STOCHASTICA Vol. II nº 4 (1978)

CÁLCULO DIFERENCIAL ESTOCÁSTICO PARA PROCESOS CON PARÁMETRO n-DIMENSIONAL

por

Marta Sanz Solé

ABSTRACT

In this paper we obtain a representation of semimartingalas in the plane by means of stochastic integrals. Some applications to the study of random Markov gaussian fields are given.

Introducción

Este trabajo contribuye a la generalización de la teoría de la integral y de las ecuaciones diferenciales estocásticas a funciones aleatorias con parámetro n-dimensional.

Un concepto básico en el desarrollo de esta teoría es el de <u>función aleatoria de Wiener</u> $W=\{W_z,\ z\in R_+^n\}$. Para introducirlo partimos del espacio de medida $(R^n, \mathcal{B}^n, m)$, donde $\mathcal{B}^n$ es la tribu de los borelianos de R^n y m la medida de Lebesgue, y sobre los borelianos de medida de Lebesgue finita definimos la función de conjunto $A \to X_A$ aleatoria, gausiana y aditiva, tal que $EX_A=o$, $\forall A\in\mathcal{B}^n$ y $E(X_A.X_B)=m(A\cap B)$, $\forall A,B\in\mathcal{B}^n$.

El autor desea expresar su agradecimiento al Profesor David Nualart por su contribución como director de este trabajo.

Si A_z es el rectángulo $[o,z)$ y para cada z de R_+^n definimos $X_{A_z} = W_z$, obtenemos una función aleatoria gausiana, nula en los hiperplanos coordenados, $EW_z = o$ y $E(W_z . W_{z'}) = \prod_{i=1}^{n} (z_i \wedge z_i')$, siendo $z=(z_i)_{i=1,\dots,n}$ y $z'=(z_i')_{i=1,\dots,n}$. Puede demostrarse ([8] y [10]) que si tomamos una versión separable, $(W_z)_{z\in R_+^n}$ tiene trayectorias contínuas.

En 1974 Wong y Zakai ([9]) inician el desarrollo de un cálculo diferencial estocástico multidimensional. Uno de los problemas que se plantean es el de generalizar un resultado que, en el caso unidimensional, permite expresar todo funcional del proceso de Wiener de cuadrado integrable y toda martingala de cuadrado integrable relativa a las σ-álgebras generadas por el proceso de Wiener como una integral estocástica de Itô. Dicha integral, extendida por Cairoli ([2]) al caso n-dimensional, resulta insuficiente para dar solución a este problema, incluso en situaciones particulares, siendo necesario introducir una integral estocástica doble respecto del proceso de Wiener. Como resultados fundamentales obtienen:

(1) Si $X_z = \Delta_{[o,z)} f(W_\alpha,\alpha)$, siendo $f(u,z)$ una función con derivadas parciales contínuas que verifica $D_1 f = D_2 f = o$, donde $D_1 = \frac{1}{2}\, y\, f''_{uu} + f'_x$, $D_2 = \frac{1}{2}\, x\, f''_{uu} + f'_y$, $z = (x,y)$ son los operadores de difusión correspondientes al proceso de Wiener en cada coordenada, resulta

$$X_z = \int_{A_z} f'_u(W_\alpha,\alpha)\, dW_\alpha + \iint_{A_z \times A_z} f''_{uu}(W_{\alpha\vee\alpha'},\alpha\vee\alpha')\, dW_\alpha dW_{\alpha'}.$$

y en consecuencia:

(2) Si X es una martingala de L^2 relativa a las σ-álgebras generadas por una función aleatoria de Wiener W, existen dos procesos ϕ y Ψ tales que

$$X_z = X_o + \int_{A_z} \phi_\alpha dW_\alpha + \iint_{A_z \times A_z} \Psi(\alpha,\alpha')\, dW_\alpha dW_{\alpha'}.$$

Posteriormente, en 1975, Cairoli y Walsh ([1]) estudian los procesos holomorfos en el plano. Si bien todo el trabajo está hecho en base a las martingalas, hay resultados respecto de la función aleatoria de Wiener que mejoran los obtenidos por Wong y Zakai en el artículo citado anteriormente.

Así, por ejemplo, introduciendo integrales estocásticas de línea y estableciendo una fórmula de Green estocástica obtienen una representación de $f(W_z)$ donde f ya no cumple necesariamente las condiciones restrictivas $D_1 f = D_2 f = o$.

En esta línea el objetivo fundamental de este trabajo es obtener teoremas de representación que mejoren y generalicen los contenidos en los trabajos que hemos citado anteriormente. Para ello, hacemos en primer lugar un estudio de las martingalas con parámetro n-dimensional y de todas las integrales estocásticas que nos serán necesarias. Abordamos a continuación el problema de la representación integral de semimartingalas en el plano. Finalmente aplicamos los resultados obtenidos al estudio de ciertas funciones aleatorias gausianas.

1. Martingalas

En este apartado recogemos, introducimos y relacionamos diferentes formulaciones del concepto de martingala. Esta diversidad de formulaciones se debe a que el orden que consideramos en R^n es el puntual, es decir

(1.1) $z<z' \Leftrightarrow z_i \leqslant z'_i,\ \forall i=1,\ldots,n,\ z=(z_i)_{i=1,\ldots,n}, z'=(z'_i)_{i=1\ldots n}$.

Este orden es <u>parcial</u> y el concepto de martingala depende del orden <u>total</u> de la recta real. Recordemos, por ejemplo, que la propiedad de martingala para un proceso $X=\{X_s, s\in R_+\}$ se expresa mediante la relación

(1.2) $E\{X_t - X_s / X_u,\ o \leqslant u \leqslant s\} = o, \quad \forall\ t>s,$

indicando que el incremento del proceso en el intervalo $[s,t]$ es ortogonal a la σ-álgebra del "pasado" del proceso. En nuestro caso tendremos distintas posibilidades de elegir la σ-álgebra del pasado.

