STOCHASTICA Vol. II nº 4 (1978)

PRODUCTO, CONVEXIFICACIÓN Y COMPLETACIÓN DE ESPACIOS MÉTRICOS GENERALIZADOS Y PROBABILÍSTICOS

por

CLAUDI ALSINA

1. Introducción.

En 1.967 E. Trillas introdujo la noción de espacio métrico generalizado, al considerar métricas abstractas valoradas en semigrupos ordenados, unificando con este punto de vista algebraico-reticular las estructuras métricas reales de M.Fréchet ([5]) y los espacios métricos probabilísticos de K. Menger ([6]) (así como los espacios booleanos de Blumenthal ([4]) y las métricas naturales definidas en grupos ordenados). En el presente artículo se abordan los problemas de la topologia del orden, del producto, de la convexificación secuencial y de la S-completación de un espacio métrico generalizado; la aplicación de los resultados obtenidos al caso de los espacios métricos probabilísticos se efectúa en [1] . Como referencia sintética de los espacios métricos generalizados puede verse [2] (ver también [3],[4],[9],[10]).

2. Topologia del orden en un espacio métrico generalizado.

Sea $(S,+,\leqslant,e)$ un semigrupo ordenado conmutativo con neutro e igual al mínimo.

AGRADECIMIENTO. El autor agradece al Prof. E. Trillas sus acertadas sugerencias en la elaboración de los presentes resultados.

Definición 2.1. Un espacio métrico generalizado (brevemente EMG) es una terna (X,S,m) donde X es un conjunto no vacío, $S \equiv (S,+,\leqslant,e)$ un semigrupo de los descritos anteriormente y $m: X\times X \to S$ verifica, para cualesquiera $a,b,c \in X$:

(i) $m(a,b) = e$ si y solo si $a = b$ (propiedad de separación),

(ii) $m(a,b) = m(b,a)$ (propiedad de simetria),

(iii) $m(a,b) \leqslant m(a,c) + m(c,b)$ (desigualdad triangular).

Definición 2.2. Un morfismo métrico (f,g) entre dos EMG (X,S,m) y (X',S',m'), es un par de aplicaciones $f: X \to X'$ y $g: S \to S'$, verificando:

(a) $g(x + y) = g(x) + g(y)$,

(b) Si $x \leqslant y$ entonces $g(x) \leqslant g(y)$; $g(x) = e'$ sólo si $x = e$,

(c) $m'(f(x), f(y)) = g(m(x,y))$.

La mayoria de resultados de la teoria de EMG se mantienen si se substituye la condición (a) por la de subaditividad.

Cuando f y g sean inyectivas (f,g) se denominará monomorfismo métrico o inmersión y si ambas son biyectivas (f,g) se denominará isometria. Si $S \equiv (R^+,+,\leqslant,o)$ se obtienen los EM reales de Fréchet ([5]); si $S \equiv (\Delta^+,\tau,\geqslant,\varepsilon_o)$ se obtienen los EM probabilísticos ([6],[7],[8]). En lo que sigue se considerarán solo semigrupos S no discretos, es decir, que poseen sucesiones no-crecientes (S_n) convergentes en orden al mínimo e $(S_n \overset{\circ}{\downarrow} e)$ y tales que si $S_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ y $S'_n \overset{\circ}{\downarrow} e$ también $(S_n + S'_n) \overset{\circ}{\downarrow} e$. Anotaremos $x = \text{o-}\lim_{n\to\infty} x_n$ siempre que la sucesión (x_n) de S sea orden-convergente a $x \in S$.

Definición 2.3. S verifica la condición diagonal de Everett si, dada en S una familia $\{(X_k^n) \mid (k,n) \in N\times N\}$ verificando:

(i) Para cada $n \in N$, $\text{o-}\lim_{k\to\infty} X_k^n = X_n \in S$,

(ii) $\text{o-}\lim_{n\to\infty} X_n = X \in S$, existe en N una sucesión creciente (k_n) tal que $X=o\text{-}\lim_{n\to\infty} X^n_{k_n}$.

