STOCHASTICA, Vol.III, nº 1 (1979)

SOBRE FUNCIONES DE NEGACION EN LA TEORIA DE CONJUNTOS DIFUSOS

por

E. Trillas(*)

0. Resumen.

En su trabajo de 1973, ya clásico, Bellman y Giertz probaron que $\underset{\sim}{P}(X)$ es un retículo distributivo con máximo y mínimo sólo (con hipótesis muy razonables) bajo las usuales definiciones $(A \cup B)(x)=$ $\max\{A(x),B(x)\}$, $(A \cap B)(x)=\min\{A(x),B(x)\}$, tratando escasamente el formalismo analítico relativo a la negación. En el presente trabajo se prueba que tal $\underset{\sim}{P}(X)$ es un álgebra de DeMorgan si y sólo si la función de negación posée generador aditivo y que tales negaciones constituyen, en un cierto grupo de funciones monótonas, la clase de conjugación de la negación $N(x)=1-x$. Se concluye con algunas observaciones informales relativas a las relaciones lógicas entre evaluación y negación.

1. Preliminares.

Dado un universo de discurso X, Zadeh[1] definió los subconjuntos difusos de X como aplicaciones $A: X \to [0,1]$, de manera que el número $A(x)\in[0,1]$ refleje el grado de pertenencia de $x\in X$ al subconjunto difuso A.

Si $J \subset [0,1]$ es tal que $\{0,1\} \subset J$, escribiremos $P_J(X)$ en lugar de J^X, excepto si $J=\{0,1\}$ en que escribiremos $P(X)$, identificando los

(*) Este trabajo está dedicado al Prof. Lotfi Zadeh, en testimonio de amistad y estima.

subconjuntos clásicos de X con sus funciones características, y si $J=[0,1]$ en que escribiremos $\underset{\sim}{P}(X)$. Para toda J es $P(X) \subset P_J(X)$.

Para extender a los subconjuntos difusos de $P_J(X)$ las nociones de unión e intersección, son posibles varias definiciones pero, como han probado Bellman y Giertz[2], bajo hipótesis absolutamente razonables las únicas posibles para obtener un retículo distributivo (si $J=[0,1]$) con mínimo $\emptyset(x)=0$ y máximo $X(x)=1$, son las $(A \cup B)(x)=\text{máx}\{A(x),B(x)\}$ y $(A \cap B)(x)=\text{mín}\{A(x),B(x)\}$, para cada $x \in [0,1]$. Tales operaciones, en los casos $P_J(X)$, siguen dando la misma estructura reticular básica que, en P(X), es la correspondiente a la dada por la "contención" usual de la teoría de conjuntos. Puede contemplarse $P_J(X)$ como la "teoría de conjuntos" asociada a una lógica multivalorada sobre J, en la que los valores de la conjunción y de la disjunción vengan dados por $v(p \vee q)=\text{máx}\{v(p),v(q)\}$, $v(p \wedge q)=\text{mín}\{v(p),v(q)\}$, respectivamente (vid. (3)).

Bellman y Giertz dejaron abierto el estudio de aquellas funciones $n:J \to J$ tales que el difuso $\bar{A}$, definido por $\bar{A}(x)=n(A(x))$, verifique el mayor número posible de las propiedades del complemento clásico. Zadeh, en su formulación inicial (1), adoptó la función $N(x)=1-x$ al igual que se hace en Lógica multivalorada; designaremos tal función por $N=1-j$, siendo j la identidad de J.

<u>Definición[4].</u> Una función $n:J \to J$ es una <u>función de negación</u> para $P_J(X)$ si verifica: 1) $n(0)=1$, $n(1)=0$; 2) n es decreciente. Es n una función de negación ordinaria si verifica 3-o) $n(n(x)) \geqslant x$. Es n una función de negación débil si verifica 3-d) $n(n(x)) \leqslant x$. Si valen 3-o y 3-d se verifica 3-f) $n^2=j$, y se dice que n es una función de negación fuerte.

