STOCHASTICA, Vol. III nº 2 (1979)

CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LOS ANILLOS RETICULADOS Y f-ANILLOS.

por

Joan Trias Pairó

ABSTRACT

This paper deals with ordered rings and f-rings. Some relations between classes of ideals are obtained. The idea of subunity allows us to study the possibility of embedding the ring in a unitary f-ring. The Boolean algebras of idempotents and lattice-isometries in an f-ring are studied. We give geometric characterizations of the l-isometries and obtain, in the projectable case, that the Stone space of the Boolean algebra of l-isometries is homeomorphic to the space of minimal prime ideals with the hull-kernel topology. We also apply some results to a certain f-ring of Hermitian operators of a Hilbert space.

Se procurará mantener la terminología y notaciones de [1] y [13]. Un f-anillo $(A,+,\cdot,\leqslant)$ es un anillo reticulado que satisface: $a\geqslant 0$, $x\wedge y=0 \Rightarrow ax\wedge y=xa\wedge y=0$. Supondremos que A no es el anillo nulo. Las nociones de ideal y de ideal primo se entenderán en sentido de anillo, salvo que se explicite que es en sentido reticular o de álgebra de Boole. El conjunto de los ideales sólidos primos será P. Un ideal I es r-primo si $x\wedge y\in I \Rightarrow x\in I$ ó $y\in I$, y el conjunto de los ideales r-primos que son sólidos y propios se indicará por P_r. Se abreviarán las referencias a resultados anteriores mediante expresiones de significado evidente: T.1 (§1.1), P.3 (§3.1), L.2 (§3.1) y C.3 (§2.2).

1. Conjuntos de ideales en los f-anillos.

§1.1. Una identidad en f-anillos.

Si A es un f-anillo y $ab=ba$, entonces [14] $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$. En particular la anterior descomposición es válida en todo f-anillo conmutativo y no es cierta en general para anillos reticulados cualesquiera. Caracterizamos a continuación los anillos reticulados que la satisfacen.

Proposición 1. Condición necesaria y suficiente para que un anillo reticulado satisfaga $ab=(a\vee b)(a\wedge b), \forall a,b$, es que sea conmutativo y que $x^+ x^- = 0$, $\forall x$.

En efecto: la condición es necesaria, pues, por una parte, de $ab-ba=(a\vee b)(a\wedge b)-(b\vee a)(b\wedge a)=0$ se deriva la conmutatividad, y por otra, de $x^+ x^- =(x^+\vee x^-)(x^+\wedge x^-)$ se obtiene $x^+ x^-= 0$. Es tambiém suficiente, como se deduce del cálculo que sigue, cálculo en el que la conmutatividad es esencial: $(a\vee b)(a\wedge b)=(a+(b-a)^+)(b-(b-a)^+)=ab-(b-a)^+(b-a)^- =ab$.

El hecho de satisfacer la identidad $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$. no es suficiente para que el anillo reticulado sea f-anillo, pues basta considerar el anillo $A=R\times R$, con la suma y el orden puntuales, y con el producto $(a,b)(c,d)=(0,ac)$.

Nótese que en el ejemplo anterior $A=N(A)$, conjunto de los nilpotentes de A. Como se verá seguidamente, el hecho de que $N(A)\neq 0$ es un posible obstáculo para que A sea f-anillo:

Proposición 2. Todo anillo reticulado sin nilpotentes en el que se cumple la identidad $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$ es un f-anillo.

En efecto: Puesto que por P.1 el anillo es conmutativo, podemos limitarnos a probar que si $x\wedge y=0$, $z\geqslant 0$, entonces $zx\wedge y=0$. Por la hipótesis y por la positividad de x,y,z, resulta que $0\leqslant (zx\wedge y)^2\leqslant (zx\wedge y)(zx\vee y)=zxy=z(x\vee y)(x\wedge y)=0$, y en consecuencia $zx\wedge y=0$, pues el anillo carece de nilpotencia.

Deducimos de lo anterior la siguiente

<u>Proposición 3.</u> En un anillo reticulado que satisface la identidad $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$, todo ideal primo es r-primo.

Si en el anillo no se cumple que $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$, $\forall a,b$, entonces ya no es posible asegurar el resultado anterior: considérese $A=R\times R$, con la suma y el producto puntuales, ordenado por el cono positivo $A^+=\{(x,y)\,|\,x\geqslant y\geqslant 0\}$. Se tiene así un anillo reticulado que no satisface $xy=(x\vee y)(x\wedge y)$, $\forall x,y$. Obsérvese que si $I=\{(0,x)\,|\,x\in R\}$, entonces $I\in P$ y en cambio $I\notin P_r$.

Si el anillo es conmutativo pero no es cierto que $x^+x^-=0,\forall x$, entonces se tiene en general que $(a\vee b)(a\wedge b)\leqslant ab$ (según la demostración de P.1). De esta observación se deriva:

<u>Corolario 1.</u> En un anillo reticulado, todo ideal primo que es ideal dual de retículo es r-primo.

Seguidamente se obtienen algunas consecuencias de la identidad que nos ocupa para ciertos conjuntos de operadores hermíticos: sea H un espacio de Hilbert, con producto escalar $(x|y)$, y $(\mathcal{H},\leqslant)$ el espacio vectorial real de los operadores lineales hermíticos y acotados, ordenado por la relación $A\geqslant 0$ si y sólo si $(Ax|x)\geqslant 0,\forall x\in H$. Sea $\mathcal{D}\subset\mathcal{H},\mathcal{D}\neq\emptyset$, un conjunto de operadores que conmutan entre sí y sea $\mathcal{C}''(\mathcal{D})$ su doble conmutador [13]. En el resto del trabajo se mantendrán estas mismas notaciones y las de [13].

$\mathcal{C}''(\mathcal{D})$ es un f-anillo sin nilpotentes (conmutativo y unitario) puesto que $|A|\wedge|B|=0$ si y sólo si $AB=0$.

<u>Proposición 4.</u> Si $A,B\in\mathcal{H}^+$ y $AB=BA$, entonces existe una descomposición $AB=C_1C_2$, con $C_1,C_2\in\mathcal{H}^+$, C_1,C_2 <u>comparables entre sí</u> y <u>con A y B</u>, y tales que $\|C_1\|=\max(\|A\|,\|B\|)$, $\|C_2\|\leqslant\min(\|A\|,\|B\|)$. En particular, para todo $A\in\mathcal{H}^+$, existe una descomposición $A=A_1A_2$, con $A_2\leqslant A\leqslant A_1$ y $\|A_1\|=\max(1,\|A\|)$, $\|A_2\|\leqslant\min(1,\|A\|)$.

En efecto: En el f-anillo conmutativo $\mathcal{C}''(\{A,B\})$ se tiene que $AB=(A\vee B)(A\wedge B)$. Es suficiente ahora escoger $C_1=A\vee B$ y $C_2=A\wedge B$.

De $A\wedge B \leqslant A$, $A\wedge B \leqslant B$ y de la positividad de A,B se obtiene que $\|C_2\| \leqslant \|A\|$, $\|C_2\| \leqslant \|B\|$. Por otro lado, $\mathcal{C}''(\{A,B\})$ es un espacio abstracto L_∞[13] y en consecuencia $\|C_2\|=\max(\|A\|,\|B\|)$. La segunda parte resulta de la primera teniendo en cuenta que $A=(A\vee I)(A\wedge I)$ en $\mathcal{C}''(\{A\})$, siendo I el operador identidad.

§1.2. Ideales sólidos maximales y semimaximales.

Ciertos aspectos de las teorías de anillos reticulados y de anillos abstractos pueden ser completamente divergentes: en el f-anillo de los enteros, con las operaciones y la ordenación habituales, ningún ideal maximal es ideal sólido maximal y existen ideales sólidos maximales que no son maximales en sentido de anillo. No obstante, existen paralelismos notables:

Proposición 1. En un f-anillo A conmutativo y unitario todo ideal sólido maximal es primo.

En efecto: Si I es un ideal sólido maximal y $a\notin I$, $b\notin I$, entonces para todo x de A existen $\alpha\in A$ y $i\in I$ tales que $|x| \leqslant |i|+|\alpha\|$ y para este α se tiene que $|\alpha| \leqslant |i'|+|\beta\|b|$ con $i'\in I$ y $\beta\in A$ adecuados. Siendo A un d-anillo, resulta en conclusión que $ab\notin I$.

