STOCHASTICA, Vol. III nº 2 (1979)

LOGIQUES DISTRIBUTIVES I BOOLEANES

per

Ventura Verdú i Solans

ABSTRACT

Continuing the study of different types of Abstract Logics [5], and following works by Brown-Bloom ([1]) and Brown-Suszko ([2]), we analyze in this paper some logics in wich, if we identify equivalent formulae by means of the consequence operator, we obtain distributive lattices or boolean algebra

RESUM

Continuant l'estudi de diferents tipus de Lògiques Abstractes ([5]) en la línea dels treballs de Brown, D. - Bloom, S.L. ([1]) i Brown, D. - Suszko, R. ([2]), en aquest treball s'analitzen unes lògiques on en identificar fórmules equivalents s'obtenen reticles distributius o bé àlgebres de Boole.

Preliminars

Cal dir que els termes que s'usen en el treball i que no venen definits tot seguit es poden trobar a ([5]).

Sigui $L=(S,C)$ una lògica abstracta, on S poseeix (eventualment) operacions binàries $\wedge$, $\vee$, i una operació monària, $\neg$.

<u>Definició 1.</u> Una base $\mathcal{B}$ de C direm que compleix <u>el principi de la disjunció</u> (P. D.) respecte d'una operació binària, $\vee$, quan per tot $x,y \in S$ i per tot $B \in \mathcal{B}$ es compleix:

$$x \vee y \in B \text{ si, i només si, } x \in B \text{ o bé } y \in B.$$

<u>Definició 2.</u> Una base $\mathcal{B}$ de C direm que compleix <u>el principi de la conjunció</u> (P.C.) respecte de $\wedge$ quan per tot $x,y \in S$ i per tot $B \in \mathcal{B}$ es compleix:

$$x \wedge y \in B \text{ si, i només si, } x \in B \text{ i } y \in B.$$

<u>Definició 3.</u> Una base $\mathcal{B}$ de C direm que compleix <u>el principi fort de no contradicció</u> (P.F.N.C.) respecte de $\neg$, quan per tot $x \in S$ i per tot $B \in \mathcal{B}$ es compleix:

$$B \neq S \text{ implica } x \in B \text{ si, i només si } \neg x \notin B.$$

<u>Definició 4.</u> Direm que C compleix <u>el principi de la disjunció</u> (P.D.) respecte de $\vee$ quan per tot $x,y \in S$ es compleix:

$$C(x) \cap C(y) = C(x \vee y).$$

<u>Definició 5.</u> Direm que C compleix <u>el principi fort de la disjunció</u> (P.F.D.) respecte de $\vee$, quan per tot $x,y \in S$ i per tot $X \leqslant S$ es compleix:

$$C(X,x) \cap C(X,y) = C(X, x \vee y).$$

<u>Definició 6.</u> Direm que C compleix <u>el principi de l'adjunció</u> (P.A.) respecte de $\wedge$ quan per tot $x,y \in S$ es compleix:

$$C(x,y) = C(x \wedge y).$$

Definició 7. Direm que C compleix el principi de la reducció a l'absurd (P.R.A.) respecte de $\neg$ quan per tot $x\in S$ i per tot $X\leqslant S$ es compleix:

$$x\in C(X) \text{ si, i només si, } C(X,\neg x) = S.$$

Teoremes generals.

Teorema 1. Si existeix una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ que compleix el P.D. respecte de v, aleshores l'operador C compleix el P.F.D. respecte de v i els elements de $\mathcal{B}$ son $\mathcal{C}$-irreductibles.