Dado un EMG(X,S,m) sean los operadores $\Theta_1:P(X)\to P(X)$ y $\Theta_2:P(S)\to P(S)$ definidos por,

- $\Theta_1(A)=\{x\in X;$ existe $(a_n)\subset A$ tal que $o\text{-}\lim_{n\to\infty} m(x,a_n)=e\}$, si $A\subset X$,
- $\Theta_2(B)=\{s\in S;$ existe $(s_n)\subset B$ tal que $s=o\text{-}\lim_{n\to\infty} s_n\}$, si $B\subset S$.

<u>Teorema 2.1.</u> Si (X,S,m) es un EMG:

(i) Θ_1 y Θ_2 son operadores clausura de Čech y, por tanto, inducen sendas topologias T_{o-m} y T_o, en X y S respectivamente;

(ii) Si S verifica la condición diagonal de Everett, Θ_1 y Θ_2 son clausuras de Kuratowski;

(iii) Si + es contínua de $(S\times S,\ T_o\times T_o)$ en (S,T_o), m es contínua de $(X\times X, T_{o-m+m})$ en (S,T_o), siendo m+m la métrica generalizada definida en $X\times X$ mediante $(m+m)((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = m(x_1,y_1)+m(x_2,y_2)$.

Si (X,R^+,d) es un EM real es fácil verificar que la topología T_{o-m} es precisamente la topología métrica clásica. En el caso probabilístico vale el siguiente resultado.

<u>Teorema 2.2.</u> Sea $(X,(\Delta^+,\tau,\leqslant,\varepsilon_o),\mathfrak{F})$ un EM probabilístico con $\tau:\Delta^+\times\Delta^+\to\Delta^+$ continua respecto de la convergencia débil w de funciones de distribución. La topología $T_{o-\mathfrak{F}}$ coincide con la clásica topología ε,λ.

<u>Demostración.</u> Probaremos en primer lugar que la convergencia débil de (F_n) a ε_o equivale a la ordenada. En efecto, si $F_n \xrightarrow[n\to\infty]{w} \varepsilon_o$ resulta $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\varepsilon_o(x)=1$, para todo $x>0$. Consecuentemente

$$\liminf_{n\to\infty} F_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{m=n}^{\infty} F_m = \varepsilon_o,$$

por tanto $\bigwedge_{m=n}^{\infty} F_m(x) \underset{n\to\infty}{\uparrow} \varepsilon_o(x)=1$, de donde $\varepsilon_o = o\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$. Recíprocamente si $\varepsilon_o = o\text{-}\lim_{n\to\infty} F_n$, existe una sucesión $G_n \overset{\uparrow}{o} \varepsilon_o$ tal que $G_n \leqslant F_n$, para todo n. Siendo entonces $G_n(x) \underset{n\to\infty}{\uparrow} 1$ para todo $x > 0$, es $\lim_{n\to\infty} F_n(x)=1$ y $F_n \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} \varepsilon_o$. Por ser τ continua respecto la convergencia débil, la topologia ε,λ es metrizable y (por el primer axioma de numerabilidad) puede ser descrita secuencialmente: $P_n \underset{n\to\infty}{\overset{\varepsilon,\lambda}{\to}} P$ si y sólo si $F_{P_n P} \underset{n\to\infty}{\overset{w}{\to}} \varepsilon_o$, por lo que $P_n \underset{n\to\infty}{\overset{\varepsilon,\lambda}{\to}} P$ si y sólo si $o\text{-}\lim_{n\to\infty} F_{P_n P} = \varepsilon_o$, es decir, si y sólo si $P_n \overset{T_{o\text{-}\mathcal{F}}}{\to} P$.

<u>Teorema 2.3.</u> Si (X,S,m) es un EMG con X T_{o-m}-separable y m continua (en el sentido del apartado (iii) del Teorema 2.1), existe una inyección $h: X \to S^N$ continua entre (X,T_{o-m}) y (S^N, T_o^N).

En el caso de los EM probabilísticos de Menger, donde $\tau = \tau_T$ viene definida por $\tau_T(F,G)(x) = \sup_{u+v=x} T(F(u),G(v))$, se puede extender como sigue el teorema anterior. Sea $\mathcal{L}$ la métrica modificada de Lévy, introducida por Sibley ([7]) que metriza la convergencia débil en Δ^+, y $\hat{\mathcal{L}}$ la métrica en $(\Delta^+)^N$ definida por $\hat{\mathcal{L}}((F_n),(G_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \mathcal{L}(F_n,G_n)$.