Indicamos por $SM(a)$, $a\neq 0$, el conjunto de ideales semimaximales [1] respecto de a. En un f-anillo es $SM(a)\subset \mathcal{P}_r$, $\forall a\neq 0$ [1]. De hecho, esta propiedad caracteriza a los f-anillos:

Proposición 2. Condición necesaria y suficiente para que un anillo reticulado sea un f-anillo es que todo ideal semimaximal sea r-primo.

Demostración: Sólo hay que probar la suficiencia. Supóngase que $x\wedge y=0$, y $c\geqslant 0$. Si fuera $cx\wedge y>0$, entonces $SM(cx\wedge y)\neq\emptyset$. Sea $I\in SM(cx\wedge y)$. Por hipótesis $I\in\mathcal{P}_r$ y por tanto, de $x\wedge y=0$ se deriva que $cx\in I$ ó $y\in I$. Si fuera $cx\in I$, de $0\leqslant cx\wedge y\leqslant cx$ y de la convexidad de I llegaríamos a que $cx\wedge y\in I$; si fuera $y\in I$ se obtendría la misma contradicción, lo que demuestra que $cx\wedge y=0$. Análogamente se prueba que $xc\wedge y=0$.

A continuación se caracterizan los ideales <u>semimaximales</u> que son <u>primos</u> en los d-anillos:

<u>Proposición 3.</u> Si A es un d-anillo conmutativo, $a\neq 0$ y $I\in SM(a)$, entonces I es primo si y sólo si $a^2\notin I$.

En efecto: Supongamos que $I\notin P$ y sean entonces x,y tales que $x\notin I$, $y\notin I$ y $xy\in I$. Dado que $I\in SM(a)$, debe de ser $|a|\leqslant |i|+|\alpha||x|+n|x|$ y $|a|\leqslant |i'|+|\alpha'||y|+n'|y|$, para ciertos $i,i'\in I$, $\alpha,\alpha'\in A$, n, n' naturales. De ambas desigualdades, siendo I sólido y A d-anillo se obtiene que $a^2\in I$, pues $xy\in I$. El recíproco es inmediato.

El resultado anterior permite obtener una condición suficiente, <u>en términos del grupo ordenado</u>, para que no haya nilpotentes en el anillo, así como un resultado de estructura para cierto tipo de f-anillos:

<u>Proposición 4.</u> Los f-anillos conmutativos unitarios en los que todo positivo es unidad fuerte [1] carecen de nilpotentes y, consecuentemente, son productos subdirectos de dominios de integridad totalmente ordenados.

Demostración: Puesto que el nilradical, N(A), es sólido y [12] $N(A)=\cap\{J|J\in P\}$, bastará con demostrar que toda unidad fuerte <u>a</u>, $a>0$, pertenece al complementario de algún $P\in P$. Si $I\in SM(a)$, por P.3 (§1.2) será suficiente probar que $a^2\notin I$, para lo cual veremos que a^2 es también una unidad fuerte. Para todo $x\in A$, $x\neq 0$, existe $n\in N$ tal que $0<|x|<na$; por la existencia de unidad y por ser <u>a</u> unidad fuerte se tiene que $0<|x|\leqslant m\, a^2$, para algún $m\in N$, como se quería ver. La segunda parte se deriva de que los f-anillos sin nilpotentes se caracterizan por ser productos subdirectos de anillos íntegros totalmente ordenados [12].

El recíproco de la proposición anterior no es cierto en general. Para ello es suficiente considerar el f-anillo de las funciones contínuas reales sobre un compacto, con las operaciones y el orden puntuales, o el de las funciones reales contínuas y acotadas definidas sobre un espacio topológico cualquiera.

§ 1.3. Ideales sólidos primos y r-primos.

No todo ideal sólido r-primo es primo: considérese el f-anillò de las funciones contînuas reales definidas en R, C(R), y sea $f\in C(R)$, $f\geqslant 0$, tal que $f(x_o)=0$ para algún $x_o\in R$ y sea no nula en un entorno de x_o (salvo x_o). Sea I maximal en el conjunto de los ideales sólidos que no contienen a f y contienen a f^2. Entonces $I\in SM(f)$ y por tanto $I\in P_r$, y en cambio $I\notin P$, en virtud de P.3 (§ 1.2). Nótese que por P.1 (§ 1.2) I es un semimaximal que no es sólido maximal.

En este apartado se trata el problema de dar condiciones para que un ideal de P_r sea de P, en términos del radical del ideal. Para ello, se tiene en primer lugar:

Lema 1. Si A es un f-anillo conmutativo y unitario, e I es ideal sólido, entonces el radical de I es la intersección de los ideales sólidos primos que lo contienen.

Proposición 1. Si A es un f-anillo unitario y conmutativo y $I\in P_r$, entonces se tiene que $I\in P$ si y sólo si $I=\mathrm{rad}I$.

En efecto: Sólo hay que probar que $\mathrm{rad}I=I \Rightarrow I\in P$. Sean x,y tales que $x\notin I, y\notin I$. Por hipótesis y por el lema anterior existen $P\in P$, $P'\in P$ tales que $P\supset I$, $P'\supset I$, y $x\notin P$ y $y\notin P'$. Dado que el conjunto de ideales sólidos que contienen a un r-primo está totalmente ordenado por inclusión, resulta que P y P' son comparables, y se puede suponer que $P\subset P'$. En tal caso, $xy\notin P$, de donde $xy\notin I$.

De la proposición anterior se deriva inmediatamente:

Corolario 1. En un anillo unitario conmutativo, si un ideal radical no es primo tampoco puede ser sólido r-primo respecto de ningún orden que convierta al anillo en f-anillo.

2. Superunidades y Subunidades.

Recuérdese [10] que un elemento $u\neq 0$ de un anillo reticulado A es una superunidad si $|x|u \geq |x|$ y $u|x| \geq |x|$, para todo $x\in A$. Introducimos en esta sección la noción de subunidad:

Definición 1. Si A es un anillo reticulado y $s\in A$, diremos que: s es una subunidad si $0 < s|x| \leq |x|$ y $0 < |x|s \leq |x|$, $\forall x\in A$, $x\neq 0$.

Veamos un ejemplo de f-anillo sin unidad y con subunidades:

Ejemplo 1. El conjunto $A=\{f\in C([0,1]) \mid f(\frac{1}{2})=0\}$ con las operaciones y el orden puntuales es un f-anillo no unitario que contiene infinitas subunidades.

§2.1. Propiedades de las superunidades y de las subunidades.

Nótese que de las definiciones anteriores sólo puede afirmarse la no negatividad. Como se verá a continuación en ciertos casos puede asegurarse la positividad.

Reunimos en la siguiente proposición algunos resultados referidos a superunidades y subunidades:

Proposición 1. a) En los d-anillos toda superunidad es positiva. Si además $x^2 \geq 0$, $\forall x$, entonces toda subunidad es positiva.

b) Todo d-anillo con superunidad ó con subunidad es f-anillo.

c) Si un anillo reticulado tiene una superunidad, entonces tiene infinitas.

d) En un f-anillo con superunidad u se cumple: (i) si x es divisor de cero, entonces $x \not\geq u$. (ii) si el anillo es conmutativo y $x\neq 0$, entonces x es divisor de cero si y sólo si lo es $x\wedge u$.

e) En un f-anillo unitario A se verifica, para $z>0$:

i) Si $N(A)=0$ y z no es divisor de cero y es del centro del anillo, entonces puede expresarse como producto de una superunidad y una subunidad.

ii) Si $z=s_z.u_z$, con s_z subunidad y u_z superunidad, entonces $z\wedge 1$ es una subunidad y $s_z \leq z\wedge 1 \leq z \leq z\vee 1 \leq u_z$. es decir, $z\wedge 1$ y $z\vee 1$

son, respectivamente, la máxima subunidad y la mínima superunidad mediante las que z puede expresarse como producto de una subunidad y una superunidad.