A partir de ahora trabajaremos en un espacio de probabilidad base (Ω, A, P). $\{A_z, z \in R_+^2\}$ será una familia creciente, respecto del orden (1.1), de sub σ-álgebras de A tal que $A_{(o,o)}$ contiene todos los conjuntos negligibles de A. Una función aleatoria $X = \{X_z, z \in R_+^2\}$ será A_z-adaptada si X_z es A_z-medible $\forall\ z \in R_+^2$. X es a incrementos independientes si para toda familia de rectángulos $\Delta_i = [x_i, x_i') \times [y_i, y_i')$ disjuntos dos a dos, las variables aleatorias

$$X_{(x_i', y_i')} - X_{(x_i', y_i)} - X_{(x_i, y_i')} + X_{(x_i, y_i)}$$

son estocásticamente independientes. Supondremos que X es una función aleatoria integrable.

1.1.- Propiedad de martingala para funciones aleatorias con dos parámetros.

La relación (1.2) sugiere la siguiente definición:

X es martingala respecto del orden parcial (Wong) si: (a) X_z es A_z-adaptado. (b) $E(X_{z'}/A_z) = X_z, \ \forall\ z<z'$. Esta condición equivale a que X sea martingala sobre toda curva monótona y en particular implica la propiedad de martingala en cada coordenada.

Generalizando el concepto de proceso a incrementos independientes tenemos:

(1) X es martingala si: (a) X es A_z-adaptado y (b)

$E\{X(\Delta)/A_z\} = o, \Delta \cap A_z = \phi\ , \ A_z = [o,x) \times [o,y), \ z = (x,y).$

(2) X es i-martingala (i=1,2) si (a) X es A_z^i-adaptada, siendo

$A_z^1 = \bigvee_{t \geqslant o} A_{(x,t)}, A_z^2 = \bigvee_{s \geqslant o} A_{(s,y)}$ y (b) $E\{X(\Delta)/A_z^i\} = o,$

$\Delta \cap A_z^i = \phi, \ A_z^1 = [o,x) \times R_+, \ A_z^2 = R_+ \times [o,y), \ z = (x,y).$

Esta propiedad significa que el proceso como función de la i-ésima componente del parámetro es martingala.

(3) X es martingala <u>fuerte</u> si: (a) X es A_z-adaptado y nulo en los ejes, y (b) $E\{X(\Delta)/A_z^1 \vee A_z^2\} = o$, $\Delta \cap (A_z^1 \cup A_z^2) = \phi$.

(4) X es martingala <u>débil</u> si: (a) X es A_z-adaptado, y (b) $E\{X(\Delta)/A_z\} = o$, $\Delta \cap (A_z^1 \cup A_z^2) = \phi$.

Estas definiciones corresponden a tomar distintas regiones como pasado y futuro de un punto z; en el caso de martingala débil estas regiones son las compatibles con el orden puntual de R_+^2.

Todo proceso X que sea a incrementos independientes, nulo en los ejes y con función media constante es una martingala fuerte si tomamos como A_z la σ-álgebra generada por las variables X_α, $\alpha < z$. Así pues, la función aleatoria de Wiener con dos parámetros es una martingala fuerte.

La propiedad de martingala <u>fuerte</u> implica a todas las demás, mientras que la de martingala débil viene implicada por todas ellas. Entre las otras definiciones se establecen las siguientes relaciones.

Toda martingala es 1 y 2-martingala. El recíproco es cierto si el proceso es A_z-adaptado.

La condición de martingala implica la de martingala respecto del orden parcial si $\{X_{(x,o)}, A^1_{(x,o)}, x \geq o\}$ y $\{X_{(o,y)}, A^2_{(o,y)}, y \geq o\}$ son martingalas. Recíprocamente, toda martingala respecto del orden parcial es martingala si A_z^1, A_z^2 son condicionalmente independientes respecto de A_z.

<u>1.2.- Extensión de la propiedad de martingala a funciones aleatorias con parámetro n-dimensional.</u>

Si el espacio de parámetros es R_+^n las definiciones dadas en el apartado anterior, excepto la (2), se generalizan de manera inmediata. Como alternativa a la (2) adoptamos la siguiente:

(2') Consideremos $\{i_1,\ldots,i_k\} \in P\{1,2,\ldots,n\}$, $\{i_1,\ldots i_k\} \neq \phi$ y $A_z^{i_1,\ldots,i_k} = \{t/t_{i_1}=z_{i_1} \vee, \ldots, t_{i_k}\} A_t$. Diremos que X es <u>$(i_1,\ldots,i_k)$-martingala</u> si: (a) X es $A_z^{i_1,\ldots,i_k}$-adaptado y (b) $E\{X(\Delta)|A_z^{i_1,\ldots,i_k}\} = o, \Delta \cap A_z^{i_1,\ldots,i_k} = \phi$, $A_z^{i_1,\ldots,i_k} = \{x | o \leqslant x_i < z_i,\ i = i_1,\ldots,i_k\}$.

Esta definición significa que el proceso obtenido al haber fijado las componentes del parámetro correspondientes a $\{i_1,\ldots,i_k\}^c$ es martingala.

Nótese que una $(1,\ldots,n)$-martingala es martingala.

Las propiedades y relaciones que habíamos establecido en el apartado anterior contínuan siendo válidas; además si $\{i_1,\ldots,i_k\} = \{j_1,\ldots,j_\ell\} \cup \{h_1,\ldots,h_m\}$ (unión disjunta), todo proceso que sea $A_z^{i_1\ldots i_k}$-adaptado es $(i_1,\ldots,i_k)$-martingala si y solamente si es $(j_1,\ldots,j_\ell)$-martingala y $(h_1,\ldots,h_m)$-martingala ([7]).

2. Integrales estocásticas.

En este apartado estudiamos distintos tipos de integrales estocásticas que serán utilizadas después. En lo que sigue designaremos por $T = [o,1]^2$, $A_z = \sigma < W_\alpha, \alpha < z >$. $I_1(\phi) = \int_T \Phi_z dW_z$ será la integral del <u>primer tipo</u> o integral de Itô ([1]), [9]) y $I_2(\psi) = \iint_{T\times T} \Psi(z,z')dW_z dW_{z'}$, la integral del <u>segundo tipo</u> ([1],[9]), esta última se define como una integral estocástica doble en el sentido de Itô ([4]). La primera, como integral indefinida, es una martingala fuerte, mientras que la segunda es martingala. Una descripción detallada de las propiedades de ambas integrales se encuentra en las referencias dadas anteriormente.