<u>Teorema 2.4.</u> Sea $(X,(\Delta^+,\tau_T, \leqslant,\varepsilon_o),\mathcal{F})$ un EM probabilístico de Menger separable respecto de la topologia ε,λ. Entonces existe una inyección $h: X \to (\Delta^+)^N$ continua entre $(X,T_{\varepsilon,\lambda})$ y $((\Delta^+)^N,\hat{\mathcal{L}})$. En particular, X admite la distancia real $d(a,b) = \hat{\mathcal{L}}(h(a),h(b))$.

Demostración. Sea $A=\{a_n;\ n\in N\}$ un subconjunto numerable y ε,λ denso en X. Defínase $h:X\to(\Delta^+)^N$, mediante $h(a)=(F_{aa_n})$. Si $h(a)=h(b)$, será $F_{aa_n}=F_{ba_n}$ para todo $n\in N$. Si $b\in A$, será $b=a_k$, para cierto k, y $F_{aa_k}=F_{a_ka_k}=\varepsilon_o$ implicaría $a=a_k=b$. Si $b\notin A$, por ser X separable, escogidos $\varepsilon/_2>0$ y una sucesión $\lambda_n\downarrow 0$, será $N_b(\varepsilon/_2,\lambda_n)\cap A\neq\emptyset$, para todo $n\in N$. Sea $a_{i_n}\in N_b\ (\varepsilon/_2;\lambda_n)\cap A$, para cada n. Entonces

$$T(1-\lambda_n,\ 1-\lambda_n)\leqslant T(F_{ba_{i_n}}(\varepsilon/_2),\ F_{aa_{i_n}}(\varepsilon/_2))\leqslant F_{ab}(\varepsilon),$$

y tomando límites, $\lim\limits_{n\to\infty} T(1-\lambda_n,\ 1-\lambda_n)=T(1,1)=1\leqslant F_{ab}(\varepsilon)\leqslant 1$, es decir, $F_{ab}=\varepsilon_o$ y a=b, con lo que h es inyectiva. La continuidad de h se demuestra a partir del hecho de que la topología métrica generada por en $(\Delta^+)^N$ es la topología producto, la cual corresponde, además, a la convergencia por coordenadas.

3. Productos de espacios métricos generalizados.

Sean $(I,\leqslant)$ un conjunto pre-ordenado y $(\{(X_i,S_i,m_i)\}_{i\in I},\{(f_{ij},g_{ij})\}_{i\leqslant j})$ un sistema proyectivo en la categoria de los EMG. Tanto $(\{X_i\}_{i\in I},\{f_{ij}\}_{i\leqslant j})$ como $(\{S_i\}_{i\in I},\{g_{ij}\}_{i\leqslant j})$ con sistemas proyectivos (el primero en la categoria conjuntista y el segundo en la de los semigrupos ordenados) que admiten límites proyectivos X_∞ y S_∞, respectivamente. Si bien X_∞ puede ser eventualmente vacío, S_∞ admite estructura de semigrupo ordenado con neutro al definir, para x,y S_∞:

(+) $x+y \doteq (\pi_i(x)+\pi_i(y))_{i\in I}$, siendo π_i la i-ésima proyección de $\prod_{i\in I} S_i$ en S_i;

($\leq$) $x \leq y$ si y sólo si $\pi_i(x) \leq \pi_i(y)$, para todo $i\in I$.

En $(S_\infty,+,\leq,(e_i)_{i\in I})$ se define la métrica generalizada m_∞: $X_\infty x\, X_\infty \to S_\infty$, $m(x,y) = (m_i(P_i(x),P_i(y)))_{i\in I}$, donde P_i es la i-ésima proyección de $\prod_{i\in I} X_i$ en X_i, y resulta el EMG: $(X_\infty,S_\infty,m_\infty)$.

<u>Teorema 3.1.</u> Si I es un conjunto de índices, dotado de la relación de orden igualdad, es $(X_\infty,S_\infty,m_\infty) = (\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} S_i m_\infty)$. Dicho objeto es el límite proyectivo del sistema proyectivo $(\{(X_i,S_i,m_i)\}_{i\in I},\{(Id_{X_i},Id_{S_i})\}_{i\in I})$, y se dice que es el producto puntual de los EMG (X_i,S_i,m_i).