En efecto: a) Si $\underline{u}$ es una superunidad y $x \geqslant 0$, tenemos que $u^- x=0$, de donde en particular $(u^-)^2=0$. Por otro lado $uu^- \geqslant 0$, o sea $u^+u^- \geqslant u^-$. Ahora bien, puede probarse que $u^+u^-=0$, con lo que $u \geqslant 0$. En el segundo caso, sea $\underline{s}$ una subunidad, y supongamos que $s^- > 0$. Entonces $s^+s^- - (s^-)^2 > 0$ (*). Por hipótesis es $(s^2)^-=0$, es decir, $s^+s^- + s^-s^+=0$, pues estamos en un d-anillo. Sustituyendo $s^+s^-=0$ en (*) se llega al absurdo. Luego $s \geqslant 0$.

b) En ambos casos la demostración es análoga, teniendo en cuenta que en los d-anillos, si $x \geqslant 0$ y $a \wedge b=0$, entonces $a \wedge xb$ es un anulador del anillo por la derecha y $a \wedge bx$ lo es por la izquierda [1].

c) Es consecuencia de que todo grupo reticulado carece de máximo.

d) y e) Los enunciados no inmediatos se demuestran utilizando la descomposición $ab=(a \vee b)(a \wedge b)$.

§2.2. Inmersión en un f-anillo unitario.

Sea A un f-anillo conmutativo con subunidad $\underline{s}$ y sea S_o el conjunto de los no divisores de cero. Claramente $S_o \neq \emptyset$. Denotamos por $(S_oA,+,\cdot,\leqslant)$ el f-anillo total de cocientes, asociado a S_o, ordenado por el cono $P=\{a/s \mid as \geqslant 0\}$([15]). Se indica este orden por $\leqslant$. No hay ninguna dificultad en considerar la misma construcción en el caso superunitario.

Proposición 1. a) Todo f-anillo conmutativo A con subunidad $\underline{s}$ se inyecta como sub-f-anillo en el f-anillo $(S_oA,+,\cdot,\leqslant)$, con unidad s/s. Además, si A es ideal dual del retículo $(S_oA,\leqslant)$, entonces A es unitario.

b) Todo f-anillo conmutativo A con superunidad $\underline{u}$ se inyecta como sub-f-anillo del f-anillo $(S_oA,+,\cdot,\leqslant)$, con unidad u/u. Si A es convexo en S_oA, entonces A tiene unidad.

Demostración: a) La aplicación $i_s: A \to S_oA$, $i_s(a)=(as)/s$ es un morfismo de anillos reticulados inyectivo, con lo que se prueba que $i_s(A)$ es un sub-f-anillo de $(S_oA,+,\cdot,\leqslant)$. En cuanto a la segunda parte: el elemento $\frac{s^2}{s}$ es de $i_s(A)$ y por tanto, de $\frac{s^2}{s}\leqslant \sup\{\frac{s^2}{s}, \frac{s}{s}\} = p$ se deduce por hipótesis que $p\in i_s(A)$. Veamos que p es unidad multiplicativa de $i_s(A)$ (y en consecuencia A es unitario): sea $z\in i_s(A)^+$ y sea $x_z\in A$ tal que $z=\frac{x_z s}{s}$. Por ser $z\geqslant 0$ y $s^2\in S_o$, es $x_z s\geqslant 0$, de donde $x_z\geqslant 0$, pues $s\in S_o$. Ahora bien, $x_z \vee sx_z = x_z$ y por tanto, teniendo en cuenta que todo f-anillo es d-anillo y que $s>0$ (P.1 (b), § 2.1), se cumple:

$$pz = \sup\{\frac{x_z s^2}{s^2}, \frac{x_z s^3}{s^2}\} = \frac{(x_z \vee x_z s)s}{s} = \frac{x_z s}{s} = z.$$

Si z es arbitrario, se aplica este resultado a z^+ y z^- y con esto se completa la demostración.

c) Basta considerar la aplicación $i_u(a)=\frac{au}{u}$. En cuanto al resto, la demostración es similar a la del apartado a).

3. El Algebra de Boole de los idempotentes de un f-anillo.

(En toda esta sección se supondrá que A es un f-anillo unitario, con unidad 1.)

§ 3.1. Componentes de la unidad.

En primer lugar se establece una caracterización reticular de los idempotentes:

Lema 1. Los idempotentes de un f-anillo unitario son las componentes de la unidad es decir: $e^2 = e$ si y sólo si $e\wedge(1-e)=0$.

En efecto: Es consecuencia de que el anillo es un producto subdirecto de anillos totalmente ordenados y de que un anillo unitario totalmente ordenado no contiene idempotentes no triviales[1].

De esta caracterización y de las propiedades de las componentes de la unidad en un anillo reticulado [2] se deriva el siguiente resultado:

<u>Proposición 1.</u> El conjunto de los idempotentes, Id(A), con el <u>orden del anillo</u>, es un álgebra de Boole con mínimo 0, máximo 1 y el ortocomplemento de <u>e</u> es 1-e. Además, si el supremo de un conjunto de idempotentes existe en A, también existe en Id(A) y ambos coinciden, y análogamente para ínfimos.

Este álgebra de Boole se indicará por $(\mathrm{Id}(A),\vee,\wedge,0,1)$. De esta proposición se deduce:

<u>Corolario 1.</u> Si A es <u>Dedekind-completo</u> (vid. [13]), entonces $(\mathrm{Id}(A),\vee,\wedge,0,1)$ es un álgebra de Boole <u>completa</u>. Si $\emptyset\neq B\subset \mathrm{Id}(A)$ entonces existen $\sup_A B$ y $\sup_{\mathrm{Id}(A)} B$ y coinciden (id. para ínfimos).

Como caso particular, y teniendo en cuenta que el doble conmutador $C''(D)$ de un conjunto D de operadores de H que conmutan entre sí es un f-anillo Dedekind- completo [13], resulta:

<u>Corolario 2.</u> $\mathrm{Id}(C''(D))$, con el orden inducido por $C''(D)$, es un álgebra de Boole completa. Si $\emptyset\neq B\subset \mathrm{Id}(C''(D))$, se tiene que $\sup_{C''(D)} B$ y $\sup_{\mathrm{Id}(C''(D))} B$ coinciden, y análogamente para ínfimos.

En todo f-anillo unitario los idempotentes son centrales [10] y por tanto Id(A) es un anillo de Boole unitario con las operaciones $e\oplus e' = e+e'-2ee'$ y ee' [8], que indicamos por $(\mathrm{Id}(A),\oplus,\cdot)$, y en consecuencia es álgebra de Boole por el orden $e\preccurlyeq e' \Leftrightarrow ee' = e$, álgebra que se denotará por $(\mathrm{Id}(A),\preccurlyeq)$. Nos proponemos relacionar ambas estructuras, cuestión que es importante puesto que permitirá establecer posteriormente conexiones entre las propiedades reticulares del f-anillo y las del álgebra de Boole de las isometrías reticulares homogéneas [7].

<u>Lema 2.</u> Si $e_1,\dots,e_n$ son idempotentes de A, entonces

$e_1\wedge\ldots\wedge e_n=e_1\ldots e_n$. La demostración es por inducción sobre n, haciendo uso de la descomposición $ab=(a\vee b)(a\wedge b)$, de que los idempotentes son centrales y de P1 (§3.1).

Como consecuencia se deduce:

<u>Proposición 2.</u> El orden $\preccurlyeq$ coincide con el que se deduce del álgebra $(Id(A),\vee,\wedge,0,1)$.

Todo idempotente induce una descomposición del f-anillo:

<u>Proposición 3.</u> Si $e=e^2$, se tiene que:

a) $A=\langle e\rangle\oplus\langle 1-e\rangle$

b) $\langle e\rangle^{\perp}=\langle 1-e\rangle$ y $\langle 1-e\rangle^{\perp}=\langle e\rangle$.

En efecto: a) Es consecuencia de L.1 (§3.1) y del hecho de que en f-anillos se tiene que $\langle x\wedge y\rangle = \langle x\rangle\cap\langle y\rangle$, $\forall x,y$. b) Se deriva de que $\langle e\rangle$ es sumando directo [1].

§3.2. <u>Los idempotentes de un f-anillo proyectable.</u>

Se dice que un anillo reticulado es proyectable si $a^{\perp}\oplus a^{\perp\perp}=A$, $\forall a\in A$.

<u>Lema 1.</u> Si e, e_1 y e_2 son idempotentes de A y $x\in A$, entonces:

a) Si $e^{\perp}\subset x^{\perp}$, se verifica que $|x|=|x|e$.

b) Es $e_1\leqslant e_2$ si y sólo si $e_2^{\perp}\subset e_1^{\perp}$, y, por tanto: $e_1^{\perp}=e_2^{\perp}\Leftrightarrow e_1=e_2$.

