STOCHASTICA, Vol.III nº 1 (1979)

SUR LES MESURES DU DEGRÉ DE FLOU

Au Prof. J. Kampé de Fériet, comme hommage respectueux

Enric Trillas et Claudi Alsina

On caractérise toutes les entropies-floues qui sont des valuations du treillis $\underset{\sim}{P}(X)$ des parties floues d'un ensemble fini X, on presente la construction de certaines entropies floues et on analyse leur caractère de valuation de treillis aiguisés $Sh(g), g\in\underset{\sim}{P}(X)$.

1.- Soient $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ un ensemble fini, $I=[0,1]$ et $\underset{\sim}{P}(X)$ l'ensemble(1) des parties floues de X identifié avec I^n par $h \to (h_1,\ldots,h_n)$ où $h_i=h(x_i)$. $\underset{\sim}{P}(X)$ est un treillis avec l'ordre ponctuel $h\leqslant g$ ssi $h(x)\leqslant g(x)$, quel que soit $x\in I$. La relation $h\leqslant_s g$ (s de "sharpened", aiguisée) défine par $h(x)\leqslant g(x)$ si $x\in g^{-1}([0,\frac{1}{2}])$ et $h(x)\geqslant g(x)$ si $x\in g^{-1}((\frac{1}{2},1])$, est un ordre partiel avec lequel les ensembles $Sh(g)=\{h\in\underset{\sim}{P}(X);\ h\leqslant_s g\}$ forment un treillis complètement réticulé (voir (2)). Soient $\overline{Sh}(g) = \{h\in P(X);\ 1-h\in Sh(g)\}$ et $\underset{\sim}{\frac{1}{2}} \to (\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$.

On mesure le degré de flou d'une partie $h\in\underset{\sim}{P}(X)$ au moyen d'une "entropie-floue"(3) ou fonction $D:I^n \to R^+$, telle que

a) $D(h)=0$ ssi $h\in\{0,1\}^n$ (parties ordinaires),

b) $D(h)<D(\underset{\sim}{\frac{1}{2}})$,

c) Si $h\leqslant_s g$ alors $D(h)\leqslant D(g)$.

On dit, en plus, que D est symétrique si $D(h)=D(1-h)$. Il faut remarquer que si $f:R^+ \to R^+$ est estrictement croissante, $f(0)=0$ et D est une entropie-floue, $f\circ D$ l'est aussi et alors sont entropies, p. ex., $a_nD^n+\ldots+a_1D+a_0$ $(a_i>0, n\in N)$ et $D/1+D$. De la même façon, si D est une entropie et $F:I^n \to I^n$, strictement croissante par rapport à l'ordre $\leqslant_s$, vérifie $F(\{0,1\}^n)=\{0,1\}^n$, $F(I^n-\{0,1\}^n)=I^n-\{0,1\}^n$ et $F(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, DoF est une entropie-floue; p. ex., $F(x_1,\ldots,x_n)=(1-x_1,\ldots,1-x_n)$ et $F_\sigma(x_1,\ldots,x_n)=(x_{i_1},\ldots,x_{i_n})$ quel que soit $\sigma=(i_1,\ldots,i_n)\in\mathfrak{S}_n$.

Les exemples d'entropies-floues donnés dans (3) sont dérivés de l'entropie logarithmique ou de Shannon qui, quoique n'étant pas inadéquate pour traduire une certaine idée d'également flou, est étroitement liée aux propriétés d'indépendance probabiliste et aux conditions d'additivité (ou de valuation) qui ne conviennent pas parfaitement aux applications de la théorie des sous-ensembles flous. Le but de cette Note, en continuant (2), est la construction d'entropies-floues et l'étude de leur caractère de valuations, soit du treillis ponctuel $\underset{\sim}{P}(X)$, soit des treillis aiguisés $Sh(g)$. C'est dans les idées initiales de J. Kampé de Fériet (4) qu'il faut chercher l'origine de ce qui suit.

2.- Dans (2) on considère le caractère de valuation du treillis $\underset{\sim}{P}(X)$ de certaines entropies, c'est à dire d'entropies-floues D telles que $D(h\vee g)+D(h\wedge g)=D(h)+D(g)$. On peut démostrer aisément le théorème général suivant, qui caractérise ces entropies-valuation.

<u>Théorème.</u> Les seules entropies-floues D qui sont valuarions du treillis ponctuel $\underset{\sim}{P}(X)$, sont celles de la forme $D(h_1,\ldots,h_n)=\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i)$, où les fonctions $d_i: I\to R^+$ sont nulles si $x=0$, strictement croissantes dans $[0,\frac{1}{2}]$, strictement décroissantes dans $(\frac{1}{2},1]$ et maximum pour $x=\frac{1}{2}$. Une entropie-valuation est invariante sous le groupe $\mathfrak{S}_n$ ssi $d_1=\ldots=d_n$; les seules entropies-valuation symétriques sont celles qui, pour tout $i=1,\ldots,n$, vérifient $d_i(x)=d_i(1-x)$ quel que soit $x\in I$.