En este trabajo nos ha resultado conveniente considerar una versión simplificada de la integral del segundo tipo, $\tilde{I}_2(\Phi) = \int_T \Phi_z d_1 W_z d_2 W_z$.

Esta integral se define para procesos $\Phi = \{\Phi_z, z \in T\}$ medibles, A_z-adaptados y tales que $\int_T E(\Phi_z)^2 x\ y\ d\ z < \infty$, tomando, a nivel infinitesimal, incrementos de la función aleatoria de Wiener en cada ordenada.

La construcción detallada se hace por el procedimiento usual, dando primero la definición para procesos Φ simples, estableciendo una isometría entre el conjunto E de procesos simples dotado de la norma $\|\Phi\|^2 = \int_T E\ \Phi_z^2\ x\ y\ d\ z$ y el espacio de Hilbert $L^2(\Omega, A, P)$, que permite extender la definición de $\tilde{I}_2$ a los procesos de $\bar{E}$. De las propiedades de esta integral destacamos su relación con I_2:

<u>Proposición 2.1.1.</u> Si Φ es $\tilde{I}_2$-integrable y definimos $\Psi(z, z', \omega) = \Phi(z \vee z', \omega) . 1_G(z, z')$, con $z, z' \in T$ y $G = \{(z, z') \in T x T / z, z'$ no son comparables$\}$, resulta: (a) Ψ es I_2-integrable y (b) $I_2(\Psi) = 2\ \tilde{I}_2(\Phi)$.

De esta Proposición se deduce en particular que $\{\tilde{I}_2(\Phi . 1_{A_z}), z \in T\}$ es <u>martingala.</u>

Las integrales que hemos citado hasta ahora resultan insuficientes para establecer teoremas de representación de funciones aleatorias que sean "semimartingala". Debemos introducir integrales en las que intervengan incrementos de la función aleatoria de Wiener, es decir estocásticos, y incrementos deterministas. Es natural llamarlas integrales estocásticas <u>mixtas</u>, la construcción de las mismas se hace del siguiente modo:

Sea $M^2(T)$ el conjunto de procesos $\Phi = \{\Phi_z, z \in T\}$ medibles, A_z^1-adaptados y tales que $\int_T E(\Phi_z^2)\ y\ d\ z < \infty$. Para los procesos simples de $M^2(T)$, es decir, para los que existe una partición de

T, $\{\Delta_\nu\}_{\nu=1,\dots,k}$, $\Delta_\nu = [x_\nu, x'_\nu) \times [y_\nu, y'_\nu)$ y $\Phi = \sum_{\nu=1}^{k} \Phi_\nu 1_{\Delta_\nu}$

definimos:

$$\tilde{I}_3(\Phi) = \sum_{\nu=1}^{k} \Phi_\nu \, W(\Delta^1_\nu)(y'_\nu - y_\nu),$$

siendo

$$W(\Delta^1_\nu) = W_{(x'_\nu, y_\nu)} - W_{(x_\nu, y_\nu)}.$$

Se cumplen las siguientes propiedades:

(i) Linealidad.

(ii) Cálculo como una integral iterada: $\tilde{I}_3(\Phi) = \int_0^1 [\int_0^1 \Phi_{(x,y)} \, d\, W_{(x,y)}] dy$.

(iii) $E(\tilde{I}_3(\Phi))^2 \leq \int_T E\Phi_z^2 \, y \, dz$.

(iv) $E(\tilde{I}_3(\Phi)) = 0$.

(v) $\{I_3(\Phi . 1_{A_z}), z \in T\}$ es <u>1-martingala.</u>

Consideremos la aplicación

$$E \subset M^2(T) \to L^2(\Omega, A, P).$$
$$\Phi \to \tilde{I}_3(\Phi)$$

Si en $M^2(T)$ consideramos la norma definida por $\|\Phi\|^2 = \int_T E\, \Phi_z^2 \, y \, d\, z$, la propiedad (iii) permite extender la definición a todo proceso que sea límite de procesos simples (en la convergencia dada por la norma anterior). La integral extendida cumple las propiedades (i) a (v), tambien se cumple

(vi) $E(\tilde{I}_3(\Phi))^2 = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 E\,(\Phi_{(x,y)} \cdot \Phi_{(x,y')})(y \wedge y') \, dx dy dy'$.

Esta última propiedad puede obtenerse, como todas las anteriores, por cálculo directo, pero también como Corolario del siguiente

<u>Lema 2.1.1.</u> Sean $W_1 = \{W_1(x), x \in [0,1]\}$, $W_2 = \{W_2(x), x \in [0,1]\}$ procesos de Wiener tales que $E\{W_1(x) . W_2(x)\} = \mu(x \wedge x')$, siendo μ una función de variación total acotada. Si Φ_1 y Φ_2 son dos procesos integrables en el sentido de Itô, se verifica:

$$E\{(\int_o^1 \Phi_1(x)dW_1(x))(\int_o^1 \Phi_2(x)dW_2(x))\}=\int_o^1 E(\Phi_1(x)\Phi_2(x))d\mu(x).$$

Intercambiando los papeles de la primera y segunda variables podemos construir la integral estocástica mixta $\tilde{I}_4(\Phi)=\int_T \Phi_z\, d_2W_z dx$.