En efecto: a) De $e^{\perp}=\langle 1-e\rangle$ (P.3, §3.1) resulta que $(1-e)\wedge|x|=0$ (*). Por otro lado sustituyendo en el segundo factor de $|x|=(|x|\vee 1)(|x|\wedge 1)$ la unidad por $e\vee(1-e)$ (P.3, §3.1), y utilizando (*), se obtiene que $|x|=(|x|\vee 1)(|x|\wedge e)$. (**). Repitiendo el proceso para el primer factor de (**) y teniendo en cuenta que A es un d-anillo:
$|x|=|x|(|x|\wedge e)\vee e(|x|\wedge e)\vee(1-e)(|x|\wedge e)=|x|(|x|\wedge e)\vee e(|x|\wedge e)\vee 0=(|x|\vee e)(|x|\wedge e)=$
$=|x|e$. Esta última igualdad es debida a que los idempotentes son del centro.

b) Es consecuencia de a).

<u>Proposición 1.</u> Si A es <u>proyectable</u>, el polar de todo elemento $a \in A$ es polar de un <u>único idempotente</u>, que es precisamente la proyección de la unidad sobre $a^{\perp\perp}$.

En efecto: Sea $1=a_1+a_2$, con $a_1 \in a^{\perp}$ y $a_2 \in a^{\perp\perp}$. De $a_1 \wedge a_2=0$ se deduce que $a_1 a_2=0$ y por tanto $a_2=(a_1+a_2)a_2=a_2^2$. Veamos que $a^{\perp}=a_2^{\perp}$. Efectivamente, dado que $a_1 \in a^{\perp}$, se tiene que $a=aa_2$, de donde $a_2^{\perp} \subset a^{\perp}$, pues A es un f-anillo. Ahora bien: $a_2 \in a^{\perp\perp} \Rightarrow a^{\perp\perp\perp} \subset a_2^{\perp} \Rightarrow a^{\perp} \subset a_2^{\perp}$, con lo que se obtiene la igualdad. La unicidad se demuestra aplicando L.1, § 3.2.

§ 3.3. <u>f-anillos unitarios con Id(A) convexo.</u>

En todo este apartado supondremos que Id(A) es convexo en A.

<u>Proposición 1.</u> Si Id(A) es convexo, se cumple:

a) Todo átomo del retículo $(A, \leqslant)$ es idempotente. En particular, los átomos son menores o iguales que 1.

b) $x^2 \geqslant |x|$, para todo x de A. Por tanto, A es <u>proyectable.</u>

c) A es producto subdirecto de anillos totalmente ordenados e íntegros.

Demostración: a) Sea <u>a</u> un átomo de $(A,\leqslant)$. En particular $a>0$ y $a \notin Id(A)^{\perp}$, pues $Id(A)^{\perp}=0$. Sea $e \in Id(A)$, $e \neq 0$, tal que $e \wedge a>0$. Por la minimalidad de <u>a</u> será $a=a \wedge e$, de donde $0<a \leqslant e$, y por convexidad resultará que $a \in Id(A)$.

b) De la convexidad de Id(A) y de $0 \leqslant |x| \wedge 1 \leqslant 1$ se deduce que $|x| \wedge 1 \in Id(A)$, $\forall x \in A$. Por tanto, $x^2=((|x| \vee 1)(|x| \wedge 1))^2=(|x| \vee 1)^2(|x| \wedge 1)=$ $=(|x| \vee 1)|x|=x^2 \vee |x|$, de donde $x^2 \geqslant |x|$. Para la segunda parte, es suficiente tener en cuenta que ahora todo positivo será superidempotente [1] y en consecuencia sumando directo [1].

c) Bastará probar que no hay nilpotentes [12], y para ello será suficiente ver que no los hay de orden 2. Ahora bien, ésto es evidente por b).

Proposición 2. Si Id(A) es convexo, entonces A es totalmente ordenado si y sólo si Id(A) lo es.

En efecto: Veamos que si Id(A) es totalmente ordenado también lo es A. Por la convexidad, es $Id(A)=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ y de la total ordenación se deriva que 1 es un elemento básico [1]. Luego $1^{\perp}$ es un subgrupo sólido r-primo [4]. Ahora bien, $1^{\perp}=\{0\}$ en un f-anillo y así $\{0\}\in P_r$, condición suficiente para asegurar que A es totalmente ordenado.

Proposición 3. Si Id(A) es convexo, entonces para cada subconjunto de idempotentes para el que exista supremo (o ínfimo) en Id(A), también existe supremo en A (resp. ínfimo) y ambos coinciden.

En efecto: Sea $\emptyset\neq B \subset Id(A)$. Por hipótesis existen $\sup_{Id(A)} B$ y $\inf_{Id(A)} B$. Veamos que existe $\sup_A B$ y que $\sup_A B=\sup_{Id(A)} B$ (la demostración correspondiente al caso de ínfimos sería similar). En efecto: puesto que $z=\sup_{Id(A)} B$ es una cota superior de B en A, si no fuera supremo de B en A debería existir $w\in A$, w cota superior de B tal que $w \ngeq z$. Considérese $u=w\wedge z$. Se tiene que $e\leqslant u<z$, $\forall e\in B$. Por la convexidad, será $u\in Id(A)$, lo cual es una contradicción.

§3.4. La estructura reticular de PI(A).

Considérese $PI(A)=\{e^{\perp} \mid e\in Id(A)\}$, subconjunto del álgebra de Boole de los polares del anillo, P(A) [1]. En este apartado estudiamos la estructura de PI(A), con el orden inducido de P(A).

Proposición 1. Siendo a,b de Id(A), se tiene: i) $a^{\perp}\wedge b^{\perp}=(a\vee b)^{\perp}$, y ii) $a^{\perp}\vee b^{\perp}=(a\wedge b)^{\perp}$, donde $a^{\perp}\vee b^{\perp}$ y $a^{\perp}\wedge b^{\perp}$ se suponen en el retículo P(A).

En efecto: i) Por ser A f-anillo y por P.3(b) (§3.1) se verifica: $a^{\perp}\wedge b^{\perp}=\langle 1-a\rangle \cap \langle 1-b\rangle=\langle (1-a)\wedge(1-b)\rangle=(1-(1-a)\wedge(1-b))^{\perp}=(a\vee b)^{\perp}$. ii) Nuevamente por P.3(b) (§3.1) resultará: $a^{\perp}\vee b^{\perp}=(a^{\perp\perp}\cap b^{\perp\perp})^{\perp}=(\langle a\rangle \cap \langle b\rangle)^{\perp}=(a\wedge b)^{\perp}$.

Esta proposición, juntamente con L.1 (§3.1) y P.1 (§3.1), así como el hecho de que P(A) es distributivo, nos permite enunciar el siguiente resultado:

<u>Proposición 2.</u> Con el orden inducido de P(A), PI(A) es una <u>subálgebra de Boole de P(A)</u>, con supremo e ínfimo los de P(A), mínimo 0, máximo A y el ortocomplemento de $e^\perp$ es $(1-e)^\perp$.

Este álgebra de Boole se indicará por $(PI(A),\vee,\wedge,0,A)$. Serán útiles las siguientes propiedades:

<u>Lema 1.</u> Sea $\{e_i \mid i\} \subset Id(A)$. Entonces se verifica:

a) si existe $\bigvee_i e_i$ en A, también existe $\bigwedge_i e_i^\perp$ en PI(A) y $\bigwedge_i e_i^\perp = (\bigvee_i e_i)^\perp$

b) si existe $\bigwedge_i e_i$ en A, también existe $\bigvee_i e_i^\perp$ en PI(A) y $\bigvee_i e_i^\perp = (\bigwedge_i e_i)^\perp$

En efecto: a) En primer lugar, es $(\bigvee_i e_i)^\perp = \bigcap_i e_i^\perp$. Siendo P(A) completa [1], existe $\bigwedge_i e_i^\perp$ en P(A) y $\bigwedge_i e_i^\perp = \bigcap_i e_i^\perp$. Ahora bien, por P.1(§3.1), es $\bigvee_i e_i \in Id(A)$ y por consiguiente $\bigwedge_i e_i^\perp = \bigcap_i e_i^\perp$ en PI(A). b) De la existencia de $e=\bigwedge_i e_i$ se deriva la existencia de $\bigvee_i (1-e_i)=1-e$.
Por P.3(b) (§3.1) se tendrá: $\bigvee_i e_i^\perp = (\bigcap_i e_i^{\perp\perp})^\perp = (\bigcap_i (1-e_i)^\perp)^\perp = (\bigwedge_i (1-e_i)^\perp)^\perp$.
Por el apartado a) ya demostrado será en particular $\bigwedge_1 (1-e_i)^\perp = (\bigvee_i (1-e_i))^\perp$, de donde, y nuevamente por P.3(b) (§3.1): $\bigvee_i e_i^\perp = (\bigvee_i (1-e_i))^{\perp\perp} = (1-e)^{\perp\perp} = e^\perp = (\bigwedge_i e_i)^\perp$. Finalmente se llega a la conclusión teniendo en cuenta P.1 (§3.1).

