3. La topología R en $\mathcal{M}$.

Lema 3.1. Si la medida $\mu\in\mathcal{M}^+$ toma tres valores distintos 0,a,b, entonces la medida es descomponible.

En efecto:

Supongamos, para fijar ideas que a<b, y sea $\mu(A)=a$ y $\mu(B)=b$. Podemos suponer $A\subset B$ cambiando, si conviene, B por $A\cup B$. Definamos $\mu_A(X)=\mu(X\cap A)$, $\mu_{A^c}(X)=\mu(X\cap A^c)$. Se verifica trivialmente que $\mu=\mu_A+\mu_{A^c}$. Pero por otro lado

$$|\mu_A-\mu_{A^c}|(X)=\sup\sum|(\mu_A-\mu_{A^c}(E_i)| =\sup\sum_i|\mu_A(E_i)-\mu_{A^c}(E_i)|$$

Tomando particiones más finas que la definida por A, A^c y tomando el supremo respecto de ellas, después de observar que la suma tendrá sumandos $E_i\subset A$ y sumandos $E_i'\subset A^c$, resultará

$$|\mu_A-\mu_{A^c}|(X)=\sup\sum_i|\mu(E_i)|=|\mu|(X)=\mu(X)$$

de manera que $|\mu_A-\mu_{A^c}|=\mu=\mu_A+\mu_{A^c}$ y $\mu_A\wedge\mu_{A^c}=0$. Por otro lado $\mu_A(A)=\mu(A)=a\neq 0$ y $\mu_{A^c}(B)=\mu(B\cap A^c)=\mu(B-A)=\mu(B-a)$ $=\mu(B)-\mu(A)=b-a>0$, de forma que μ_A y μ_{A^c} son no nulas y descomponen.

Corolario 3.2. Si $\mu\in\mathcal{M}^+$ es indescomponible, solamente puede tomar dos valores.

La necesidad de determinar todos los elementos indescomponibles de $^+$ nos lleva pues a considerar todas las medidas bivaloradas. Dado un punto $x\in E$, podemos definir $\delta_x\,\epsilon$ como $\delta_x(A)=1$ si $x\in A$ y $\delta_x(A)=0$ si $x\notin A$. Está claro que una tal δ_x toma solamente dos valores, y también a δ_x toma los dos valores a y 0. Tales medidas se llamarán cargas puntuales.

No se conoce en general si las únicas medidas bivaloradas son las cargas puntuales. Sin embargo esto sí ocurre si el espacio E es localmente compacto y numerable al infinito.

Teorema 3.3. Sea E un espacio topológico Hausdorff, numerable en el infinito y que verifique el primer axioma de numerabilidad. Si μ es una medida bivalorada regular, existe un $x \in E$ tal que $\mu = \delta_x$. (Podemos suponer, para simplificar, que los dos valores de μ son 0 y 1).

Para demostrar este teorema necesitamos los siguientes lemas:

Lema 3.4. Sea μ bivalorada sobre E verificando éste el primer axioma. Si $\mu(\{x\}) = 0$ entonces hay un entorno V de x tal que $\mu(V) = 0$.

En efecto:

Si para todo V que contiene x se verificase $\mu(V) \neq 0$, debería ser $\mu(V) = 1$. Entonces por el primer axioma de numerabilidad existiría una sucesión decreciente de abiertos V_n con intersección reducida al punto x. Por ser μ regular, de $V_n \searrow \{x\}$ se obtendría $\mu(V_n) \to \mu(\{x\})$ y en definitiva $\mu(\{x\}) = 1$ contra la hipótesis.

Lema 3.5. Si μ es bivalorada y E es compacto y verifica el primer axioma de numerabilidad, entonces hay un x en E tal que $\mu = \delta_x$.

En efecto:

Supongamos $\mu(\{x\}) = 0$ para todo x de E. Entonces por el lema anterior, para cada x de E existe un entorno V_x tal que $\mu(V_x) = 0$. De la familia de los V_x se puede extraer un recubrimiento finito que recubra E,

$$E = V_{x_1} \cup \ldots \cup V_{x_k}$$

y por lo tanto

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(V_{x_i}) = 0 \text{ y } \mu(E) = 0 \text{ absurdo si suponemos}$$

μ bivalorada.