Consideremos un proceso Φ que sea $I_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ y $\tilde{I}_4$-integrable. Se cumple que $\tilde{I}_2(\Phi)$ es ortogonal a todas las demás integrales. Por otra parte los procesos crecientes asociados al producto de dos cualesquiera de ellas vienen dados por:

$$E\{\tilde{I}_3(\Phi).I_1(\Phi)\} = \int_T \int_o^y E\{\Phi_z \cdot \Phi_{(x,\eta)}\}\, d\eta\, d z,$$

$$E\{\tilde{I}_4(\Phi).I_1(\Phi)\} = \int_T \int_o^x E\{\Phi_z \cdot \Phi_{(\xi,y)}\}\, d\xi\, d z,$$

$$E\{\tilde{I}_3(\Phi).\tilde{I}_4(\Phi)\} = \frac{1}{2} \int_T \int_T E(\Phi_z \cdot \Phi_{z'}).1_G(z,z')\, dzdz'.$$

Podemos considerar también integrales mixtas $\iint_{TxT} \Psi(z,z')dW_z dz'$, construidas como la integral del segundo tipo pero sustituyendo un incremento estocástico por uno determinista. Se obtiene la siguiente relación:

Si Φ es $\tilde{I}_3$ y $\tilde{I}_4$-integrable y π_i (i=1,2) son las proyecciones de T en [o,1], se verifica: (a) $\Psi(z,z',\omega)=\Phi(zvz',\omega).1_G(z,z')$ es integrable en el sentido anterior y (b) $\iint_{TxT} \Psi(z,z')dW_z dz' = \tilde{I}_3(\pi_1.\Phi)+\tilde{I}_4(\pi_2.\Phi)$.

Todas las integrales estocásticas anteriores pueden extenderse al caso en que el espacio de parámetros sea $[o,1]^n$. (véase [7]).

3. Fórmulas de diferenciación.

3.1.- Regla de diferenciación de Itô.

En este apartado obtenemos una expresión que generaliza la conocida fórmula de diferenciación de Itô al plano. En lo que sigue suponemos dados: $\{W = W_z,\ z\in T\}$ función aleatoria de Wiener, A conjunto abierto que contiene a T, f: RxA $\rightarrow$ R, $(u,z) \rightarrow f(u,z)$ función con las siguientes derivadas parciales contínuas:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial u^4},\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial u^2},\ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial u^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\qquad z = (x,y).$$

Teorema 3.1.1. Sea $X=\{X_z=\Delta_{[o,z)} f(W_\alpha,\alpha), z\in T\}$. Para todo $z\in T$ se verifica $X_z = M(z)+M_1(z)+M_2(z)+B(z)$, donde

$M(z)=\int_{A_z} f'_u(W_\alpha,\alpha)\,dW_\alpha+\int_{A_z} f''_{uu}(W_\alpha,\alpha)\,d_1W_\alpha d_2W_\alpha$ corresponde a la parte de martingala de X_z.

$M_1(z)=\int_{A_z} D_2(f'_u)(W_\alpha,\alpha)\,d_1W_\alpha d\eta$ corresponde a la parte de 1-martingala.

$M_2(z)=\int_{A_z} D_1(f'_u)(W_\alpha,\alpha)\,d_2W_\alpha d\xi$ corresponde a la parte de 2-martingala, y

$B(z) =\int_{A_z} (D_1\circ D_2)(f)(W_\alpha,\alpha)\,d\alpha$ corresponde a la parte de variación total acotada.

Recordemos que D_1 y D_2 son los operadores $\frac{1}{2}\,yf''_{uu}+f'_x$ y $\frac{1}{2}xf''_{uu}+f'_y$ respectivamente y representan los operadores de difusión de la función aleatoria de Wiener W en cada coordenada. Nótese que si $D_i(f)=o$ $(i=1,2)$ el proceso X es una i-martingala, mientras que si $D_1(f)=D_2(f)=o$, entonces X es martingala. En esta situación particular el teorema había sido establecido por Wong y Zakai [9].

Demostración: Se considera una sucesión de particiones del rectángulo A_z tal que sus normas respectivas tengan límite cero. Se expresa X como suma de incrementos de $f(W_\alpha,\alpha)$ en los subrectángulos de la partición k-ésima y se aplica la fórmula de Itô en una variable. Finalmente se hace un paso al límite en la convergencia en probabilidad.

La utilización de los operadores de difusión de una función aleatoria de Wiener con parámetro $T=[0,1]^n$ correspondientes a cada coordenada, $D_i = \frac{1}{2} z_1 \ldots \hat{z}_i \ldots z_n \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial z_i}$ permite extender mediante un proceso inductivo el teorema anterior al caso n-dimensional. (Véase [7]).

3.2.- Teoremas de representación.

En este apartado nos proponemos como objetivo extender el teorema 3.1.1 al caso en que substituyamos la función aleatoria de Wiener W por una función aleatoria que suponga una generalización en el plano del concepto de "semimartingala". Precisando:

Sea $X = \{X_z, z\in T\}$ un proceso que admita la descomposición $X_z = M(z) + M_1(z) + M_2(z) + B(z)$, siendo:

- $\{M(z),\ z\in T\}$ una martingala de cuadrado integrable.
- $\{M_1(z),\ z\in T\}$ una 1-martingala, A_z-adaptada, y $\forall\ x\in[0,1]$ fijo, $\{M_1(x,y),\ y\in[0,1]\}$ tiene las trayectorias absolutamente contínuas con derivada $N_1(x,y)$ tal que $\int_0^y E(N_1(x,\eta))^2 d\eta < \infty$.
- $\{M_2(z),\ z\in T\}$ una 2-martingala, A_z-adaptada, y $\forall y\in[0,1]$ fijo, $\{M_2(x,y),\ x\in[0,1]\}$ tiene sus trayectorias absolutamente contínuas con derivada $N_2(x,y)$ tal que $\int_0^x E(N_2(\xi,y))^2 d\xi < \infty$.
- $\{B(z),\ z\in T\}$ con trayectorias absolutamente contínuas c.s.

Proposición 3.2.1. Existe una función aleatoria $\Gamma_1(\alpha,\eta')$, ($\alpha = (\xi,\eta)\in T$, $\eta'\in[0,\eta]$) medible, A_α-adaptada y $\int_{A_z}\int_0^\eta E(\Gamma_1(\alpha,\eta'))^2 d\eta' d\alpha < \infty$ tal que

$$M_1(z) = \int_{A_z}\int_0^\eta \Gamma_1(\alpha,\eta')\ dW_{(\xi,\eta')}\, d\eta .$$

Observaciones.

(1) La integral mixta $M_1(z)$ se define como una integral iterada para

los procesos $\Gamma_1(\alpha,\eta')$ que cumplen las hipótesis de la proposición anterior. Llamaremos a estos procesos I_3-integrables.