Está claro que con una función de negación se garantiza que si $A \in P_J(X)$ también $\bar{A} \in P_J(X)$, así como la validez de las leyes de DeMorgan $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, cualesquiera que sean $A,B \in P_J(X)$. Si $A \in P(X)$ es $\bar{\bar{A}} = A$; además $\bar{\emptyset} = X$, $\bar{X} = \emptyset$. Por tanto, el álgebra de Boole P(X), de las partes clásicas de X, está contenida en la estructura $(P_J(X),\cup,\cap,-;\emptyset,X)$ la cual, si la función de negación n es fuerte, es un álgebra de DeMorgan[5,6,7] (o soft-algebra, o MV-algebra o quasi-álgebra de Boole) al verificarse $\bar{\bar{A}} = A$, para todo $A \in P_J(X)$. Si n es función de negación ordinaria será $A \subset \bar{\bar{A}}$, en tanto que si es débil $\bar{\bar{A}} \subset A$, para todo $A \in P_J(X)$.

La siguiente serie de resultados se comprueba inmediatamente.

Teorema 1.1. a) Si n verifica $n(x)=0$ ssi $x=1$ ($n(x)=1$ ssi $x=0$) los únicos elementos de $P_J(X)$ para los que vale el tercero-excluido $A \cup \bar{A} = X$ (el principio de no-contradicción $A \cap \bar{A} = \emptyset$) son los $A \in P(X)$. b) Si los únicos elementos de $P_{J(X)}$ que verifican el principio de no-contradicción (el tercero-excluido) son los de $P(X)$, n verifica $n(x)=0$ ssi $x=1$ ($n(x)=1$ ssi $x=0$).

Está claro, por consiguiente el

Corolario. a) Si n verifica $0<n(x)<1$ ssi $0<x<1$, los únicos booleanos de $P_J(X)$ son los elementos de $P(X)$. b) La única función de negación para la que el tercero-excluido (el principio de no-contradicción) vale universalmente en $P_J(X)$, es la débil $n_o(x)=1$ si $x<1$, $n_o(1)=0$ (es la ordinaria $n^o(x)=0$ si $0<x$, $n^o(0)=1$. c) Para ninguna función de negación valen universal y simultáneamente en $P_J(X)$, con $J \neq \{0,1\}$, los principios de no-contradicción y del tercero-excluido.

Como resultado básico, vale el

Teorema 1.2. Para cada conjunto no vacio X, con $\{0,1\} \subset J \subset [0,1]$ provisto de una función de negación fuerte n, el conjunto $P_J(X)$ dotado de las operaciones $\bar{A}(x)=n(A(x))$ y $(A \cup B)(x)=\text{máx}\{A(x), B(x)\}$, para todo $x \in X$, es un álgebra de DeMorgan en la cual $(A \cap B)(x)=\text{mín}\{A(x),B(x)\}$ para todo $x \in X$ y $A \subset B$ ssi $\bar{B} \subset \bar{A}$. $P_J(X)$ es un álgebra de Boole si y sólo si $J=\{0,1\}$. El caso de Zadeh corresponde a tomar $J=[0,1]$ y $n=N$.

2. Caracterización de las funciones de negación fuerte en [0,1].

Lema 2.1. Si $f: J \to J$ es una función creciente, biyectiva y tal que $f(0)=0$, la función $n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$, para cada $x \in J$ y con $0<f(1) \in J$, es de negación fuerte para J.

En efecto, se cumplen evidentemente las condiciones 1,2 de la definición. Además, $n(n(x))=f^{-1}(f(1)-f(n(x)))=f^{-1}(f(x))=x$.

Si $\frac{1}{2}f(1)\in J$, la negación n tiene un único punto fijo (solución única de la ecuación $n(s)=s$), el punto $s=f^{-1}(\frac{1}{2}f(1))$; diremos de s que es el <u>punto de simetría</u> o nivel de designación[9] de n y de f que es un <u>generador aditivo</u> de n. Para $N=1-j$, es $s=1/2$ y $f=j$. Evidentemente $0<s<1$.

<u>Lema 2.2.</u> Si $n:J\to J$ es una función de negación fuerte para J, con punto de simetría $s\in J$, existen generadores aditivos de n.