3.- Considérons la famille de fonctions:

a) $\theta: R^+\times R^+\to R^+$, strictement croissante et nulle pour $(0,0)$,

b) $\theta_1^p:[0,\frac{1}{2}]^p\to R^+$, $1\leqslant p\leqslant n$, strictement croissantes et nulles pour $(0,\overset{p}{\ldots},0)$,

c) $\theta_2^{n-p}:(\frac{1}{2},1]^{n-p}\to R^+$, $0\leqslant p\leqslant n-1$, strictement décroissantes et nulles pour $(1,\overset{n-p}{\ldots},1)$, vérifiant

$$\theta_2^n(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}}) \leqslant \theta_1^n(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}}) \quad \text{et} \quad \theta(\theta_1^p(\tfrac{1}{2},\ldots,\tfrac{1}{2}),\theta_2^{n-p}(\tfrac{1}{2},\ldots,\tfrac{1}{2}))\leqslant\theta_1^n(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}}), 1\leqslant p\leqslant n-1.$$

Alors, comme (2) pour tout $h \in S = \underset{\sim}{P}(X) - Sh(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}}) \cup \overline{Sh}(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}})$ éxiste et est unique $\sigma_h(h)=(i_1,\ldots,i_p,i_{p+1},\ldots,i_n)\in\mathfrak{S}_n$, avec $p=\#\tilde{h}^{-1}([0,\tfrac{1}{2}]) < n$ et telle que $h_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant h_{i_p} \leqslant \tfrac{1}{2} < h_{i_{p+1}} \leqslant \ldots \leqslant h_{i_n}$:

<u>Théorème.</u> La fonction $D:I^n \to R^+$ défine par

$$D(h)=\begin{cases}\theta_1^n(h), & \text{si } h\in Sh(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}})\\ \theta_2^n(h), & \text{si } h\in\overline{Sh}(\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}})\\ \theta(\theta_1^p(h_{i_1},\ldots,h_{i_p}),\theta_2^{n-p}(h_{i_{p+1}},\ldots,h_{i_n})), & \text{si } h\in S,\end{cases}$$

est une entropie-floue.

Soit $f:[0,\tfrac{1}{2}]^n \to R^+$ une fonction strictement croissante, nulle pour $(0,\ldots,0)$ et telle que

$$\theta(f(x_1,\ldots,x_p,0,\ldots,0),f(0,\ldots,0,x_{p+1},\ldots,x_n))=f(x_1,\ldots,x_n),$$

pour tout $(x_1,\ldots,x_n)\in I^n$ et tout $p=1,\ldots,n-1$. Avec $\theta_1^p(x_1,\ldots,x_p) = f(x_1,\ldots,x_p,0,\ldots,0)$, $1\leqslant p\leqslant n$ et $\theta_2^{n-p}(x_{p+1},\ldots,x_n)=f(0,\ldots,0,1-x_{p+1},\ldots,1-x_n)$, $0\leqslant p\leqslant n-1$, le théorème précédant donne une entropie-floue D_f^θ.

4.- Soit $g\in\underset{\sim}{P}(X)$. Si $v:Sh(g)\to R^+$ est une valuation de ce treillis aiguisé, c'est à dire si v vérifie $v(h \underset{s}{\vee} f)+v(h \underset{s}{\wedge} f)=v(h)+v(f)$ pour $h,f \in Sh(g)$, on dira que v est une g-valuation.

<u>Théorème.</u> Soit $g\in Sh(\tfrac{1}{2})$ (respect., $g\in\overline{Sh}(\tfrac{1}{2})$). Quel que soit θ, la restriction de D_f^θ à $Sh(g)$ est une g-valuation si et seulement si il éxiste n fonctions $f_i:[0,g_i] \to R^+$ (respect., $f_i:[0,1-g_i]\to R^+$), strictement croissantes et nulles pour $x=0$, telles que $f(x_1,\ldots x_n) = f_1(x_1)+f_2(x_2)+\ldots+f_n(x_n)$.

<u>Théorème.</u> Soient $g \in S$ et $\sigma_g(g) = (i_1, \ldots, i_p, i_{p+1}, \ldots, i_n)$. La restriction de D_f^θ à $Sh(g)$ est une g-valuation si et seulement si:

1) Il existe n fonctions, $f_j : [0, g_i] \to R^+$ si $1 \leq j \leq p$, et $f_j : [0, 1-g_i] \to R^+$ si $p+1 \leq j \leq n$, strictement croissantes et nulles pour $x=0$, telles que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$.

2) $\theta = +$, dans le pavé $[0, \sum_{j=1}^{p} f_j(g_{i_j})] \times [0, \sum_{j=p+1}^{n} f_j(1-g_{i_j})]$. ■

Dès que l'on connait la restriction de D_f^θ à $Sh(g)$ on peut avoir l'expression de D_f^θ dans tout $\underset{\sim}{P}(X)$ au moyen de l'union des domaines où $\theta = +$, obtenus par moyen de l'equation fonctionnelle du § 3.

BIBLIOGRAPHIE

(1) L. A. ZADEH, Fuzzy Sets, Inf. and Control (1965), 8, 338-353.

(2) E. TRILLAS et T. RIERA, Entropies in Finite Fuzzy Sets, Inf. Sci. (1978), 15, 159-168.

(3) A. DeLUCA et S. TERMINI, A definition of a non-probabilistic Entropy in the setting of Fuzzy Sets Theory, Inf. and Control (1972), 20(4), 301-312.

(4) J. KAMPÉ de FÉRIET, Mesure de l'information fournie par un evenement, dans "Les probabilités sur les estructures algébriques" (1970), C.N.R.S., 191-221.

Departament de Matemàtiques i Estadística
Escola Tècnica Superior d'Arquitectura
<u>Universitat Politècnica de Barcelona</u>
Diagonal, 649. Barcelona (28).
-ESPAGNE-