<u>Proposición 3.</u> Si A es Dedekind-completo, <u>todo polar es polar de un único idempotente.</u> En particular, PI(A)=P(A).

Demostración: Sea $B=C^\perp$, $\emptyset \neq C \subset A$, es decir $B=\bigcap\{x^\perp \mid x\in C\}$. Siendo Dedekind-completo, A es proyectable y puede aplicarse P.1(§3.2):

para cada $x \in C$ existe un idempotente e_x tal que $x^{\perp} = e_x^{\perp}$ y, por tanto, $B = \bigwedge_{x \in C} e_x^{\perp}$ (en P(A)). Por otra parte, siendo Id(A) acotado superiormente por 1, y por la completitud, resulta que existe $\bigvee_{x \in C} e_x = e$ y $e \in \mathrm{Id}(A)$. El lema anterior nos asegura que $B = e^{\perp} \in \mathrm{PI}(A)$. La unicidad de $\underline{e}$ se obtiene aplicando L.1(b) (§3.2).

§3.5. <u>Los idempotentes de $C''(\mathcal{D})$.</u>

Sea $\mathcal{R}$ el retículo [9] de todos los proyectores ortogonales sobre los subespacios vectoriales cerrados de un espacio de Hilbert H, ordenado por el mismo orden que $(H, \leqslant)$. Si $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ existe $\sup_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ y es la proyección sobre $\bigvee_{B \in \mathcal{B}} B(H)$, subespacio vectorial cerrado generado por $\cup\{B(H) \mid B \in \mathcal{B}\}$. También existe $\inf_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$ y es el proyector ortogonal sobre $\cap\{B(H) \mid B \in \mathcal{B}\}$.

<u>Teorema 1.</u> Si $\mathcal{D}$ es un conjunto no vacío de operadores de H que conmutan entre sí,

a) $(\mathrm{Id}(C''(\mathcal{D})), \leqslant)$ es un <u>subretículo</u> de $(\mathcal{R}, \leqslant)$.

b) Si $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))$, entonces $P = \inf_{\mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))} \mathcal{B}$ es la proyección ortogonal sobre $\cap\{B(H) \mid B \in \mathcal{B}\}$ y, en consecuencia, $P = \inf_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$.

c) Si $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))$ y $Q = \sup_{\mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))} \mathcal{B}$, entonces Q es el proyector ortogonal sobre $\bigvee_{B \in \mathcal{B}} B(H)$. Por tanto, $Q = \sup_{\mathcal{R}} \mathcal{B}$.

Demostración: a) Si $P, P' \in \mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))$, hay que probar que $\inf_{\mathcal{R}} (P,P') \in \mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))$ y que $\inf_{\mathcal{R}}(P,P') = \inf_{\mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))} (P,P')$, y análogamente para supremos. Puesto que $PP' = P'P$, es [9] $\inf_{\mathcal{R}}(P,P') = PP'$ y $\sup_{\mathcal{R}}(P,P') = P+P'-PP'$. Luego $\inf_{\mathcal{R}}(P,P')$, $\sup_{\mathcal{R}}(P,P') \in \mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))$. El lema 2(§3.1) permite probar el resto.

b) Hay que demostrar que $P(H) = \cap\{B(H) \mid B \in \mathcal{B}\}$. Siendo $P \leqslant B$, $\forall B \in \mathcal{B}$, en $\mathrm{Id}(C''(\mathcal{D}))$, también será $P \leqslant B$, $\forall B \in \mathcal{B}$ en $\mathcal{R}$. Luego $P(H) \subset B(H)$, $\forall B \in \mathcal{B}$ lo cual nos proporciona una inclusión. Para establecer la otra, supongamos que $B(x)=x$, $\forall B\in \mathcal{B}$. Se tiene que probar que $Px=x$. Para ello y puesto que $C''(\mathcal{D})$ es un grupo reticulado, teniendo en cuenta C.2 (§3.1), podemos escribir que $\inf_{Id(C''(\mathcal{D}))} \mathcal{B} = \inf_{C''(\mathcal{D})} \mathcal{B} = I-D$, siendo $D=\sup_{C''(\mathcal{D})} \{I-B \mid B\in\mathcal{B}\}$, de donde $(Px|x)=\|x\|^2-(Dx|x)$. Sea ahora (en $C''(\mathcal{D})$), para todo subconjunto finito $k=(B_{j_1},\ldots,B_{j_n})$ de $\mathcal{B}$, el operador $M_k=(I-B_{j_1})\vee\ldots\vee(I-B_{j_n})$. Entonces los conjuntos $\{I-B \mid B\in\mathcal{B}\}$ y $\{M_k \mid k\}$ tienen las mismas cotas superiores en $C''(\mathcal{D})$ y por tanto existe $\sup_{C''(\mathcal{D})}\{M_k \mid k\}$ y coincide con D. Pero $\{M_k \mid k\}$ es filtrante superiormente y en consecuencia [13]: $(Px|x)=\|x\|^2-\sup_k(M_kx|x)$. Para completar la demostración, veamos que $(M_kx|x)=0$, $\forall k$. Por L.2 (§3.1) es $M_k=I-(B_{j_1}\ldots B_{j_n})$ y en consecuencia $(M_kx|x) = \|x\|^2-(B_{j_1}\ldots B_{j_n}x|x)=0$, debido a que $Bx=x$, $\forall B\in\mathcal{B}$. La segunda parte se sigue de la anterior ya que si P y P' son los proyectores ortogonales asociados a los subespacios cerrados S y S', se tiene que $S\subset S'$ si y sólo si $P\leqslant P$.

c) Se reducirá el problema al caso anterior: si $Q=\sup_{Id(C''(\mathcal{D}))}\mathcal{B} = I-\inf_{Id(C''(\mathcal{D}))}\{I-B \mid B\in\mathcal{B}\}$ y $T=\inf_{Id(C''(\mathcal{D}))}\{I-B \mid B\in\mathcal{B}\}$, es $T(H)=\bigcap_{B\in\mathcal{B}}(I-B)(H)$. Así pues, $Q(H)=(I-T)(H)=T(H)^{\perp}=(\bigcap_{B\in\mathcal{B}}(I-B)(H))^{\perp}=(\bigcap_{B\in\mathcal{B}}B(H)^{\perp})^{\perp}=\bigvee_{B\in\mathcal{B}}B(H)^{\perp\perp} = \bigvee_{B\in\mathcal{B}}B(H)$. Esta última igualdad es debida a que $B(H)$ es cerrado.

<u>Proposición 1.</u> Si $B\in C''(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}\subset\mathcal{H}$, $\mathcal{D}\neq\emptyset$, entonces $B^{\perp}=P_B^{\perp}$, siendo P_B el proyector ortogonal sobre la adherencia de $B(H)$.

En efecto: $C''(\mathcal{D})$ es proyectable por ser Dedekind-completo. Por P.1 (§3.2) es $B^{\perp}=P_B^{\perp}$, siendo P_B la proyección de I sobre $B^{\perp\perp}$ en la descomposición $C''(\mathcal{D})=B^{\perp}\oplus B^{\perp\perp}$. Ahora bien, $B^{\perp\perp}$ es la banda generada por $\{B\}$ [13], por la arquimedianidad de $C''(\mathcal{D})$. Por consiguiente, P_B es la proyección ortogonal sobre $\overline{B(H)}$ [13].