En efecto, s es único. Sea $h:J\cap[0,s]\to J\cap[0,a]$, con $0<a<1$ tal que $h(s)=a, h(0)=0$ y h creciente y biyectiva. La función $f:J\to J$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases} h(x) & , \text{ si } x\in J\cap[0,s] \\ 2a-h(n(x)) & , \text{ si } x\in J\cap(s,1] \end{cases}$$

es un generador aditivo de n, puesto que $f(0)=0$ y si,

- $x\in J\cap[0,s)$, es $n(x)\in J\cap(s,1]$ y $f(n(x))=2a-h(n(n(x)))=2a-f(x)$.
- $x=s$, es $f(n(s))+f(s)=a+a=2a$.
- $x\in J\cap(s,1]$, es $n(x)\in J\cap[0,s)$ y $f(n(x))+f(x)=h(n(x))+2a-h(n(x))=2a$.

Para todo $x\in J$ es, por tanto, $f(n(x))+f(x)=2a$ y como f es biyectiva y $2a=f(1)$ es $n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$. Además, f es creciente en $J\cap[0,s]$ y en $J\cap(s,1]$; si $x\in J\cap[0,s]$, $y\in J\cap(s,1]$ es $h(x)\leqslant a$ y también $h(n(y))<a$, por lo cual es $a<2a-h(n(y))$ y $f(x)<f(y)$: f es creciente en J. Es un generador aditivo de n.

En conclusión,

<u>Teorema 2.1.</u> Una función $n:J\to J$ es de negación fuerte con un punto de simetría, si y sólo si existen funciones $f:J\to J$ crecientes, biyectivas y con $f(0)=0$, tales que $n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$, para cada $x\in J$, con $0<f(1)\leqslant 1$ arbitrario en J.

<u>Corolario.</u> Las únicas funciones de negación fuerte en $[0,1]$ son las del tipo $n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$, con $f:[0,1]\to[0,1]$ creciente, biyectiva, $f(0)=0$ y $0<f(1)\leqslant 1$ arbitrario.

En efecto, al ser n contínua en $[0,1]$ existe solución de la ecuación $n(x)=x$ y se aplica el teorema 2.1. Por ejemplo, con $f(x)=mx$ se obtiene n=N y con $f(x)=mx^2$ se obtiene $n(x)=+\sqrt{1-x_2}$ (negación circular).

3. Geometría de las negaciones.

I. Se comprueba inmediatamente que: a) Las funciones de negación fuerte son biyecciones de J; b) Una función de negación ordinaria y biyectiva es fuerte; c) Una función de negación débil y biyectiva es fuerte. Habrá que buscar, por tanto, las negaciones débiles y ordinarias de [0,1] entre aquellas que tengan puntos de discontinuidad.

Además, <u>hay tantas funciones de negación ordinarias como débiles.</u> En efecto, para cada función de negación n, la función $\bar{n}$ = NonoN ($\bar{n}(x)=1-n(1-x)$) es otra función de negación tal que $\bar{n}^2$=Non^{2}oN, por lo que:

a) $\bar{\bar{n}} = n$, ya que $N^2=j$.

b) si n es ordinaria, $\bar{n}$ es débil.

c) si n es débil, $\bar{n}$ es ordinaria.

Queda claro, por consiguiente, que en [0,1] las gráficas de las funciones de negación ordinarias se deducen de las débiles mediante la simetría respecto del punto (1/2,1/2).

II. Es evidente el papel que desempeñan las funciones monótonas. Sea M(J) el grupo que, respecto de la composición, constituyen todas las funciones $f:J \to J$ biyectivas, monótonas (crecientes o decrecientes) y tales que $\{f(0),f(1)\} = \{0,1\}$. Sea F(J) el subconjunto de las funciones de negación fuerte y F'(J) el de las que, además, tienen punto de simetría en J.

Consideremos la clasificación de M(J) en clases de conjugación por la equivalencia usual $f \sim f'$ si y sólo si $f= gof'og^{-1}$, $g\in M(J)$. Sea (N) la clase de conjugación de N=1-j.

<u>Lema 3.1.</u> Es $F'(J) \subset (N)$.

En efecto, si n es de F'(J) tiene un generador aditivo f por el teorema 2.1. Si $g = \frac{1}{f(1)}\, f$ (biyectiva, creciente, $g(0)=0, g(1)=1$), de

$n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$ se deduce $g(n(x))=1-g(x)=N(g(x))$, para todo $x\in J$. Luego $N=gonog^{-1}$, siendo $g\in M(J)$.