(2) Un resultado paralelo al contenido en la Proposición 3.2.1 permite escribir $M_2(z) = \int_{A_z} \int_o^{\xi} \Gamma_2(\alpha,\xi')\, dW_{(\xi',\eta)} d\xi$. A los procesos Γ_2 para los que la integral anterior tiene sentido los llamaremos I_4-integrables.

Demostración: Si Y_z es una función aleatoria de L^2 y A_z-medible tenemos (véase [9])

$$Y_z = \int_{A_z} \Gamma^*((\xi,\eta),y)\, dW_\alpha, \quad z=(x,y) \tag{3.2.1}$$

siendo $\Gamma^*((\xi,\eta),y) = \Phi_\alpha + \int_o^{\xi} \int_{\eta}^{y} (\Psi(\alpha,\alpha')+\Psi(\alpha',\alpha))\, dW_\alpha$, (en general Φ y Ψ dependen de z).

Si el proceso $Y=\{Y_z,\ z\in T\}$ es tal que al fijar y, $\{Y_{(x,y)}, A_{(x,y)},\ x\in[o,1]\}$ es una martingala de L^2, entonces el proceso Γ^* no depende de x.

Aplicando la representación (3.2.1) al proceso $\{N_1(x,\eta),(x,\eta)\in T\}$ dado por $M_1(x,y) = \int_o^y N_1(x,\eta)\, d\eta$, que es una 1-martingala (η-c.s.) obtenemos:

$$N_1(x,\eta) = \int_{A_{(x,\eta)}} \Gamma^*((\xi,\eta'),\eta)\, dW_{(\xi,\eta')}, \ \eta\text{-c.s.}$$

De donde

$$M_1(x,y) = \int_{A_z} \int_o^{\eta} \Gamma_1(\alpha,\eta')\, dW_{(\xi,\eta')}\, d\eta ,$$

siendo $\Gamma_1((\xi,\eta),\eta') = \Gamma^*((\xi,\eta'),\eta)$.□

Teorema 3.2.1. Existen procesos Φ, I_1-integrable, Ψ, I_2-integrable, Γ_1, I_3-integrable, Γ_2, I_4-integrable y Γ $B\otimes A$ medible y A_z-adaptado tales que

$$X_z = \int_{A_z} \Phi_\alpha dW_\alpha + \iint_{A_z \times A_z} \Psi(\alpha,\alpha')\, dW_\alpha\, dW_{\alpha'} + \int_{A_z} \int_o^\eta \Gamma_1(\alpha,\eta')\, dW_{(\xi,\eta')}\, d\eta +$$

$$+ \int_{A_z} \int_o^\xi \Gamma_2(\alpha,\xi')\, dW_{(\xi',\eta)}\, d\xi + \int_{A_z} \Gamma_\alpha\, d\alpha.$$

<u>Demostración:</u> Aplíquese el Teorema de representación de martingalas de L^2 de Wong y Zakai ([9]) y la Proposición 3.2.1 al proceso $X = \{X_z,\ z\in T\}$. □

<u>Observaciones.</u>

1) En la descomposición de la función aleatoria X dada por el teorema anterior la parte de martingala es

$M(z) = \int_{A_z} [\Phi_\alpha + \int_o^\xi \int_\eta^y (\psi(\alpha,\alpha') + \psi(\alpha',\alpha)\, dW_{\alpha'}]\ dW_\alpha$. La parte de 1-martingala es $M(z)+M_1(z) = \int_{A_z} \delta_1(\alpha,y) dW_\alpha$, donde $\delta_1(\alpha,y) = $ $= \Phi_\alpha + \int_o^\xi \int_\eta^y (\psi(\alpha,\alpha') + \psi(\alpha'\alpha))dW_{\alpha'} + \int_\eta^y \Gamma_1((\xi,\eta'),\eta)d\eta$, siendo en este caso la parte de variación acotada $M_2(z)+B(z) = \int_o^x \gamma_2(\xi,y)d\xi$, con $\gamma_2(\alpha) = \int_{A_\alpha} \Gamma_2((\xi,\eta'),\xi')dW_{(\xi',\eta')} + \int_o^\eta \Gamma(\xi,\eta')d\eta'$. Análogamente, la parte de 2-martingala es $M(z)+M_2(z) = \int_{A_z} \delta_2(\alpha,x)dW_\alpha$, donde

$\delta_2(\alpha,x) = \phi_\alpha + \int_o^\eta \int_\xi^x (\psi(\alpha,\alpha')+\psi(\alpha',\alpha))dW_{\alpha'} + \int_\xi^x \Gamma_2((\xi',\eta),\xi)d_{\xi'}$, mientras que la parte de variación acotada es $M_1(z)+B(z) =$ $= \int_o^y \gamma_1(x,\eta)d\eta$, con $\gamma_1(\alpha) = \int_{A_\alpha} \Gamma_1((\xi',\eta),\eta')dW_{(\xi',\eta')} + \int_o^\xi \Gamma(\xi',\eta)d\xi'$.

(2) Para todo $y\in[o,1]$, $\{X_{(x,y)},\ x\in[o,1]\}$ es una <u>semimartingala</u> cuyo proceso creciente asociado es $A_1(x,y) = \int_o^x \int_o^y (\delta_1(\alpha,y))^2\, d\alpha$. Análogamente, para todo $x\in[o,1]$. $\{X_{(x,y)}, y\in[o,1]\}$ es también una

semimartingala y $A_2(x,y)=\int_0^y\int_0^x (\delta_2(\alpha,x))^2\, d\alpha$ es su correspondiente proceso creciente.

(3) Llamaremos $a_1(\alpha) = \frac{\partial A_1}{\partial \xi}(\alpha)$, $a_2(\alpha) = \frac{\partial A_2}{\partial \eta}(\alpha)$.

Consideremos ahora la función aleatoria $Y = \{Y_z = \Delta_{[o,z)} f(X_\alpha,\alpha), z\in T\}$, donde f es una función como en el apartado 3.1. El siguiente resultado nos da una representación integral de Y, obteniendo en el plano una versión de la fórmula del "cambio de variable" de Kunita y Watanabe.