Proposición 2. Si $C=\{C_j\,|\,j\in J\}\subset\mathcal{C}''(\mathcal{D})$, $D_C=\bigvee_j C_j(H)$ y P_C es la proyección ortogonal sobre D_C, entonces:

a) $P_C\in\mathcal{C}''(\mathcal{D})$ y $C^\perp=P_C^\perp$.

b) Si $B\in\mathcal{C}''(\mathcal{D})$, se tiene que $BC_j=0$ $\forall j\in J$ si y sólo si $B\,P_C=0$.

En efecto: a) Es $C^\perp=\cap\{C_j^\perp\,|\,j\in J\}$. Si P_j es la proyección ortogonal sobre $\overline{C_j(H)}$, por la proposición anterior será $C_j^\perp=P_j^\perp$ y $C^\perp=\cap\{P_j^\perp|j\in J\}$, y cada P_j es de $\mathcal{C}''(\mathcal{D})$. Sea $Q=\sup\limits_{\mathcal{C}''(\mathcal{D})}\{P_j\,|\,j\in J\}$; entonces $Q\in Id(\mathcal{C}''(\mathcal{D}))$ y $C^\perp=Q^\perp$. Como consecuencia de T.1 (§3.5) y L.1(b) (§3.2) se deduce que $Q=P_C$.

b) Se sigue de que en $\mathcal{C}''(\mathcal{D})$ se satisface la equivalencia $|X|\wedge|Y|=0 \Leftrightarrow XY=0$.

Si C es un subconjunto no vacío de $\mathcal{C}''(\mathcal{D})$, S(C) es el subespacio vectorial sólido generado por C en $\mathcal{C}''(\mathcal{D})$ y b(C) es la banda generada por C, entonces $T\in(b(C))^+$ si y sólo si $T=\sup\limits_{\mathcal{C}''(\mathcal{D})}\{W\in S(C)\,|\,0\leqslant W\leqslant T\}$.
La proposición anterior permite obtener otra caracterización, en términos algebraicos, de $(b(C))^+$:

Proposición 3. Con las hipótesis y notaciones de la proposición anterior, si $T\geqslant 0$ entonces $T\in b(C)$ si y sólo si $TP_C=P_CT=T$.

En efecto: Por la proposición anterior y por P.3(b) (§3.1) es $b(C)=C^{\perp\perp}=P_C^{\perp\perp}=(I-P_C)^\perp$. Así pues, $T\in b(C)$ si y sólo si $T\wedge(I-P_C)=0$ ó, equivalentemente, $T=TP_C=P_CT$.

4. Isometrías reticulares en los f-anillos.

Las isometrías reticulares de un grupo reticulado conmutativo y de un f-anillo, es decir, las aplicaciones $\sigma: G\to G$ que conservan la distancia generalizada $d(x,y)=|x-y|$, han sido estudiadas en [7]. Consideraremos únicamente las homogéneas, es decir, las que dejan o fijo. Se indicará por H(G) el conjunto de tales aplicaciones. H(G) es un anillo de Boole unitario con dos operaciones, $\circ$, la composición, respecto de la cual es grupo involutivo, y $*$, que seguidamente describiremos en el caso de los f-anillos unitarios. Este anillo Booleano se indicará por $(H(G),\circ,*)$ y el álgebra de Boole correspondiente que se obtiene por el orden $\sigma \leqslant \tau \Leftrightarrow \sigma * \tau = \sigma$ se denotará por $(H(G),\vee,\wedge,I,-I)$, siendo I la identidad. En el caso de un f-anillo unitario A, existe un isomorfismo de anillos de Boole $(H(A),\circ,*) \rightarrow (Id(A),\oplus,\cdot)$, $\sigma \rightarrow e_\sigma$, siendo $e_\sigma = (\sigma(1))^-$. De esta forma, si $\sigma \in H(A)$ se tiene que $\sigma(x) = x(1-2e_\sigma)$, y si $e=e^2$, la aplicación $x \xrightarrow{\tau} x(1-2e)$ es una isometria $\tau \in H(A)$ tal que $e_\tau = e$. Además, resulta que $(\sigma \circ \tau)(x) = x(1-2(e_\tau \oplus e_\tau))$ y $(\sigma * \tau)(x) = x(1-2(e_\sigma e_\tau))$.

<u>Supondremos en toda esta sección que A es un f-anillo unitario</u>, con unidad 1.

§4.1. <u>Idempotentes e isometrías reticulares.</u>

Las álgebras de Boole de idempotentes dependen esencialmente del grupo reticulado:

<u>Proposición 1.</u> Si p_1 y p_2: $A \times A \rightarrow A$ son dos productos que convierten al mismo grupo reticulado conmutativo $(A,+,\leqslant)$ en f-anillo unitario, de unidades respectivas u_1 y u_2, entonces las álgebras de Boole correspondientes $(Id_1(A),\vee,\wedge,0,u_1)$ y $(Id_2(A),\vee,\wedge,0,u_2)$ son <u>isomorfas</u>, y un isomorfismo es $Id_1(A) \rightarrow Id_2(A)$, $e \rightarrow p_1(u_2,e)$.

En efecto: Si $A_i = (A,+,p_i,\leqslant)$, para $i=1,2$, se tiene que $H(A_1) = H(A_2)$. La composición de los isomorfismos $Id_1(A) \rightarrow H(A_1)$, $e \rightarrow \sigma$, siendo $\sigma(x) = p_1(x, u_1 - 2e)$, y $H(A_2) \rightarrow Id_2(A)$, $\sigma \rightarrow (u_2)^-$, nos proporciona el isomorfismo deseado. La expresión del enunciado se obtiene del hecho de que A es un d-anillo.

Obsérvese que como consecuencia de C1 (§3.1) se tiene que si A es Dedekind-completo, entonces $(H(A),\vee,\wedge,I,-I)$ es un álgebra de Boole completa.

Proposición 2. El conjunto de las isometrías (por la norma) de $C''(D)$, siendo $\emptyset \neq D \subset H$, contiene un álgebra de Boole completa de isometrías, que es el álgebra $H(C''(D))$.

En efecto: Si $\sigma \in H(C''(D))$, existe un $P \in Id(C''(D))$ (basta tomar $P = \frac{1}{2}(I-\sigma(I))$ tal que $\sigma(B)=B(I-2P)$, $\forall B \in C''(D)$, con lo que σ es lineal. Siendo la norma de $C''(D)$ compatible con la estructura reticulada, resulta que toda $\sigma \in H(C''(D))$ conserva la norma. El resto es consecuencia de C.2 (§3.1).

§4.2. Caracterizaciones geométricas de las isometrías reticulares.

Proposición 1. Los elementos de H(A) son las homotecias de razón a, con $|a|= 1$.

En efecto: Sea $\sigma \in H(A)$ y sea e_σ su idempotente asociado. De la expresión $\sigma(x)=x(1-2e_\sigma)$ podemos afirmar que σ es una homotecia de razón $\sigma(1)$ y por ello bastará ver que $|\sigma(1)|= 1$, que es inmediato. La demostración del recíproco no ofrece dificultad.

Corolario 1. a) Para todo a tal que $|a|=1$, existe un idempotente e para el que se satisface $a=1-2e$. Por tanto, todo elemento de valor absoluto 1 es del centro.

b) Si $|a|= 1$, entonces a^+ y a^- son idempotentes.

c) El conjunto $B= \{a \mid |a|=1\}$ coincide con $\{a \mid a^2=1\}$ y con el producto del anillo es un grupo multiplicativo involutivo, isomorfo al grupo subyacente de $(Id(A), \oplus, \cdot)$.

En efecto: a) Resulta de considerar la homotecia de razón a. b) Es consecuencia de a) y de L.1 (§3.1). c) Por ser A d-anillo, $B \subset \{a \mid a^2= 1\}$. Sea ahora $a^2=1$. Por un lado, $|a|=(|a| \vee 1)(|a| \wedge 1) = =(|a|^2 \wedge |a|) \vee (|a| \wedge 1)=1 \wedge |a|$, y por tanto $|a| \leq 1$. Por otra parte, utilizando la distributividad respecto del ínfimo, se obtiene que $|a| \geq 1$. En definitiva, $|a|= 1$. Finalmente, la aplicación $Id(A) \to B$, $\varphi(e)=1-2e$ nos da el isomorfismo requerido.