Lema 3.2. Es $(N)\subset F(J)$.

En efecto, sea $f=hoNoh^{-1}$, con $h\in M(J)$. Tanto si h es creciente como si es decreciente, f es decreciente. Es $f(f(x))=h(1-h^{-1}(f(x)))=$ $=h(h^{-1}(x))=x$. Además, $f(0)=h(1-h^{-1}(0))=1$ ya que si $h^{-1}(0)=0$ es $h(1)=$ $=1$ y si $h^{-1}(0)=1$ es $h(0)=1$; con todo ello, $f(1)=f(f(0))=0$. Así $f\in F(J)$.

Lema 3.3. Si $1/2\in J$, es $(N)\subset F'(J)$.

En efecto, si $f\in(N)$ es $f(x)=h(1-h^{-1}(x))$, para toda $x\in J$, con $h\in M(J)$. Por el lema anterior ya es $f\in F(J)$; es $f(x)=x$ si y sólo si $1=2.h^{-1}(x)$, por lo que $s=h(1/2)$ es el punto de simetría de f que, por tanto, es de $F'(J)$.

Como consecuencia de los lemas 3.1 y 3.3, vale el

Teorema 3.1. Si $1/2\in J$, es $(N)=F'(J)$.

Por consiguiente,

Corolario. Las funciones de negación fuerte en $[0,1]$ constituyen la clase de conjugación, en el grupo $M([0,1])$, de la función de negación $N=1-j$.

Así pués, no parece existir ningún motivo interno especial para preferir cualquier otra función de negación fuerte a la 1-j.

III. Dadas dos funciones de negación n y n', la función v=n'on (biyectiva, creciente, $v(0)=0, v(1)=1$) verifica von=n' y n'ov=n; es decir, mediante $v\in M(J)$ se "traslada" un "complementario" de $P_J(X)$ en otro, también dado. Por ejemplo, dada $n\in F'(J)$, la función $v_n=Non$ (simétrica de n respecto de la recta y=1/2, si $J=[0,1]$) verifica $v_n on=N$, $nov_n=\bar{n}$ y define la negación fuerte $n_{v_n}(x)=v_n^{-1}(1-v_n(x))=$ $=noNon(x)$, coincidente con n si y sólo si n=N. Obsérvese que es $n_{v_n}(x)=x$ si y sólo si $v_n(x)=1/2$, equivalente a $x=n(1/2)$.

Todo ésto es bastante general. Si $w:[0,1]\to[0,1]$ es biyectiva, decreciente y tal que $w(1)=0, w(0)=1$, para cada $n\in F([0,1])$ la función w_n = won es biyectiva, creciente y tal que $w_n(0)=0, w_n(1)=1$; es un ge nerador aditivo y da la negación fuerte $n_{w_n}(x)=nw^{-1}(1-wn(x))$ coincidente con n si y sólo si $n(x)=w^{-1}(1-x(x))$. En el caso particular n=N es $N_{w_N}=N$ ssi $w(1-x)+w(x)=1$, y la biyección creciente w_N=woN define nuevamente N. Obsérvese que las funciones w con las que, via N, se obtiene de nuevo N, pasan por el punto (1/2,1/2) y basta definirlas arbitrariamente decrecientes y biyectivas en [0,1/2], con w(0)=1, para que en (1/2,1] valgan w(x)=1-w(1-x). Nótese que es $n_{w_n}(x)=x$ ssi $w_n(x)=1/2$ ssi $x=n(w^{-1}(1/2))$.

IV. Tratemos ahora el problema de determinar las funciones de M(J) que "trasladan" negaciones en negaciones.

<u>Lema 3.4.</u> Sea $n\epsilon F'(J)$ con punto de simetría $s\epsilon J$. Las únicas funciones $v:J \to J$, crecientes, biyectivas, v(0)=0 y v(1)=1, tales que tanto von como nov sean de F'(J) con punto de simetría s, son las del tipo

$$v(x) = \begin{cases} h(x) & , \text{ si } x\epsilon J\cap[0,s] \\ nh^{-1}n(x) & , \text{ si } x\epsilon J\cap(s,1] \end{cases}$$

con $h:J\cap[0,s] \to J\cap[0,s]$ una función creciente, biyectiva, h(0)=0,h(s)=s.