<u>Teorema 3.2.2.</u> Con las hipótesis del Teorema 3.1.1. se verifica:

$$Y_z=\int_{A_z}\phi^*_\alpha\, dW_\alpha+\iint_{A_z\times A_z}\psi^*(\alpha,\alpha')\,dW_\alpha dW_{\alpha'}+\int_{A_z}\int_o^\eta \Gamma_1^*(\alpha,\eta')\,dW_{(\xi,\eta')}\,d\eta+$$

$$\int_{A_z}\int_o^\xi \Gamma_2^*(\alpha,\xi')\,dW_{(\xi',\eta)}\,d\xi+\int_{A_z}\Gamma^*_\alpha\, d\alpha.$$

siendo:

$$\Phi^*_\alpha = f'_u(X_\alpha,\alpha)\Phi_\alpha,$$

$$\psi^*(\alpha,\alpha')=f'_u(X_{\alpha\vee\alpha'},\alpha\vee\alpha')\psi(\alpha,\alpha')+\frac{1}{2}f''_{uu}(X_{\alpha\vee\alpha'},\alpha\vee\alpha')\delta(\alpha,\alpha'),$$

donde $\delta(\alpha,\alpha')=\delta_1(\alpha\wedge\alpha',\eta\vee\eta')\delta_2(\alpha\wedge\alpha',\xi'\vee\xi)$

$$\Gamma_1^*(\alpha,\eta')=D_2(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\delta_1(\alpha,\eta')+f'_u(X_\alpha,\alpha)\Gamma_1(\alpha,\eta')+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)\gamma_1(\alpha)\delta_1(\alpha,\eta')$$
$$+\frac{1}{2}f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)C'(\alpha,\eta'),$$

donde D_2 es el operador $\frac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial}{\partial y}$, y

$$C'(\alpha,\eta')=\int_o^\xi \delta_2((\xi',\eta),\xi)\,(\psi((\xi,\eta'),(\xi',\eta'))+\psi((\xi',\eta),(\xi,\eta')))\,d\xi'.$$

$$\Gamma_2^*(\alpha,\xi')=D_1(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\delta_2(\alpha,\xi')+f'_u(X_\alpha,\alpha)\Gamma_2(\alpha,\xi')+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)\gamma_2(\alpha)$$
$$\delta_2(\alpha,\xi')+\frac{1}{2}f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)C(\alpha,\xi'),$$

donde $D_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial A_1}{\partial x}(x,y) \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial x}$ y

$$C(\alpha,\xi')=\int_0^{\eta}\delta_1((\xi,\eta'),\eta)(\psi((\xi',\eta),(\xi,\eta'))+\psi((\xi,\eta'),(\xi',\eta))\,d\eta'.$$

$$\Gamma^*(\alpha)=D_1(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\gamma_1(\alpha)+D_2(f'_u)(X_\alpha,\alpha)\gamma_2(\alpha)+\frac{1}{2}[(D_1 o D_2)(f)+$$

$$+(D_2 o D_1)(f)](X_\alpha,\alpha)+f'_u(X_\alpha,\alpha)\Gamma(\alpha)+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)(\gamma_1(\alpha)\gamma_2(\alpha)+$$

$$+\frac{A(\alpha)+B(\alpha)}{2})+f'''_{uuu}(X_\alpha,\alpha)D(\alpha).$$

donde: $A(\alpha)=\int_0^{\xi}\Gamma_2(\alpha,\xi')\delta_2(\alpha,\xi')d\xi'$, $B(\alpha)=\int_0^{\eta}\Gamma_1(\alpha,\eta')\delta_1(\alpha,\eta')d\eta'$.

$$D(\alpha)=\int_{A_\alpha}\delta_1(\alpha,\eta')\delta_2(\alpha,\xi')[\psi((\xi',\eta),(\xi,\eta'))+\psi((\xi,\eta'),(\xi',\eta))]d\alpha'.$$

<u>Demostración:</u> (1) Por un proceso análogo al de la demostración del teorema 3.1.1. tenemos

$$Y_z=\int_{A_z}\{f'_u(X_\alpha,\alpha)dX_\alpha+f''_{uu}(X_\alpha,\alpha)d_2X_\alpha[dX_\alpha+d_1X_\alpha]+D_1(f'_u)(X_\alpha,\alpha)d_2X_\alpha d\xi+$$

$$+D_2(f'_u)(X_\alpha,\alpha)d_1X_\alpha d\eta+[(D_2 o D_1)(f)(X_\alpha,\alpha)+\frac{1}{2}f'''_{uuu}(X_\alpha,\alpha)\frac{\partial a_1}{\partial\eta}d_2X_\alpha]\,d\alpha.$$

(la expresión $\frac{\partial a_1}{\partial \eta}(\alpha)$ ha de entenderse en sentido estocástico).

(2) De la observación (1) que sigue al Teorema 3.2.1 se deduce:

$$dX_\alpha=\Phi(\alpha)dW_\alpha+2\int_0^{\xi}\int_0^{\eta}\psi((\xi,\eta'),\xi',\eta))dW_{(\xi,\eta')}dW_{(\xi',\eta)}+\int_0^{\eta}\Gamma_1(\alpha,\eta')dW_{(\xi,\eta')}$$

$$d\eta+\int_0^{\xi}\Gamma_2(\alpha,\xi')dW_{(\xi',\eta)}d\xi+\Gamma(\alpha)d\alpha.$$

$$d_1X_\alpha=\int_0^{\eta}\delta_1((\xi,\eta'),\eta)dW_{(\xi,\eta')}+\gamma_2(\alpha)d\xi$$

$$d_2X_\alpha=\int_0^{\xi}\delta_2((\xi',\eta),\xi)dW_{(\xi',\eta)}+\gamma_1(\alpha)d\eta.$$

(3) Finalmente el teorema se obtiene al substituir estas últimas expresiones en la expresión de Y_z que hemos hallado en (1)

4. Funciones aleatorias gausianas.

En este apartado caracterizamos las funciones aleatorias gausianas que cumplen una propiedad del tipo "Markov" en términos de soluciones a ecuaciones en derivadas parciales.