Efectivament:

a. $$C(X,xvy) = \bigcap_{\substack{B\in\mathcal{B}\\ B\geqslant X\cup\{xvy\}}} B = \Big(\bigcap_{\substack{B\in\mathcal{B}\\ B\geqslant X\cup\{x\}}} B\Big) \cap \Big(\bigcap_{\substack{B\in\mathcal{B}\\ B\geqslant X\cup\{y\}}} B\Big) =$$

$$= C(X,x) \cap C(X,y).$$

b. Suposem que $B\in\mathcal{B}$ i que B no és irreductible. Aleshores existeixen $B_1,B_2\in$, $B_1\supsetneq B$, $B_2\supsetneq B$ i $B=B_1 \cap B_2$; per tant existeix $x\in B_1-B$ i existeix $y\in B_2-B$. Tenim que $C(B,x) \cap C(B,y)=C(B,xvy)$, per tant $C(B,xvy)\leqslant B_1\cap B_2= B$, d'on resulta que $xvy\in B$ i per tant $x\in B$ o bé $y\in B$, contradicció.

Teorema 2. Si C ompleix el P.F.D. respecte de v i existeix una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ formada per tancats irreductibles, aleshores compleix el P.D. respecte de v.

Efectivament:

Suposem que $\mathcal{B}$ no compleix el P.D. Sigui $B\in\mathcal{B}$ i suposem que existeixen $x,y\notin B$ i $xvy\in B$. Aleshores com que $C(B,x) \cap C(B,y) = C(B,xvy)=C(B)=B$, tenim que B no és irreductible, contradicció. Si $xvy\notin B$ i en canvi $x\in B$ o bé $y\in B$, aleshores $B\neq C(B,xvy) = C(B,x) \cap C(B,y)=B \cap B=B$, contradicció.

<u>Teorema 3.</u> Si C és finitari, aleshores C compleix el P.F.D. respecte de v si, i només si, existeix una base de $\mathcal{C}$ que compleix el P.D. respecte de v. (*).

Efectivamente:

És un corol.lari dels teoremes 1 i 2 i del fet que si C és finitari, aleshores els tancats irreductibles són una base.

<u>Teorema 4.</u> C compleix el P.A. respecte de $\wedge$ si, i només si, $\mathcal{C}$ compleix el P.C. respecte de $\wedge$.

Efectivamente:

a. Suposem que C compleix el P.A., aleshores per tot $T\in\mathcal{C}$, per tot $x,y\in S$ tenim que $x\wedge y\in T \Leftrightarrow C(x\wedge y)\leqslant T \Leftrightarrow C(x,y)\leqslant T \Leftrightarrow$ $x\in T$ i $y\in T$.

b. Recíprocament: $x\wedge y\in C(x\wedge y)$ implica $x\in C(x\wedge y)$ i $y\in C(x\wedge y)$, per tant $C(x,y)\leqslant C(x\wedge y)$.

$x\in C(x,y)$, $y\in C(x,y)$, per tant $x\wedge y\in C(x,y)$, per tant $C(x\wedge y)\leqslant C(x,y)$.

<u>Teorema 5.</u> Si existeix una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ que compleix el P.F.N.C. respecte de $\neg$, aleshores l'operador C compleix el P.R.A. respecte de $\neg$ i tot $B\in\mathcal{B}$, $B\neq S$, és maximal.

Efectivament:

a. Sigui $B\in\mathcal{B}$, $B\neq S$. Si B no fós maximal, aleshores existiría un $B_1\in\mathcal{B}$, $B_1\neq S$, $B_1\supsetneq B$, per tant existiría un $x\in B_1-B$, d'on resulta que $\neg x\in B$, per tant $\neg x\in B_1$, és a dir x i $\neg x\in B_1$, contradicció.

b1. $x\in C(X)$ implica $C(X,\neg x)=S$.

Efectivament: Sigui $B\in\mathcal{B}$, $B\geqslant X\cup\{\neg x\}$, aleshores $x\in B$, per tant $B=S$.

(*) Aquest teorema està inspirat en un resultat de Torrens, T. ([4])

b2. $C(X, \neg x)=S$ implica $x\in C(X)$.

Efectivament: Sigui $B\in\mathcal{B}$, $B\geqslant X$, aleshores si $B\neq S$ tenim que si $x\notin B$, serà $\neg x\in B$, per tant $B\geqslant X\cup\{\neg x\}$, d'on resulta que $B=S$, contradicció.