Introduzcamos la siguiente definición:

<u>Definición 1.</u> Si $\langle a\rangle$ es un sumando directo, o sea, $A=\langle a\rangle \oplus a^{\perp}$, diremos que $\varphi: A \to A$ es una <u>simetría axial reticular de eje a</u> si es morfismo de la suma y $\varphi(x)=x$, para $x\in\langle a\rangle$ y $\varphi(x)= -x$, para $x\in a^{\perp}$. Es decir, $\varphi(x)=x_1-x_2$, siendo $x=x_1+x_2$, con $x_1\in\langle a\rangle$ y $x_2\in a^{\perp}$.

<u>Proposición 2.</u> a) Si $\sigma\in H(A)$ y e_σ es el idempotente asociado, entonces

$$\sigma|_{e_\sigma^{\perp}} = I \quad \text{y} \quad \sigma|_{(1-e_\sigma)^{\perp}} = -I.$$

b) Toda $\sigma\in H(A)$ es una simetría axial reticular: σ es una simetría axial de eje $1-e_\sigma$.

c). Si $\sigma\in H(\mathcal{C}''(\mathcal{D}))$ y $P=\sigma(I)^{-}$, entonces $\sigma(B)=B$ si $BP=0$ y $\sigma(B)=-B$ si $BP=B$.

Demostración: a) Escribamos $x=xe_\sigma+x(1-e_\sigma)$, $x\in A$. Si $x\in e_\sigma^{\perp}$, entonces, dado que A es un d-anillo, resulta que $xe_\sigma=0$ y por tanto $x=x(1-e_\sigma)$. Luego $\sigma(x)=x(1-2e_\sigma)=x$, con lo que $\sigma|_{e_\sigma^{\perp}} = I$. De modo parecido se prueba que $\sigma|_{(1-e_\sigma)^{\perp}} = -I$.

b) Es consecuencia de a) y de la descomposición $A=e_\sigma^{\perp}\oplus(1-e_\sigma)^{\perp}$ (T.3, §3.1).

c) Si $P=\sigma(I)^{-}$, se tiene que $\mathcal{C}''(\mathcal{D})=P^{\perp}\oplus(I-P)^{\perp}$. Siendo $P^{\perp}=\{B\in\mathcal{C}''(\mathcal{D}) \mid PB = 0\}$ y $(I-P)^{\perp}=\{B\in\mathcal{C}''(\mathcal{D}) \mid B=BP\}$, la conclusión se deduce de b).

Es claro por otro lado que toda simetría axial reticular es una isometría reticular homogénea, pues la suma directa de sólidos es ortogonal y se tiene que $|a-b|=|a+b|$ si <u>a</u> y <u>b</u> son ortogonales.

En el caso totalmente ordenado es $H(A)=\{I,-I\}$, lo que no significa que para A no totalmente ordenado sea H(A) no trivial [7]. En ciertos casos, sin embargo, puede asegurarse que existen isometrías propias:

<u>Proposición 3.</u> a) Si A es <u>proyectable</u> y <u>no totalmente ordenado</u>, entonces $Id(A)\neq\{0,1\}$. Por tanto, H(A) contiene isometrías distintas de $I,-I$.

b) Si $\emptyset \neq D \subset H$ y $D \neq \{\lambda I \mid \lambda \in R\}$, entonces existen isometrías reticulares (y por tanto por la norma) $\tau : C''(D) \to C''(D)$ <u>no triviales</u>.

Demostración: a) Por ser A no totalmente ordenado, existe $x \neq 0$ tal que $x^{\perp} \neq 0$. Por P.1 (§3.2), es $x^{\perp\perp} = e^{\perp}$, con $e = e^2$. De $x \neq 0$ y $x^{\perp} \neq 0$ se deduce que $e \neq 0$ y $e \neq 1$. b) Por hipótesis, $C''(D)$ no puede ser totalmente ordenado, ya que si lo fuera, siendo Dedekind-completo, sería isomorfo como grupo a R [11], con lo que $D = \{\lambda I \mid \lambda \in R\}$. Ahora la conclusión se deriva del apartado a) y de P.2 (§4.1).

§ 4.3. <u>El espacio de Stone de H(A), para A proyectable.</u>

Considérese definida en M, conjunto de los ideales sólidos r-primos minimales, la topología de Stone T, que tiene como abiertos básicos los conjuntos $\{M\}_a = \{M \in M \mid a \notin M\}$, con $a \geq 0$. Si B es un álgebra de Boole, indicaremos por S(B) su espacio de Stone [5]. Si $T = \{\{M\}_a \mid a \geq 0\}$, el resultado fundamental de este apartado es:

<u>Teorema 1.</u> Si A es proyectable, entonces se cumple:

a) Los espacios topológicos (M,T) y $S(Id(A), \vee, \wedge, 0, 1)$ son homeomorfos.

b) $(T, \cup, \cap, \emptyset, A)$ es un álgebra de Boole isomorfa a $(Id(A), \vee, \wedge, 0, 1$

c) $(H(A), \vee, \wedge, I, -I)$ es isomorfa al álgebra de Boole de abiertos-cerrados de (M,T).

Demostración: a) Si $Q \in S(Id(A), \vee, \wedge, 0, 1)$, veamos que $M_Q = \{x \mid x^{\perp} = e^{\perp},\ e \in Q\}$ es de M. (1) M_Q <u>es sólido</u>. Efectivamente, si $|x| \leq |y|$ y $y \in M_Q$, entonces existe $e \in Q$ tal que $y^{\perp} = e^{\perp}$ y $y^{\perp} \subset x^{\perp}$. Por P.1 (§3.2), es $x^{\perp\perp} = e_1^{\perp}$, para un cierto $e_1 \in Id(A)$. Por L.1(b) (§3.2), es $e_1 \leq e$. Siendo Q un ideal de álgebra de Boole, resulta que $x \in M_Q$. (2) M_Q <u>es subgrupo</u>. Si $x, y \in M_Q$, sean $e_1, e_2 \in Q$ tales que $x^{\perp\perp} = e_1^{\perp}$ y $y^{\perp} = e_2^{\perp}$. Entonces $(|x|+|y|)^{\perp\perp} = (e_1 \vee e_2)^{\perp\perp}$, de donde $|x|+|y| \in M_Q$, y por (1) se deduce que $x - y \in M_Q$. (3) M_Q <u>es r-primo</u>. Sea $x \wedge y \in M_Q$, es decir $(x \wedge y)^{\perp} = e^{\perp}$, con $e \in Q$. Por P.1 (§3.2), es $x^{\perp} = e_1^{\perp}$, $y^{\perp} = e_2^{\perp}$, con $e_1^2 = e_1$ y $e_2^2 = e_2$. De $(|x| \wedge |y|)^{\perp\perp} \subset |x \wedge y|^{\perp\perp}$ y de $(|x| \wedge |y|)^{\perp\perp} = (e_1 \wedge e_2)^{\perp\perp}$ resulta que $e^{\perp} \subset (e_1 \wedge e_2)^{\perp}$, de donde (L.1(b), §3.2), $e_1 \wedge e_2 \leq e$. Siendo Q primo, deberá ser $e_1 \epsilon Q$ ó $e_2 \epsilon Q$. (4) M_Q <u>es minimal</u>. Dado que M_Q es r-primo, bastará probar que para todo $x \epsilon M_Q$ existe un $y \epsilon A^+ \setminus M_Q$ tal que $|x| \wedge y = 0$. En efecto, si $x^\perp = e^\perp$, para $e \epsilon Q$, es suficiente considerar $y=1-e$. El resultado se deriva de L.1 (§3.1) y de que en álgebras de Boole los ideales primos coinciden con los maximales. (5) Finalmente, $M_Q \epsilon \mathcal{M}$ pues en f-anillos todo subgrupo sólido r-primo minimal es ideal sólido r-primo minimal [1].

Visto ésto, definamos $\psi: S(Id(A)) \to \mathcal{M}$, $\psi(Q) = M_Q$, y consideremos $\varphi: \mathcal{M} \to S(Id(A))$ dada por $\varphi(M) = Q_M = \{e \epsilon Id(A) \mid e \epsilon M\}$. Obsérvese que Q_M es no vacío y propio. Puede comprobarse inmediatamente que Q_M es un ideal primo de $(Id(A), v, \wedge, 0, 1)$. Luego φ está bien definida. Demostremos que $\varphi = \psi^{-1}$. En primer lugar, si $M \epsilon \mathcal{M}$, veamos que $(\psi \circ \varphi)(M) = M$ y para ello es suficiente probar que $(\psi \circ \varphi)(M) \subset M$. Si $x \epsilon (\psi \circ \varphi)(M)$, es $x^\perp = e^\perp$ para algún $e \epsilon M$; si $x \not\epsilon M$, por la minimalidad resulta que $x^\perp \subset M$, de donde $e^\perp \cup \{e\} \subset M$, lo cual es imposible si $M \epsilon \mathcal{M}$. En segundo lugar, si $Q \epsilon S(Id(A))$ y $a \epsilon (\varphi \circ \psi)(Q)$, existe $e \epsilon Q$ tal que $a^\perp = e^\perp$. De esto deducimos que $(\varphi \circ \psi)(Q) \subset Q$, de donde $(\varphi \circ \psi)(Q) = Q$ por la maximalidad de $(\varphi \circ \psi)(Q)$.