Demostración. Está claro que tanto von como nov son biyecciones decrecientes que pasan por (0,1) y (1,0) que, para ser funciones de negación fuerte deberán verificar vonovon=j, novonov=j o equivalentemente n=vonov. Debemos resolver, por tanto, la ecuación funcional $n(x)=v(n(v(x)))$ para todo $x\epsilon J$.

a) Las soluciones de ésta ecuación son del tipo citado. En efecto, si v es una de ellas y nov, von tienen el mismo punto s de simetría, como v(s)=s ya que n(s)=s=n(v(s)), existe la restricción de v a $J\cap[0,s]$, que llamaremos h. Tal h es biyectiva, creciente, h(0)=0, h(s)=s. Si $x\epsilon J\cap(s,1]$, es $n(x)\epsilon J\cap[0,s)$ y v^{-1} on=nov, por lo que $v^{-1}(n(x))= =h^{-1}(n(x))=n(v(x))$, de donde $v(x)=nh^{-1}n(x)$.

b) Sea v una función del tipo del enunciado. Es v(0)=0,v(1)=1 y v es creciente en $J\cap[0,s]$. Si $x,y\epsilon J\cap(s,1]$, $x<y$, entonces $nh^{-1}n(x)<nh^{-1}n(y)$ y v es creciente en $J\cap(s,1]$. No hay problema en que v es creciente en todo J y es biyectiva, ya que en s es $nh^{-1}n(s)=nh^{-1}(s)=n(s)=s=h(s)$. Además v verifica la ecuación funcional, ya que si:

- $x=s$, es $vnv(s)=vn(s)=s=n(s)$.
- $s<x$, es $v(x)=nh^{-1}n(x)$, $n(x)<s$ y $h^{-1}n(x)<s$: $vnv(x)=vnnh^{-1}n(x)=$ $=v(h^{-1}n(x))=hh^{-1}n(x)=n(x)$.
- $x<s$, es $v(x)=h(x)$ y $nh(x)>s$: $vnv(x)=vnh(x)=nh^{-1}nnh(x)=n(x)$.

Está claro que $nv(s)=s=vn(s)$.

Obsérvese que con $h(x)=1-n(x)$ es $v=v_n$ (vid. III) y que $vn=N$ ssi $v(x)=1-n(x)$, y que $nv=N$ ssi $v(x)=n(1-x)$.

Teorema 3.2. Si $v:J \to J$ es una función creciente, biyectiva, $v(0)=0, v(1)=1$, tal que para toda $n\in F'(J)$ es $von \in F'(J)$ y con el mismo punto de simetría (id., con nov), es $v=j$.

En efecto, para cada punto $x\in J$ existen funciones de negación fuerte que lo tienen como punto de simetría, p. ej., la constituida por los dos segmentos que unen $(0,1)$ con (x,x) y (x,x) con $(1,0)$, respectivamente. Por consiguiente, en virtud del lema 3.4 es $v(x)=x$, para todo $x\in J$.

V. En la teoría de Zadeh es fácil "dibujar" $\bar{A}$, dado A: su gráfica es la simétrica de la de A respecto de la recta $y=1/2$. Cuando se adopta una función n de negación fuerte, se deberá efectuar la composición $noA=\bar{A}$, con lo que, si también $A(x)=0$ implicará $\bar{A}(x)=1$, $A(x)=1$ implicará $\bar{A}(x)=0$ y las gráficas se cortarán sobre la recta $y=s$ (justificándose así el nombre de punto o nivel de simetría), la gráfica de $\bar{A}$ se presentará deformada respecto de la de A según sea n. Podrá adoptarse la función de negación fuerte del tipo que sea conveniente para obtener, en la gráfica de $\bar{A}$, las deformaciones que se deséen, fijado un nivel de simetría.

Así, por el punto (s,s) y del tipo dos-segmentos, sólo existe la función de negación fuerte $n(x)=(s-1/s).x+1$, si $x\leqslant s$ y $n(x) =$ $= (s/s-1).x -(s/s-1)$, si $s<x$; con ella es $|\bar{A}(x)-s|= (1-s/s).|A(x)-s|$, si $A(x)\leqslant s$ y $|\bar{A}(x) -s|= (s/1-s).|A(x)-s|$, si $s<A(x)$. Por tanto, $1-s/s$ y $s/1-s$ son los factores de deformación[2], por debajo y por encima del nivel de simetría respectivamente, causados por n y que valen 1 si y sólo si $s=1/2$.

