STOCHASTICA, Vol.III nº 1 (1979)

SEMEJANZAS EN f-ANILLOS

por

J. Grané

Sea A un anillo reticulado f-anillo unitario.

Definición 1.- Una aplicación $\sigma:A \to A$ se llama semejanza, si cumple

$$d(x,y).d(\sigma(z),\sigma(t)) = d(z,t).d(\sigma(x),\sigma(y))$$

cualesquiera que sean $x,y,z,t \in A$, y siendo d la distancia natural $d(x,y) = |x-y|$.

Es evidente que si σ es una isometría, en particular es una semejanza, como se desprende de una comprobación directa.

Sea $\alpha \in A$. La aplicación $\sigma_\alpha:A \to A$ dada por $\sigma_\alpha(x) = \alpha.x$ es una semejanza pues

$$|\sigma_\alpha(x)-\sigma_\alpha(y)| = |\alpha| \ . \ |x-y|$$

Esta aplicación se llamará homotecia de razón α .

Una semejanza σ se llamará homogénea si $\sigma(0) = 0$.

Proposición 1.- Toda semejanza σ es producto de una semejanza homogénea por una traslación.

En efecto, sea σ una semejanza, y T la traslación que transforma $\sigma(0)$ en 0. Entonces

$$T \circ \sigma$$

es una semejanza que transforma el 0 en el 0.

<u>Proposición 2.-</u> El producto de semejanzas es una semejanza. La identidad es una semejanza. Para que una $\sigma : A \rightarrow A$ sea semejanza necesaria y suficiente que exista $K \in A$ tal que

$$|\sigma(x)-\sigma(y)| = |K| \; |x-y| \qquad (*)$$

para todo $x,y \in A$.

Las dos primeras propiedades son obvias. En cuanto a la tercera basta ver que si se cumple (*) vale la definición de semejanza, y que recíprocamente, si vale ésta, haciendo $z=1$, $t=0$ se obtiene (*) con $K=\sigma(1)-\sigma(0)$.

Sea ahora $\theta : A \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ una representación de A en un producto de totalmente ordenados, con θ morfismo de anillo unitario reticulado. Las condiciones de semejanza en A pueden traducirse al producto $\prod_{i \in I} A_i$.

Sea $x \in A$. Definimos, dada la semejanza homogénea σ que cumpla $|\sigma(x)| = |K| \; |x|$

$$J_x = \{ i \,|\, \sigma(x_i) = -K_i \, x_i \neq 0 \}$$
$$\bar{J}_x = \{ i \,|\, \sigma(x_i) = K_i \, x_i \}$$

y $J_\sigma = \bigcup_{x \in A} J_x$

Se verifica entonces como en [1] el siguiente

<u>Lema 1.-</u> $J_x = J_\sigma \cap \mathrm{sop}(K_x)$.

Deducimos que σ actúa multiplicando x por K, "cambiando de signo" sobre cierto conjunto de índices de I.

Haciendo $x = 1$ obtenemos

<u>Lema 2.-</u> $K_i = -(\sigma(1))_i$ si $i \in J_\sigma$

$K_i = (\sigma(1))_i$ si $i \notin J_\sigma$

En cualquier caso se cumple $\sigma(x_i) = (\sigma(1))_i \, x_i$ de donde

$$\sigma(x) = \sigma(1).x$$

Podemos pues establecer la siguiente

<u>Proposición 3.-</u> Toda semejanza homogénea es una homotecia. Toda semejanza es una transformación del tipo $\sigma(x)=\alpha x+\beta$ $\alpha, \beta \in A$

Se cumple la siguiente propiedad de demostración inmediata.

<u>Proposición 4.-</u> Una semejanza admite inversa si y sólo si la razón α es un elemento invertible del anillo.

El conjunto de semejanzas invertibles forma un grupo con la operación de multiplicación. El conjunto de homotecias invertibles de A forma un grupo isomorfo al grupo multiplicativo A*.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. GRANÉ, "Sobre las isometrías de los grupos y anillos reticulados", Tesis doctoral, Universidad de Barcelona, 1976.

[2] J. TRIAS, "Contribució a l'estudi dels anells reticulats i f-anells", Tesis doctoral en curso de presentación en la Universidad de Barcelona.

[3] A. BIGARD, K. KEIMEL, S. WOLFENSTEIN, "Groupes et anneaux réticulés". Lecture Notes on Mathematics, n°. 608, Springer-Verlag.

Facultat d'Informàtica
Univ. Politècnica de Barcelona.