Teorema 6. Si C compleix el P.R.A. respecte de $\neg$ i existeix una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ formada per tancats maximals, aleshores $\mathcal{B}$ compleix el P.F.N.C. respecte de $\neg$.

Efectivament:

Sigui $B\in\mathcal{B}$, $B\neq S$. Si $x\in B$, aleshores $C(B, \neg x)=S$, per tant $\neg x\notin B$. Si $\neg x\notin B$, aleshores com que B és maximal, tenim que $C(B, \neg x)=S$, per tant $x\in C(B)=B$.

Teorema 7. Si la lògica $L=(S,C)$ compleix:

1. Existeix un $x_o\in S$ tal que $C(x_o)=S$,
2. C compleix el P.R.A. respecte de $\neg$,
3. C és finitari,

aleshores $\mathcal{C}$ té una base formada per tancats maximals (o, equivalentment, els tancats maximals són una base).

Efectivament:

Demostrem primerament que per tot $T\in\mathcal{C}$, $T\neq S$, existeix un $M\in\mathcal{C}$, M maximal, tal que $T\leqslant M$.

Efect: Sigui $\mathcal{A}_t=\{T'\in\mathcal{C}: S\neq T' \text{ i } T'\geqslant T\}$. Aquesta família és inductiva superiorment doncs si $T_i\in\mathcal{A}_t$, $i\in I$, és una cadena aleshores $\bigcup_{i\in I} T_i\in\mathcal{C}$ ja que C és finitari. Si fós $\bigcup_{i\in T} T_i = S$, aleshores existiría un $i\in I$ tal que $x_o\in T_i$, per tant $T_i=S$, contradicció. Per tant, pel lema de Zorn, tenim que $\mathcal{A}_t$ posseeix elements maximals. Aquests maximals són, evidentment, maximals en $\mathcal{C}$, per tant tot $T\in\mathcal{C}$ està contingut en algún tancat maximal.

Sigui $T\in C$ i sigui $\{M_i\}_{i\in T}$ la família de tancats maximals que contenen a T. Volem demostrar que $T=\bigcap_{i\in I} M_i$.

És clar que $T\leqslant \bigcap_{i\in I} M_i$. D'altra banda si $x\in C\bigcap_{i\in I} M_i$, aleshores considerem $T' = C(T,\neg x)$. Si $T' = S$, aleshores pel P.R.A. tenim que $x\in C(T)=T$. Si $T'\neq S$, aleshores existeix un $M\in$, maximal, tal que $M\geqslant C(T,\neg x)$. Com que $M\geqslant T$ tenim, per hipòtesi, que $x\in M$; d'altra banda $\neg x\in M$, per tant $M=S$, contradicció. D'on resulta que $T'= S$ i per tant $x\in T$.

<u>Nota.</u> El recíproc d'aquest teorema no és, en general, cert. Efectivament: Si S és una àlgebra d'Abbott (o d'implicació) i C és la família dels sistemes deductius, aleshores es compleix que els sistemes deductius maximals són una base i, en canvi no existeix, en general, un element $x\in S$ tal que $C(x)=S$.

<u>Teorema 8.</u> Si C compleix el P.R.A. respecte de $\neg$ i el P.F.D. respecte de v, aleshores C compleix el P.A. respecte de l'operació $x\wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$ i existeix un $x_o\in S$ tal que $C(x_o)=S$.

Efectivament:

a. $\neg(\neg x \vee \neg y)\in C(x,y) \Leftrightarrow C(x,y,\neg x\vee\neg y)=S$ (tenir en compte que $C(\neg(\neg x))=C(x)$, per tot $x\in S$). Com que

$$C(x,y,\neg x\vee\neg y)=C(x,y,\neg x)\cap C(x,y,\neg y)=S\cap S = S,$$

tenim que $C(x\wedge y)\leqslant C(x,y)$.