En lo que sigue $X=\{X_z,\ z\in T\}$ será una función aleatoria gausiana, centrada y nula en los ejes; $A_z=(o,z]$, $\Gamma(z,z')=EX_z.X_{z'}$, y $\Gamma(z)=EX_z^2$. Consideraremos dos familias crecientes de sub σ-álgebras de $\mathcal{A}$: $\mathcal{A}_z = \sigma<X_\alpha, \alpha<z>$ y $F_z=\sigma<X_\alpha,\alpha\nleq z>$.

4.1. Caracterización de martingalas gausianas.

Teorema 4.1.1. Si $\Gamma(z)$ es absolutamente contínua respecto de la medida de Lebesgue, las siguientes proposiciones son equivalentes:

(1) $\{X_z, \mathcal{A}_z,\ z\in T\}$ es martingala.

(2) X tiene incrementos independientes.

(3) $\Gamma(z,z')= f(z\wedge z')$

(4) $\exists\Phi\in L^2(T)$ y $\exists W=\{W_z,\ z\in T\}$ función aleatoria de Wiener tales que $X_z=\int_{A_z}\Phi(\alpha)\,dW_\alpha$.

Demostración: La equivalencia entre (1),(2) y (3) no ofrece difi dificultad y puede establecerse sin suponer la continuidad absoluta de Γ. Demostremos (i) $\Rightarrow$ (iv): Sea φ la función real tal que $\Gamma(z)=\int_{A_z}\varphi(\alpha)\,d\alpha$. Siendo X a incrementos independientes, Γ será una función positiva sobre todo rectángulo $\Delta=(z,z']$, por tanto φ será también positiva, sea $\varphi(\alpha)=(\Phi(\alpha))^2$. Si $\varphi\neq o$(m-c.s) la función aleatoria $W_z=\int_{A_z}\frac{1}{\Phi}(\alpha)\,dX_\alpha$ es una función aleatoria de Wiener; $\int_{A_z}\Phi_\alpha\,dW_\alpha=X_z$. Si $\varphi=o$ en un conjunto de puntos de T no negligible, sea $\bar{W}=\{\bar{W}_z,\ z\in T\}$ un proceso de Wiener en $(\Omega,\mathcal{A},P)$ independiente de X. Definamos $\bar{\Phi}(\alpha)=1$ si $\Phi(\alpha)=o$, y $\bar{\Phi}(\alpha)=o$

si $\Phi(\alpha)\neq o$, entonces $W_z=\int_{A_z}\frac{1}{\Phi}(\alpha)\,dX_\alpha+\int_{A_z}\bar{\Phi}(\alpha)\,d\bar{W}_\alpha$ es una función aleatoria de Wiener y $X_z=\int_{A_z}\Phi_\alpha dW_\alpha$. □

4.2. Representación integral de procesos Markovianos.

Dado un punto $z\in R_+^2$ adoptaremos como regiones correspondientes al "futuro" y al "pasado" de z, $\{z'\in T|z<z'\}$ y $\{z'\in T|z\nless z'\}$ respectivamente. Según este criterio damos la siguiente propiedad markoviana:

Definición 4.2.1. $X=\{X_z,\ z\in T\}$ es una función aleatoria de Markov si:

$P\{X_{z'}|F_z\}=P\{X_{z'}|X_{(x,y')},X_z,X_{(x',y)}\}$, $\forall z<z', z=(x,y), z'=(x',y')$.

Si X es a incrementos independientes, X es de Markov, por tanto también lo es toda martingala gausiana. Así, el proceso de Wiener $W=\{W_z, z\in T\}$ es de Markov y también lo son los procesos $f(W)=\{f(W_z), z\in T\}$ y $X=\{X_z=g(z)\int_{A_z}\Phi(\alpha)\,dW_\alpha, z\in T\}$, donde f es una función que tiene inversa contínua, g una función no nula en T y contínua y $\Phi\in L^2(T)$. Asimismo se demuestra que si X es una función aleatoria de Markov que toma valor constante sobre los ejes, $X_1=\{X_{(x,y)}, x\in[o,1]\}$ y $X_2=\{X_{(x,y)}, y\in[o,1]\}$ son procesos de Markov en una dimensión.

Para poder dar una representación integral de una función aleatoria de Markov hemos tenido que imponer las siguientes condiciones de regularidad sobre la función Γ:

(a) $\Gamma(z)$ absolutamente contínua respecto de la medida de Lebesgue, y si $E=\{(x,y)\in T|x=o$ ó $y=o\}$, $\Gamma(z)\neq o$, $\forall z\in E$.

(b) $\Gamma(z,z')$ contínua. c) Existen $\left.\frac{\partial\Gamma(z,\alpha)}{\alpha x^+}\right]_{z=\alpha}$, $\left.\frac{\partial\Gamma(z,\alpha)}{\partial y^+}\right]_{z=\alpha}$, $\left.\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^+\partial y^+}\right]_{z=\alpha}$, $z=(x,y)>\alpha$, $z\notin E$. (d) La función $\Phi(z,\alpha)=\Gamma(z,\alpha)\Gamma(\alpha,\alpha)^{-1}$ definida para

$z>\alpha$, $\alpha\notin E$ admite una extensión contínua al conjunto $\{(\alpha,z)\in T^2, \alpha<z\}$.