VI. Fijada $n\in F'([0,1])$, llamaremos subconjunto clásico más próximo[8] a cada $A\in \underset{\sim}{P}(X)$, al $\underline{A}$ definido por $\underline{A}(x)=0$ si $A(x)\leqslant s$, $\underline{A}(x)=1$ si

$A(x)>s$. Es decir, $\underline{A}$ es la función característica de $\{x\in X;\ s<A(x)\}$. Es una comprobación fácil que $\underline{A} \cap \underline{(\bar{A})} = \emptyset$, en tanto que $\underline{A} \cup \underline{(\bar{A})} = \overline{A^{-1}(s)}$.

4. Comentarios informales para una Lógica de la evaluación.

I. En el razonamiento lógico la operación fundamental es la implicación $p \to q$ que suele definirse por $\neg p \vee q$, tanto en el cálculo proposicional clásico, como en el multivalorado y en el cuántico[9]. No obstante, parece establecido que en el razonamiento natural[10] no se sigue necesariamente la implicación así definida, lo que de alguna manera impone una rotura con las lógicas anteriores.

En el modelo lógico que brinda la teoría de los subconjuntos difusos en $[0,1]$ (vid. (3)), la implicación no puede traducirse por $\bar{A} \cup B$, ya que al ser $A \cup \bar{A} \neq X$ no sería $A \to A$, salvo si $n=n_o$. Si se adopta la suma acotada $A \oplus B(x)=\min\{1, A(x)+B(x)\}$, entonces la definición $A \to B = \bar{A} \oplus B$, verifica $A \to \emptyset = X \cap (\bar{A} + \emptyset) = \bar{A}$ y $A \to A = X \cap (\bar{A} + A)$ que será X con sólo que $\bar{A} \subset 1-A$, es decir, con sólo que $n(x) \leqslant 1-x$, lo que siempre es posible por conjugación (vid. 3.III; basta tomar $\bar{n}$, simétrica de n respecto $y=1-x$). Si $n=N$, se trata de la implicación de Łukasiewicz, ya que $(A \oplus B)(x)=\min\{1, 1-A(x)+B(x)\}$. Y de limitar la discusión a implicaciones de éste tipo, el problema se centra sólo en n. ¿Existen <u>motivos externos</u> para elegir $n \neq N$?.

Es posible que para ciertas cuestiones la negación que la mente adopta, a través del aprendizaje, venga dada por la propia naturaleza de las cosas cuya evaluación sea, aquella, capaz de realizar. Posiblemente una valoración no necesariamente numérica.

El concepto de valoración para retículos (11,12) puede no ser exclusivamente numérico. A partir de K. Menger[13], y en los últimos años, hemos desarrollado[14], precisamente, el estudio de valoraciones a valores en semigrupos ordenados en la creencia de que "evaluar" es una respuesta (reflexiva o no) no necesariamente numérica. Ello no significa una falta de reconocimiento de las necesidades de medición de las ciencias experimentales, pero hasta en muchos pasajes de la obra de Boole[15] ya existe una marcada preocupación por distinguir las posibilidades de formalización lógica con los sucesos, de las posibilidades con sus medidas (evaluación por medio de la probabilidad, en tal caso).

II. Limitémonos, no obstante, al caso de valoraciones $v: L \to R^+$ crecientes, de un retículo con mínimo 0, universal u y con un verdadero complemento-. Sea en R^+ una estructura de semigrupo, con neutro 0, respecto de una operación $*$. De la definición $v(a\vee b)*v(a\wedge b)=v(a)*v(b)$ [14], si $v(0)=0$, resulta que si $a\wedge b=0$ es $v(a\vee b)=v(a)*v(b)$. Aceptando $v(u)=1$ (que da un status especial al 1) se tendrá $1=v(a)*v(\bar{a})$ y, <u>si es posible despejar,</u> será $v(\bar{a})=n(v(a))$, de manera que $n: v(L) \to v(L)$ verifica $n(1)=0, n(0)=1$ y es decreciente en $v(L) \subset R^+$. Así, n es una función de negación en $v(L)$, de cuyo carácter poco puede decirse en general pués si, p. ej., con $0<v(a)<1$ es $v(\bar{a})=1$, será $v(a)=v(\bar{\bar{a}})=n(v(\bar{a}))=0 \leqslant n^2(v(a))$, etc.