Pasemos ahora a la demostración del teorema. Sea

$$K_1 \subset K_2 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots \subset \ldots$$

una sucesión creciente de compactos tales que $\cup K_i = E$. Definimos en K_n

$$\mu_n(X) = \mu(X \cap K_n).$$

Está claro que μ_n es una medida finita regular sobre K_n que es compacto. Por el lema anterior, puesto que μ_n es nula o bivalorada, será $\mu_n = 0$ o $\mu_n = \delta x_n$ con $x_n \in K_n$. Pero no todas las μ_n pueden ser nulas pues

$$\mu(X) = \mu(X \cap (\cup_i K_i)) = \mu(\cup(X \cap K_i)) \leqslant \sum \mu_i(X)$$

y μ sería nula.

Además por ser $\mu_n(X) = \mu(X \cap K_n) \leqslant \mu(X \cap K_{n+1}) = \mu_{n+1}(X)$, resulta que $\mu_{n+1}(\{x_n\}) > 0$. Por tanto las μ_n son concentradas a partir de la primera que lo es y es no nula y

$$\mu_n = \delta_x \qquad n \geqslant n_o$$

$$\mu_n = o \qquad n < n_o$$

De $\bigcup_n K_n = E$ deducimos $\bigcup_n (K_n - K_{n-1}) = E$ y en consecuencia $A = A \cap \cup (K_n - K_{n-1})$. El punto x estará en uno y sólo uno de los $K_n - K_{n-1}$ y en definitiva saldrá

$$\mu(A) = \sum \mu(A \cap (K_n - K_{n-1})) = \sum \mu_n(A \cap (K_n - K_{n-1})).$$

Todos los términos son nulos salvo uno de ellos que vale 1 o 0. En definitiva quedará

$$\mu(A) = \delta_x(A)$$

y $\mu = \delta_x$ como queríamos demostrar.

Con este teorema quedan caracterizadas las medidas regulares bivaloradas en los espacios topológicos σ-compactos y que verifiquen el primer axioma de numerabilidad. A partir de ahora supondremos que todos los espacios topológicos que se manejen verifican estas condiciones.

<u>Teorema 3.6.</u> Las medidas $t.\delta_x$ son indescomponibles.

En efecto:

Si $t\in R$ es trivial que $|t\delta_x| = |t|.\delta_x$. Dado ahora $t>0$, sea $t\delta_x = \mu_1+\mu_2$ con $|\mu_1-\mu_2| = \mu_1+\mu_2$, y con μ_1,μ_2 positivas. Se verificará $\mu_1(\{x\}) + \mu_2(\{x\}) = t$ de manera que $\mu_1(\{x\}) = \alpha t$ $\mu_2(\{x\}) = (1-\alpha)t$ y $\mu_1(A) + \mu_2(A) = 0$ si $x\notin A$, obteniéndose

$$\mu_1 = \alpha t\delta_x \quad , \quad \mu_2 = (1-\alpha)t\delta_x .$$

Pero $|\mu_1-\mu_2| = |(2\alpha-1)t\delta_x| = |2\alpha-1|t\delta_x = \mu_1+\mu_2 = t\delta_x$ implica $|2\alpha-1| = 1$ de donde $\alpha= 0$ o 1 y resultando en consecuencia $\mu_1 = t\delta_x$, $\mu_2 = 0$ o inversamente.

<u>Corolario 3.7.</u> Los elementos de J son precisamente los $t\delta_x$ con t real positivo y x un elemento de E.

<u>Proposición 3.8.</u> Sea μ y $t\in R$. Se verifica

$$|\mu-t\delta_x| = |\mu| + (|s-t| - |s|)\delta_x$$

siendo $s = \mu(\{x\})$.

En efecto:

Si $x \notin A$ tendremos

$$|\mu - t\delta_x|(A) = \sup_{E_i} \sum |(\mu - t\delta_x)(E_i)| = \sup_{E_i} \sum |\mu(E_i) = |\mu|(A)$$

pues los E_i no contienen el punto x.