La función Φ representa la <u>función de transmisión</u> del proceso y cumple las siguientes propiedades: (1) $\Phi(z,z)=1$, (2) Si $\beta<\alpha<z$, $\Gamma(z,\beta)=\Phi(z,\alpha)\Gamma(\alpha,\beta)$ y $\Phi(z,\beta)=\Phi(z,\alpha)\Phi(\alpha,\beta)$. Estas propiedades y la continuidad de Φ implican $\Phi(z,\alpha)\neq o$, $\forall\alpha<z$, por tanto podemos definir $\Phi(\alpha,z)=\Phi(z,\alpha)^{-1}$. Otras propiedades de la función Φ que son de utilidad en la siguiente discusión son:

$$(3)\quad \left.\frac{\partial\Phi(z,\alpha)}{\partial x^+}\right]_{z=\alpha} = -b(z),\quad \left.\frac{\partial\Phi(z,\alpha)}{\partial y^+}\right]_{z=\alpha} = -a(z),\quad \left.\frac{\partial^2\Phi(z,\alpha)}{\partial x^+\,\partial y^+}\right]_{z=\alpha} = d(z),\ z\notin E.$$

$$(4)\quad \frac{\partial\Phi(z,\alpha)}{\partial x} = -b(z)\Phi(z,\alpha),\quad \frac{\partial\Phi(z,\alpha)}{\partial y} = -a(z)\Phi(z,\alpha),\quad \frac{\partial^2\Phi(z,\alpha)}{\partial x\,\partial y} = d(z).$$

$$\Phi(z,\alpha),\ \text{donde } d(z)=a(z)b(z)-\frac{\partial a(z)}{\partial x}\ \text{y}\ \frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial y},\quad \forall\alpha<z.$$

<u>Teorema 4.2.1.</u> X es una función aleatoria de Markov si y sólo si existen un proceso de Wiener $W=\{W_z, z\in T\}$ y dos funciones reales Φ_1, Φ_2 definidas en T, tales que Φ_1 es contínua y no nula, $\Phi_2\in L^2(T)$ verificando $X_z=\Phi_1(z)\int_{A_z}\Phi_2(\alpha)\,dW_\alpha$.

<u>Demostración:</u> Considérese $Y_z=\Phi(o,z)X_z$. Se tiene $E(Y_z^2)=\Phi(o,z)^2\,\Gamma(z)$, $E(Y_z\cdot Y_{z'})=\Phi(o,z\wedge z')^2\,\Gamma(z\wedge z', z\wedge z')$. Según el Teorema 4.1.1, existe una función $\Phi_2\in L^2(T)$ y una función aleatoria de Wiener $W=\{W_z, z\in T\}$ tales que $X_z=\int_{A_z}\Phi_2(\alpha)\,dW_\alpha$, por tanto $X_z=\Phi(z,o)\int_{A_z}\Phi_2(\alpha)\,dW_\alpha$.

La función $\Phi_2(z)$ puede calcularse según indicamos a continuación:

$$\Phi_2(z) = \frac{\partial^2[EY_z^2]^{1/2}}{\partial x\,\partial y} = \Phi(o,z)\,q(z),\ \text{siendo}$$

$$q^2(z)=\frac{\partial^2\Gamma(z)}{\partial x\partial y}+2b(z)\frac{\partial\Gamma(z)}{\partial y}+2a(z)\frac{\partial\Gamma(z)}{\partial x}+\left(2\frac{\partial a}{\partial x}+4a(z)b(z)\right)\Gamma(z).$$

La función aleatoria X es un funcional de la martingala Y, se le puede aplicar el Teorema 3.2.2 obteniendo la siguiente expresión integral:

$$X_z=\int_{A_z} q(\alpha)\,dW_\alpha-\int_{A_z}\int_o^{\xi} b(\alpha)\,\Phi(\alpha,(\xi',\eta))\,q(\xi',\eta)\,dW_{(\xi',\eta)}\,d\xi-$$

$$-\int_{A_z}\int_o^{\eta} a(\alpha)\,\Phi(\alpha,(\xi,\eta'))\,q(\xi,\eta')\,dW_{(\xi,\eta')}\,d\eta+\int_{A_z} d(\alpha)X_\alpha\,d\alpha.$$

Esta expresión sugiere el estudio de la difusión en varios parámetros.

Finalmente, a partir del Teorema 4.2.1 y derivando formalmente obtenemos:

$$\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\partial y}+a(z)\,\frac{\partial X_z}{\partial x}+b(z)\,\frac{\partial X_z}{\partial y}+c(z)X_z= q(z)\xi_z,$$

siendo $c(z)= a(z)b(z) + \frac{\partial a(z)}{\partial x}$, ξ_z es un ruido blanco distribuido en el plano. Esta ecuación tiene un significado preciso en el marco de la teoría de los procesos estocásticos generalizados ([3]). De este modo tenemos caracterizadas las funciones aleatorias gaussianas de Markov como soluciones a ecuaciones en derivadas parciales estocásticas lineales y hiperbólicas, ecuaciones que pueden servir de modelo a sistemas dinámicos perturbados por un ruido blanco.

Nota: los apartados 1, 2 y 3 de este artículo contienen resultados publicados en [6].

Referencias.

[1] Cairoli, R. and Walsh, J.B.: "Stochastic Integrals in the plane". Acta Mathematica 134, (111-183), (1975).

[2] Cairoli, R.: "Sur une equation différentielle stochastique". C.R.A.S. París, t. 274 (12 Juin 1972) Ser. A-112.

[3] Guelfand, I.M. and Vilenkin, N.Y.: "Les Distributions". Tome 4. Dunod, Paris, 1967.

[4] Itô, K.: "Multiple Wiener Integral". Journal of the Math. Soc. of Japan. Vol. 3, nº 1, May, 1951.

[5] Itô, K.: "Stochastic Integral". Proc. Imperial Acad., Tokyo, 1.944.

[6] Nualart, D. et Sanz, M.: "Intégrales stochastiques par rapport au processus de Wiener à deux paramètres". Ann. Scient. de l'Univ. de Clermont, Math. 14^e. fasc. nº 61 (1976).

[7] Nualart, D. y Sanz, M.: "Fórmula de diferenciación de Ito para funciones brownianas de n-parámetros". Será publicado en las Actas de la IV Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas. Jaca 1977.

[8] Park, W.J.: "A Multiparameter Gaussian Process". The Annals of Math. Stat. 1970. Vol. 41, nº 5, 1582-1595.

[9] Wong, E. and Zakai, M.: "Martingales and Stochastic integrals for processes with a Multidimensional Parameter". Zfw. 29, 109-122 (1974).

[10] Yeh, J.: "Wiener Measure in a space of functions of two variables". Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960).

Departamento de Matemáticas.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura.
Universidad Politécnica de Barcelona.

Recibido: Octubre 1978.
Revisado: Noviembre 1.978.