Es inmediato que si $f: R^+ \to R^+$ es una biyección creciente con $f(0)=0$, la operación $F(x,y)=f^{-1}(f(x)+f(y))$ dota a R^+ de estructura de semigrupo conmutativo, ordenado y neutro 0. De hecho, muchas operaciones asociativas de R^+ son de éste tipo[16]. Si la anterior $*$ es de éste tipo, de $1=f^{-1}(f(v(a))+f(v(\bar{a})))$ se deduce $n(x)=f^{-1}(f(1)-f(x))$ que es una función de negación fuerte; éste es el caso de las medidas de probabilidad para álgebras de Boole, en que de $p(a)+p(\bar{a})=1$ se obtiene $p(\bar{a})=(Nop)(a)$. Esta es una idea que ya fué vista por B. de Finetti[17] en sus estudios sobre la probabilidad subjetiva, al considerar "iguales" a p y a fop.

Las funciones de negación fuerte aparecen así como muy próximas a los problemas de evaluación aditiva y se abre la discusión de si, desde el punto de vista de la medida-difusa, las operaciones que las generan son las más indicadas (con una estructura en los sucesos como la supuesta). Desde un tal punto de vista, es chocante que $A \cup \bar{A} \neq X$ en tanto que $A(x)+\bar{A}(x)=X(x)$.

He aquí algunos ejemplos ilustrativos extraidos de la bibliografía sobre conjuntos difusos.[18]

III. M. Sugeno[19] consideró las medidas g_t $(-1<t)$ verificando $g_t(a\vee b)= g_t(a)+g_t(b)+t.g_t(a).g_t(b)$, si $a\wedge b=0$. Corresponden a la operación $F_t(x,y)=x+y+t.xy$ de R^+ que, si $t\neq 0$, tiene el generador aditivo $f_t(z)= =\frac{1}{t}\log(1+tz)$ y que induce la negación fuerte $n_t(x)=\frac{1-x}{1+tx}$, con punto de simetría $s=\sqrt{t+1}-1$. En el caso límite $t=-1$, es $n_{-1}=n_0$.

Obsérvese que $f_t^{-1}(z)=1/t(e^{tz}-1)$ permite comprobar fácilmente

$F_t(x,y)=f_t^{-1}(f_t(x)+f_t(y))$. No obstante, f_t^{-1} ha sido obtenido (siguiendo (17)) suponiendo que es diferenciable y que es un morfismo de las estructuras dadas por la suma y F_t (es generador aditivo!), con lo que de $f_t^{-1}(x+y) = F_t(f_t^{-1}(x), f_t^{-1}(y))$ se llega, derivando respecto x e y, a la ecuación diferencial $(f_t^{-1})'(z)/(1+t.f_t^{-1}(z))=k$ (constante), de donde $f^{-1}(z)=1/t(e^{ktz}-1)$. Tomar k=1 equivale a $f_t^{-1}(1)=e^t-t$.

IV. L. Zadeh[20] consideró medidas π verificando $\eta(a\vee b)=\text{máx}\{\pi(a),\pi(b)\}$, si $a\wedge b=0$. La operación máx, que transforma R^+ en semigrupo conmutativo ordenado y con neutro 0, no es del tipo anterior ya que si tuviese generador aditivo sería $f(\text{máx}(x,y))=f(x)+f(y)$, de donde $f(x)=0$. De $1=\text{máx}\ \{\pi(a),\ \pi(\bar{a})\}$ se sigue que existe, no obstante, una función de negación asociada: es la n_o.