Si $x \in A$, podremos tomar el supremo sobre particiones $\{E_i\}$ que definen la $\{x\}$, $\{x\}^c$, de forma que $\{x\} = E_k$ para un cierto índice k. Entonces

$$\begin{aligned} |\mu - t\delta_x|(A) &= \sup_{E_i}\Big(\sum_{i \neq k} |(\mu - t\delta_x)(E_i)| + |(\mu - t\delta_x)\{x\}|\Big) \\ &= \sup_{E_i}\Big(\sum_{i \neq k} |\mu(E_i)| + |s-t| + |\mu(\{x\})| - |s|\Big) \\ &= \sup_{E_i}\Big(\sum_{i \neq k} |\mu(E_i)| + |\mu(\{x\})|\Big) + |s-t| - |s| = |\mu|(A) + |s-t| - |s| \end{aligned}$$

Unificando los dos casos anteriores sale el resultado.

<u>Teorema 3.9.</u> El ortogonal de $t\delta_x$ está formado por las medidas que no cargan sobre el punto x.

En efecto:

Sea $\mu \in (t\delta_x)^{\perp}$. Esto equivale a $|\mu| \wedge t\delta_x = 0$ o bien a $||\mu| - t\delta_x| = |\mu| + t\delta_x$. Pero por la proposición anterior tenemos

$$||\mu| - t\delta_x| = |\mu| + (|s-t| - |s|)\delta_x$$

siendo $s = |\mu|(\{x\})$. Debe ser pues $|s-t| - |s| = t$, de donde $|s - t| = |s| + |t|$.

Si $s > t$, tendremos $t = 0$ contra la hipótesis.

Si $s \leqslant t$, será $t - s = s + t$, de donde $s = 0$, de manera que $\mu(\{x\}) = 0$.

El recíproco es trivial.

Corolario 3.10. El ortogonal $(t\delta_x)^{\perp}$ no depende del valor de t positivo.

En consecuencia todos los elementos de J son contráctiles pues basta poner $\mu_o = t\delta_x$ $\mu_n = t/2^n.\delta_x$ y por tanto

$$D_1 = \{t\delta_x \mid t>0,\ x\in E\} \quad .$$

Como que es evidente que $D_2 = \emptyset$ y por otro lado $[-\delta_x,\delta_x] = \{t\delta_x,\ -1 \leqslant t \leqslant 1,\ t\in R\}$, estamos en condiciones de definir los entornos de 0 en la R-topología de .

Dado t>0 y un elemento de D_1 $t\delta_x$, tenemos que $N(0,t\delta_x)$ es el conjunto de medidas de tales que tienen medida de $\{x\}$ menor o igual que t en módulo. Dados pues $x_1,\ldots,x_k\in E$, y $t_1,\ldots,t_k$ reales positivos, la base de R-entornos de 0 está formada por

$$H(x_1,\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_k) = \bigcap_{i=1}^{k} N(0,t_i\delta_{x_i}) = \{\mu \mid \mu(\{x_i\}) \leqslant t_i \quad i=1,\ldots,k\}$$

Las medidas μ difusas, es decir, las que no cargan en ningún punto de E, son de todo entorno del 0 y en consecuencia no es en general T_1-separado. Sin embargo podemos descomponer en dos factores, en uno de los cuales se "concentra" la topología R.

4. Descomposición reticular del grupo $\mathcal{M}$.

Dada $\mu\in\mathcal{M}$ procederemos a considerar su parte "concentrada" y su parte "difusa". Para ello demostramos el

Lema 4.1. El conjunto $X_\mu = \{x\in E \mid \mu(\{x\}) \neq 0\}$ es numerable.

En efecto:

Basta probarlo para el conjunto

$$\{x\in E \mid \mu(\{x\})>0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid \mu\{(x)\}>1/n\}.$$

Pero a causa de la finitud de μ, cada uno de los conjuntos $\{x|\ \mu(\{x\})>1/$ debe ser finito y por tanto X_μ numerable.

Como consecuencia, y dado que los puntos son medibles en nuestro caso, el conjunto X_{μ_∞} es medible. Si es $X\{= x_1,\dots,x_n,\dots\}$ y $\mu(\{x_i\}) = h_i$, deberá ser $\sum_{i=1}^{\infty} |h_i|<\infty$.

Definamos ahora

$$\mu_c(A) = \mu(A\cap X)=\sum_{x_{i_k}\in A} h_{i_k} \qquad \mu_d = \mu-\mu_c$$

Es evidente que μ_d es una medida difusa y que $|\mu_c|(A)=\sum_{x_{i_k}\in A} |h_{i_k}|$.