b. $x\in C(\neg(\neg x\vee\neg y)) \Leftrightarrow C(\neg(\neg x\vee\neg y),\neg x) = S$. Sigui $T=C(\neg(\neg x\vee\neg y),\neg x)$. Tenim que $C(\neg x)\leqslant T$, per tant $C(\neg x)\cap C(\neg y)=C(\neg x\vee\neg y)\leqslant T$, per tant $\neg x\vee\neg y\in T$. D'altra banda $\neg(\neg x\vee\neg y)\in T$, per tant $T=S$.

c. Sigui $x\in S$. Considerem $x_o= x\wedge\neg x$, aleshores $C(x_o)=C(x\wedge\neg x)=$ $=C(s,\neg x)=S'$

<u>Teorema 9.</u> Si existeix una operació monària $\neg$ en S i una base B de C que compleix el P.F.N.C. respecte de $\neg$, aleshores existeix una operació binària v en S i B compleix e. P.D. res-

pecte de v si, i només si, existeix una operació binària $\wedge$ i compleix el P.A. respecte de $\wedge$.

Efectivament:

a. Suposem que B compleix el P.A., aleshores definim $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$. Tenim que per tot $B \in B$, $B \neq S$; i per tot $x, y \in S$, $x \vee y \in B \Leftrightarrow \neg x \wedge \neg y \notin B \Leftrightarrow \neg x \notin B$ o bé $\neg y \notin B \Leftrightarrow x \in B$ o $y \in B$.

b. Suposem que compleix el P.D., aleshores definim $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$. Tenim que $x \wedge y \in B \Leftrightarrow \neg x \vee \neg y \notin B \Leftrightarrow \neg x \notin B$ i $\neg y \notin B \Leftrightarrow x \in B$ i $y \in B$.

Lògiques distributives i Booleanes.

<u>Definició 8.</u> Direm que una lògica $L_1 = (S_1, C_1)$ és distributiva quan existeix una lògica $L_2 = (S_2, C_2)$, on $(S_2, \wedge, \vee)$ és un reticle distributiu, existeix una base de C_2 formada per filtres primers i existeix un morfisme bilògic entre L_1 i L_2.

<u>Teorema 10.</u> Si $L = (S, C)$ és una lògica, aleshores són equivalents:

1. L és distributiva,
2. Existeixen dues operacions binàries $\wedge, \vee$, en S, i una base B de C que compleix el P.C. respecte de $\wedge$ i el P.D. respecte de v.
3. Existeixen dues operacions binàries $\wedge, \vee$ en S, i l'operador C compleix el P.A. respecte de $\wedge$, el P.F.D. respecte de v i existeix una base B de C formada per tancats irreductibles.

Efectivament:

L'equivalència entre les condicions 3 i 2 és una conseqüència immediata dels teoremes 1,2 i 4.

3 implica 1:

Com que es compleix el P.A. i el P.F.D. tenim que (vegi's [5]; teoremes I.2.1 i I.2.2) el conjunt ordenat quocient per la relació d'equivalència usual, $(\bar{S},\leqslant)$, és un reticle. Com que C té una base B (condició 2) que compleix el P.D. i el P.C., tenim que $\bar{C}$ té una base formada per filtres primers. D'altra banda per tot $x,y\in\bar{S}$ $x\neq y$ implica $C(x)\neq C(y)$, per tant existeix un filtre primer que conté a un i no a l'altre, d'on resulta que $\bar{S}$ és un reticle distributiu.

Finalment, el morfisme bilògic desitjat és la projecció canònica de S en $\bar{S}$.

1 implica 2:

Notem per h el citat morfisme bilògic i per B_2 la base de C_2. Aleshores la família $B_1=\{h^{-1}(B)\}_{B\in B_2}$ és una base de C_1. Com que la família B_2 compleix el P.D . i el P.C., resulta, per les propietats dels morfismes bilògics, que B_1 també les compleix respecte de les operacions següents: per tot $x,y\in S_1$, definim $x\wedge y$ escollint un element en $h^{-1}(h(x)\wedge h(y))$ i $x\vee y$ escollint un element en $h^{-1}(h(x)\vee h(y))$.