V. M Sugeno y otros[21] consideraron medidas v_t verificando $v_t(a\vee b)=$ $= t(v_t(a)+v_t(b))+(1-t)\text{máx}\{v_t(a),v_t(b)\}$, si $a\wedge b=0$, con $t\in[0,1]$. Corresponden a operaciones $F_t(x,y)=t(x+y)+(1-t)\text{máx}\{x,y\}$, que no son asociativas en general. No obstante, de $1=tx+tn(x)+(1-t)\text{máx}\{x,n(x)\}$, se sigue $n_t(x)=1-tx$ si $x\leqslant 1/1+t$, y $n_t(x)=1/t(1-x)$ si $x>1/1+t$ (para $t\neq 0$); se trata de una negación fuerte del tipo dos-segmentos. Si t=0, se obtiene n_o. El generador aditivo de $n_t(t\neq 0)$ dará una operación asociativa que podría sustituir a la F_t.

VI. Son de gran interés las ideas y los ejemplos de A. Kaufmann en (22); en especial, el estudio de la variación de la familia n_t (de III) según los valores de t.

AGRADECIMIENTO. El autor agradece cordialmente al Dr. C. Alsina (Barcelona) la valiosa ayuda prestada durante la elaboración del presente trabajo.

BIBLIOGRAFIA.

(1) ZADEH, L., Fuzzy Sets., Inf. and Control, 8 (1965), 338-353.

(2) BELLMAN, R. - GIERTZ, M., On the Analytic Formalism of the Theory of Fuzzy Sets., Inf. and Sci., 5 (1973), 149-156.

(3) TRILLAS, E.-RIERA, T., On Booleanity Control in Infinitely Many-Valued Logic.
(En curso de publicación).

(4) ESTEVA, F., Negaciones en retículos completos., Stoch., I. 1 (1975), 49-66.

(5) CHANG, C. C., Algebraic Analysis of Many-Valued Logics., Trans. Amer. Math. Soc., 88 (1958), 467-490.

(6) PREPARATA, F.P.-YEH, R.T., Continuously Valued Logic., Journ. of Comp. and Syst. Sci., 6 (1972), 397-418.

(7) RASIOWA, H., "An algebraic Approach to Non-Classical Logics"., North-Holland, Amsterdam (1974).

(8) TRILLAS, E.-RIERA, T., Entropies for Finite Fuzzy Sets., Inf. Sci. 15 (1978), 159-168.

(9) BODIOU, G., "Théorie dialectique des probabilités", Cauthier-Villars, Paris (1964).

(10) DelVAL, J.-RIVIÈRE, A., Si llueve, Elisa lleva sombrero: Una investigación psicológica sobre la tabla de verdad del condicional. Revista de Psicol. Gener. y Apl., XXX, 13 (1975), 825-850.

(11) GLIVENKO, V., Géométrie des systèmes de choses normées., Amer. Maths. Jour., 58 (1936), 799-828.

(12) BIRKHOFF, G., "Lattice Theory"., Amer. Math. Soc., Colloquium Pubs. 25 (1967).

(13) MENGER, K., Statistical Metrics., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 28 (1942), 535-537.

(14) TRILLAS, E.-ALSINA, C., "Introducción a los espacios métricos generalizados"., Fund. J. March., Serie Universitaria 49. Madrid (1978).

(15) BOOLE, G., "An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities", Dover Pubs., Nueva York (1958).

(16) LING, C.H., Representation of Associative Functions., Public. Mathematicae, 12 (1965), 182-212.

(17) de FINETTI, B., Sul significato soggetivo della probabilità., Fund. Mathematica., XVII (1930), 298-329.

(18) BANON, G., Distinction entre plusieurs sous ensembles de mesures floues., Note Interne LAAS-AS, 78. I. 11 (Fevrier 1978).

(19) SUGENO, M., Theory of Fuzzy Integrals and its Applications., Ph. D. Thesis., Tokyo Inst. of Tech., Tokyo (1974).

(20) ZADEH, L., Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility., Fuzzy Sets and Systems., 1 (1978), 3-28.

(21) SUGENO, M.-TSUKAMOTO, Y.-TERANO, T., Subjective Evaluation of Fuzzy Objects., IFAC Symposium on Stochastic Control (1974).

(22) KAUFMANN, A., "Compléments sur les concepts flous. Recherches et Applications" , Tomo I, (manuscrito aún no publicado).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE BARCELONA
Departament de Matemàtiques i Estadistica
E.T.S. d'Arquitectura
Diagonal, 649. Barcelona (28). España.