Además μ_c es una medida regular pues si

$$X\cap A = \{x_{i_1},\ x_{i_2},\ \dots,\ x_{i_n}\ \dots\}$$

ponemos $X_1 = \{x_{i_1}\}$, $X_2 =\{x_{i_1},x_{i_2}\},\dots$ etc.

y obtenemos una sucesión de cerrados cuyas medidas tienden a $\mu_c(A)$.

Sea C el subgrupo de $\mathcal{M}$ formado por las medidas concentradas y D el formado por las medidas difusas. Se tiene evidentemente el isomorfismo

$$\mathcal{M} = C \times D$$

y se verifica

<u>Proposición 4.2.</u> El isomorfismo de $\mathcal{M}\to C\times D$ es reticular.

En efecto:

Para comprobarlo, basta ver que $|\mu_c|+|\mu_d|=|\mu_c+\mu_d|$ con $\mu_c\in C$ y $\mu_d\in D$. Sea X el conjunto numerable de puntos de medida no nula para μ_c, $X = \{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$. Para calcular valores absolutos de medidas tomaremos particiones que contengan la $\{x_1\}$, $\{x_2\},\dots,\{x_n\}$, $\dots$, X^c. Entonces

$$
\begin{aligned}
|\mu_c + \mu_d|(A) &= \sup_{E_i}\Big(\sum_{E_i\subset X^c}|\mu_c+\mu_d|(E_i) + \sum_{x_{i_k}\in A}|\mu_c+\mu_d|(\{x_{i_k}\})\Big) \\
&= \sup_{E_i}\Big(\sum_{E_i\in X^c}|\mu_d(E_i)| + \sum_{x_{i_k}\in A}|\mu_c(\{x_{i_k}\})|\Big) \\
&= \sup_{E_i}\Big(\sum|\mu_d(E_i)| + \sum|\mu_d(\{x_i\})|\Big) + |\mu_c|(A) \\
&= |\mu_d|(A) + |\mu_c|(A)
\end{aligned}
$$

como se queria demostrar.

Tal como hemos observado anteriormente, la topologia R restringida a D es grosera, pues toda medida difusa está en todo entorno de 0. Queda por ver la restricción de la topología al subgrupo C.

Dada $\mu_c \in C$ podemos definir $f_\mu : E \to R$ dada por $f_\mu(x)=\mu(\{x\})$. De esta forma es evidente que $C \subset R^E$, con morfismo de inclusión reticular. Se verifica

<u>Proposición 4.3.</u> La topología R en C coincide con la inducida por R^E con el orden puntual.

En efecto:

Los entornos de convergencia puntual en R^E vienen dados por elementos $x_1,\ldots,x_k \in E$, $t_1,\ldots,t_k$ reales positivos y

$$H(x_1,\ldots,x_k;t_1,\ldots,t_k)=\{f \mid |f(x_i)| < t_i\}$$

pero estos son justamente los R-entornos en C.

Referencias

[1] BIRKHOFF, G., "Lattice Theory", Am. Math. Soc. Coll. Pu., 1948.

[2] CONRAD, P., "Lattice ordered groups", Tulane Un. Pub., 1970.

[3] RIBEMBOIM, P. , "Théorie des groupes ordonés". Univ. Nacional de Bahie Blanca, 1963.

[4] DUNFORD-SCHWARTZ, "Linear Operators", Part I, Interscience, 1957.

[5] REDFIELD, R., "A topology for lattice ordered groups", Trans. Am. Math. Soc. Vol. 1871, 1974, pp. 103/125.

[6] BATLE, N., GRANÉ, J., "The Redfield Topology on some groups of continous functions", Stochastica, Vol. II, n°. 3, 1977.

[7] BATLE, N., GRANÉ, J., "La topologia R en el grupo reticulado de las funciones de variación acotada". Presentado en las Jornadas Hispano-Lusitanas de Matemáticas, Jaca, 1977, (En curso de publicación).

(*) Departamento de Matemáticas y Estadística.
E.T.S. de Arquitectura
Universidad Politécnica
de Barcelona.

(**) Departamento de Matemáticas.
Facultad de Informática
de Barcelona.