<u>Definició 9.</u> Direm que una lògica L_1 és distributiva finitària si existeix una lògica $L_2=(S_2,C_2)$, on S_2 és un reticle distributiu, C_2 és la família dels filtres reticulars de S_2 i existeix un morfisme bilògic de L_1 en L_2.

<u>Teorema 11.</u> Sigui L=(S,C) una lògica. Aleshores són equivalents:

1. L és distributiva finitària,
2. Existeixen dues operacions $\wedge,\vee$ en S, C compleix el P.A. respecte de $\wedge$, el P.F.D. respecte de $\vee$ i és finitari,
3. Existeixen dues operacions binàries $\wedge,\vee$ en S, una base B de C que compleix el P.C. respecte de $\wedge$, el P.D . respecte de $\vee$ i C és finitari.

Efectivament:

L'equivalència entre les condicions 2 i 3 és conseqüència del teorema 10 i del fet que si C és finitari, aleshores els tancats irreductibles formen una base.

3 implica 1:

Com que els tancats irreductibles són una base, tenim (pel teorema 10) que existeix una lògica $L'=(S',C')$ on S' és un reticle distributiu, $\mathcal{C}'$ té una base formada per filtres primers i un morfism bilògic entre L i L'. Per [5], teorema II.2.1, $\mathcal{C}'$ són tots els filtres reticulars.

1 implica 2:

Com que en un reticle distributiu la família dels filtres primers són una base del sistema clausura dels filtres, tenim (pel teorema 10) que C compleix el P.A. i el P.F.D. D'altra banda pel corol.lari 5 del teorema I.4.3, tenim que C és finitari.

<u>Definició 10.</u> Direm que una lògica $L_1=(S_1,C_1)$ és booleana si existeix una lògica $L_2=(S_2,C_2)$, on S_2 és una àlgebra de Boole existeix una base de $\mathcal{C}_2$ formada per filtres primers i existeix un morfisme bilògic entre L_1 i L_2.

<u>Teorema 12.</u> Sigui $L=(S,C)$ una lògica. Aleshores són equivalents:

1. L és booleana.
2. Existeixen operacions $\vee, \neg$ en S i una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ que compleix el P.D respecte de $\vee$ i el P.F.N.C. respecte de $\neg$.
3. Existeixen operacions $\wedge$, $\neg$ en S i una base de $\mathcal{C}$ que compleix el P.C. respecte de $\wedge$ i el P.F.N.C. respecte de $\neg$.
4. Existeixen operacions $\vee$, $\neg$ en S, C compleix el P.F.D. respecte de $\vee$, el P.R.A. respecte de $\neg$ i existeix una base de $\mathcal{C}$ formada per tancats maximals.
5. Existeixen operacions $\wedge$, $\neg$ en S, C compleix el P.A. respecte de $\wedge$, el P.R.A. respecte de $\neg$ i existeix una base de $\mathcal{C}$ formada per tancats maximals.

Efectivament:

L'equivalència entre les condicions 2 i 3 és el teorema 9.

2. implica 4:

És una conseqüència immediata del teorema 5 i del teorema 1.

4 implica 2:

És una conseqüència immediata del teorema 6, del fet de que tot maximal és irreductible i del teorema 2.

3 implica 5:

És una conseqüència immediata del teorema 5 i del teorema 4.

5 implica 3:

És una conseqüència dels teoremes 4 i 6.

1 implica 2:

Notem per $L'=(S',C')$ la lògica per la que existeix el morfisme bilògic citat a la hipòtesi 1. Si $\mathcal{B}'$ és la base de $\mathcal{C}'$, tenim que tot $B\in\mathcal{B}'$, $B\neq S'$, és maximal, per tant per tot $x\in S'$ i per tot $B\in\mathcal{B}'$, $B\neq S'$ es compleix: $x\in B$ si, i només si, $\neg x\notin B$.

Per tot $x\in S$ definim $\neg x$ escollint un element a $h^{-1}(h(x))$. Aleshores la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}=\{h^{-1}(B')\}_{B'\in\mathcal{B}'}$ compleix el P.F.N.C. respecte de $\neg$ i, pel teorema 10, compleix el P.D . respecte de v.