Siendo φ y ψ biyectivas, es fácil ver que transforman abiertos básicos en abiertos básicos, lo cual termina la demostración.

b) Consideremos el morfismo reticular $f: Id(A) \to T$, $e \to \{M\}_e$. Es inyectivo, pues si $f(e_1) = f(e_2)$, es $e_1^\perp = e_2^\perp$ y por tanto $e_1 = e_2$ (L.1 (b) §3.2). En cuanto a la exhaustividad, supongamos que $\{M\}_a \epsilon T$, y sea $e \epsilon Id(A)$ tal que $a^\perp = e^\perp$. Veamos que $\{M\}_a = \{M\}_e$. Si $M \epsilon \{M\}_a$ tendremos por la minimalidad que $a^\perp \subset M$, o sea $e^\perp \subset M$, de donde $1-e \epsilon M$. Por tanto $e \not\epsilon M$, es decir $\{M\}_a \subset \{M\}_e$. La otra inclusión se demuestra inmediatamente.

c) Es consecuencia de a) y del teorema de representación topológica para álgebras de Boole [5].

Nótese que este resultado no es necesariamente válido en el caso no proyectable (por ejemplo, $C([0,1])$).

Seguidamente se obtienen algunas consecuencias del teorema anterior.

Si (M_1,T) y (M_2,T) son los espacios topológicos de ideales sólidos r-primos minimales asociados a los f-anillos unitarios $A_i=(A,+,p_i,\leqslant)$, $i=1,2$, sobre el mismo grupo reticulado conmutativo $(A,+,\leqslant)$, se tiene:

Proposición 1. Si A es proyectable, entonces (M_1,T) y (M_2,T) son homeomorfos.

En efecto: se deriva de P.1 (§4.1) y de T.1(a) (§4.3).

Supongamos P_r dotado de la topología de Stone T:

Proposición 2. a) Si (P_r,T) es extremadamente inconexo, entonces $(Id(A),\vee,\wedge,0,1)$ (y por ende $(H(A),\vee,\wedge,I,-I)$) es un álgebra de Boole completa.

b) Si A es Dedekind-completo, entonces (M,T) es extremadamente inconexo.

c) Si A es proyectable y H(A) es infinito, entonces Card H(A)$\leqslant$ Card M.

En efecto: a) A es proyectable [3] y por consiguiente es aplicable T.1 (§4.3), con lo que será equivalente demostrar que (M,T) es extremadamente inconexo [5]. Ahora bien, esto último es cierto debido a que M es denso en P_r.

b) Basta aplicar C.1 (§3.1) y T.1(a) (§4.3).

c) Si B es un álgebra de Boole infinita se cumple que Card B$\leqslant$ Card S(B) [5]. Es suficiente pues aplicar T.1 (§4.3).

§4.4. El orden puntual en H(A).

El orden de A induce un orden natural en H(A), que seguidamente definimos:

Definición 1. Si $\sigma,\tau\in H(A)$, diremos que $\sigma\leqslant_p\tau$ si y sólo si $\sigma(x)\leqslant\tau(x)$, $\forall x\geqslant 0$.

Es inmediato que $\leqslant_p$ es una relación de orden, que denominamos orden puntual.

Proposición 1. a) Si $\sigma,\tau \in H(A)$ y e_σ y e_τ son sus idempotenciados, entonces es $\sigma \leqslant_p \tau$ si y sólo si $e_\tau \leqslant e_\sigma$.

b) El orden $\leqslant_p$ de $H(A)$ es dual del orden $\leqslant$.

c) $(H(A), \leqslant_p)$ es un álgebra de Boole, dual de $(H(A),\vee,\wedge,I,-I)$, con mínimo $-I$, máximo I, y el ortocomplemento de σ es $-\sigma$.

En efecto: a) De $e_\sigma \leqslant e_\tau$ se deriva que $\sigma(1) \leqslant \tau(1)$ y si $x \geqslant 0$, entonces $\sigma(x) \leqslant \tau(x)$, es decir $\sigma \leqslant_p \tau$. Recíprocamente, de $\sigma \leqslant_p \tau$ resulta que $\sigma(1) \leqslant \tau(1)$, es decir $0 \leqslant 2(e_\sigma - e_\tau)$, de lo que se puede concluir que $e_\tau \leqslant e_\sigma$.

b) $\sigma \leqslant \tau \Leftrightarrow \sigma * \tau = \sigma \Leftrightarrow e_{\sigma*\tau} = e_\sigma \Leftrightarrow e_\sigma\, e_\tau = e_\sigma$. De L.2 (§3.1) se deduce que $\sigma \leqslant \tau \Leftrightarrow e_\sigma \leqslant e_\tau$, es decir, $\sigma \leqslant \tau \Leftrightarrow \tau \leqslant_p \sigma$, por a).

c) Es consecuencia de b) y de las propiedades de $(H(A),\vee,\wedge,I,-I)$

Indicando este álgebra de Boole por $(H(A),\vee_p,\wedge_p,-I,I)$:

Teorema 2. Las álgebras de Boole $(H(A),\vee_p,\wedge_p,-I,I)$ y $(PI(A),\vee,\wedge,0,$ son isomorfas.

En efecto: Es suficiente tener en cuenta que $(Id(A),\vee,\wedge,0,1) \to (PI(A),\vee,\wedge,0,A)$, $e \to e^\perp$ es un isomorfismo de álgebra de Boole, derivándose la inyectividad de L.1 (§3.2).

Bibliografia.

[1] BIGARD, A., KEIMEL, K., WOLFENSTEIN, S.: Groupes et anneaux réticulés. Lecture Notes in Math. 608. Berlin-Heidelberg-N.Y. 1977.

[2] BIRKHOFF, G., PIERCE, R.S.: Lattice-ordered Rings. Anais. Acad Brasil. Ci. 28 (41-69), 1956.

[3] COLVILLE, P.: Discrete Structure Spaces of f-Rings. Journal Austral. M.S. 18 (104-110), 1974.

[4] CONRAD, P.F.: Lattice-ordered Groups. Tulane Univ. Lct. Notes, 1970.

[5] DWINGER, PH.: Introduction to Boolean Algebras. Würzburg, 1971.

[6] GILLMAN, L., JERISON, M.: Rings of Continuo
ceton, 1960.

[7] GRANE, J.: Sobre las isometrías de los grupos y los anillos reticulados. Pub. Univ. de Barcelona, 1978.

[8] HALMOS, P.R.: Lectures on Boolean Algebras. London, 1963

[9] HALMOS, P.R.: Introduction to Hilbert Spaces. New York, 1957.

[10] HENRIKSEN, M., ISBELL, J.R.: Lattice-ordered Rings and Function Rings. Pacific Math. J. 12 (533-565), 1962.

[11] JAFFARD, P.: Réalisation des groupes complètement réticulés. Bull. Soc. Math. France, 84 (295-305), 1956.

[12] JOHNSON, D.G.: A Structure Theory for a Class of Lattice-ordered Rings. Acta Math. 104 (163-215) 1960.

[13] LUXEMBURG, W., ZAANEN, A.: Riesz Spaces I. Amsterdam, 1971.

[14] TRIAS, J.: Sobre la p-distributividad en los f-anillos. Contrib. en Prob. y Est. Mat. y Análisis. 1979 (61-66). Univ. de Granada.

[15] VISWANATHAN, T.M.: Ordered Modules of Fractions, J. Reine Angew. Math. 235 (1969) (78-107).

Joan Trias Pairó
Dept. de Matemàtiques i Estadística.
E.T.S. d'Arquitectura
Universitat Politècnica de Barcelona
Diagonal 649. Barcelona-28
Spain.