2 implica 1:

Tenim que $\mathcal{B}$ compleix el P.C. respecte de $x\wedge y=\neg(\neg x\vee\neg y)$, per tant, pel teorema 10, existeix una lògica $L'=(S',C')$, on S' és un reticle distributiu, existeix una base de $\mathcal{C}'$ formada per filtres primers i existeix un morfisme bilògic entre L i L'. D'altra banda com que C compleix el P.R.A. tenim que si h és el ja citat morfisme bilògic, si per tot $h(x)\in S'$ definim $\neg h(x)=h(\neg x)$, resulta que C' compleix el P.R.A. respecte de $\neg$. D'això, del teorema II.5.3 de [5], del P.D . i del P.A. deduïm que S' és una àlgebra de Boole.

<u>Definició 11.</u> Direm que una lògica $L_1=(S_1,C_1)$ és finitària de Boole si existeix una lògica $L_2=(S_2,C_2)$, on S_2 és una àlgebra de Boole, $\mathcal{C}_2$ és la família de filtres reticulars de S_2 i existeis un morfisme bilògic entre L_1 i L_2.

Teorema 13. Sigui L=(S,C) una lògica. Aleshores són equivalents:

1. L és finitària de Boole,
2. Existeixen operacions $\vee, \neg$ en S, una base B de C que compleix el P.D . respecte de $\vee$, el P.F.N.C. respecte de $\neg$ i C és finitari.
3. Existeixen operacions $\wedge, \neg$ en S, una base B de C que compleix el P.C. respecte de $\wedge$, el P.F.N.C. respecte de $\neg$ i C és finitari.
4. Existeixen operacions $\vee$, $\neg$ en S, C compleix el P.F.D. respecte de $\vee$, el P.R.A. respecte de $\neg$ i és finitari.
5. Existeixen operacions $\wedge$, $\neg$ en S, C compleix el P.A. respecte de $\wedge$, el P.R.A. respecte de $\neg$ i és finitari.

Efectivament:

Pel teorema 11 tenim que les condicions 2 i 3 són equivalents.

Pel teorema 8 tenim que la condició 4 implica la 5.

5 implica 4:

Efectivament: Pel fet que si C compleix el P.A., aleshores es compleix la condició 1 del teorema 7i pel teorema 7, tenim que existeix una base de C formada per tancats maximals. Aquesta base compleix el P.C. i el P.F.N.C., per tant pel teorema 12 tenim que C compleix el P.F.D.

3 implica 5:

Efectivament: És una conseqüència immediata dels teoremes 4 i 5.

5 implica 3:

Efectivament: Ho hem demostrat en "5 implica 4".

1 implica 5:

Efectivament: Si L és finitària de Boole, aleshores L és booleana i és distributiva finitària, per tant pels teoremes 11 i 12 tenim que es compleix la condició 5.

5 implica 1:

Efectivament: Com que C compleix el PA., el P.F.D. i el P.R.A. resulta que el conjunt ordenat quocient és una àlgebra de Boole. Del P.A. i de la finitarietat de C es dedueix que la família de tancats del quocient és la dels filtres reticulars. El morfisme bilògic desitjat és la projecció canònica.

Bibliografia.

[1] BROWN, D.- BLOOM, S.L.: "Classical Abstract Logics", Dissertationes Mathematicae, CII, pgs. 43-44, Warszawa, 1973.

[2] BROWN, D.- SUSZKO, R.: "Abstract Logics", Dissert. Math., CII, pgs. 9-40, Warszawa, 1973.

[3] RASIOWA, H.: "An algebraic approach to non-classical logics". North-Holland, 1974.

[4] TORRENS, TORRELL, A.: Treballs previs a la redacció de la tesi doctoral, 1978.

[5] VERDU SOLANS, B.: "Contribucio a l'estudi de certs tipus de lògiques abstractes". Tesi Doctoral, Barcelona, 1978.

Universitat de Barcelona.
Facultat de Matemàtiques.
Dp. d'Estadística Matemàtica.