En particular si todos los espacios son valorados sobre el mismo semigrupo $(S,+,\leq,e)$ y existe una aplicación $f\colon \prod_{i\in I} S \to S$ tal que f sea no decreciente, subaditiva y $f((x_i)_{i\in I}) = e$ solo para $(x_i)_{i\in I} = (e)_{i\in I}$, entonces $(\prod_{i\in I} X_i, S, f\circ m_\infty)$ es un EMG semejante [2] al producto puntual $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} S, m_\infty)$. Por ejemplo, si $\{(X_i,R^+,d_i); i\ N\}$ es una colección de EM reales, definiendo $f\colon \prod_{i=1}^{\infty} R^+ \to R^+$, $f((a_n)_{n\in N}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\frac{a_i}{1+a_i}$, se obtiene el producto clásico de Fréchet para dichos espacios. Las aplicaciones $f_i\colon \prod_{i=1}^{n} R^+ \to R^+$ $(i=1,2,3)$ definidas por

$$f_1(x_1,\dots,x_n) = +\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2},$$

$$f_2(x_1,\dots,x_n) = \text{Máx}(x_1,\dots,x_n),$$

$$f_3(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

verifican, como se comprueba facilmente, las propiedades enunciadas anteriormente y, por ello, si $\{(X_i,R^+,d_i);\ i=1,\dots,n\}$ es una colección finita de EM reales, cabe considerar en $\prod_{i=1}^{n} X_i$ las métricas $f_1 om_\infty$, $f_2 om_\infty$ y $f_3 om_\infty$ que corresponden respectivamente a las distancias euclidea, del máximo y de la suma.

Los productos numerables de EM probabilísticos han sido estudiados en [1].

4. Convexificación secuencial de un espacio métrico generalizado.-

Por dualidad con el apartado anterior cabe considerar los sistemas inductivos en la categoria de los EMG.

<u>Teorema 4.1.</u> Sea $(I,\leqslant)$ un conjunto dirigido. Cualquier sistema inductivo $(\{(X_i,S_i,m_i)\}_{i\in I},\ \{(f_{ij},g_{ij})\}_{i\leqslant j})$ de EMG, admite su límite inductivo $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ en dicha categoria.

<u>Demostración.</u> Sea $\bar{X} = (\bigcup_{i\in I} X_i \times \{i\})/R_f$ y $\bar{S} = (\bigcup_{i\in I} S_i \times \{i\})/R_g$, donde R_f y R_g son las relaciones de equivalencia definidas respectivamente por

$(x_i,i)R_f(x_j,j)$ si existe $k \geqslant i,j$ tal que $f_{ik}(x_i)=f_{jk}(x_j)$,

$(s_i,i)R_g(s_j,j)$ si existe $n \geqslant i,j$ tal que $g_{in}(s_i)=g_{jn}(s_j)$.

se comprueba que $(\bar{S},+,\leqslant,\bar{e})$ es un semigrupo conmutativo con neutro y mínimo $\bar{e} = \overline{(e_i,i)}$ al definir:

$$(+) \quad \overline{(s_i,i)} + \overline{(s_j,j)} = \overline{(g_{ik}(s_i) + g_{jk}(s_j),k)}, \text{ para } k \geqslant i,j;$$

$$(\leqslant) \quad (s_i,i) \leqslant (s_j,j) \text{ sii existe } k \geqslant i,j \text{ tal que } g_{ik}(s_i) \leqslant g_{jk}(s_j).$$

Si $\bar{m}$: $\bar{X}x\bar{X} \to \bar{S}$, es la función:

$$\bar{m}\left(\overline{(x_i,i)},\ \overline{(x_j,j)}\right) = \overline{\left(m_k(f_{ik}(x_i),\ f_{jk}(x_j)),k\right)},$$

para cualquier $k \geqslant i,j$, se comprueba que $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ es el límite inductivo buscado.

Siguiendo a K. Menger ([4]), introduciremos la siguiente definición.

<u>Definición 4.1.</u> Un EMG (X,S,m) se dice <u>secuencialmente convexo</u> si, cualesquiera que sean $x,y \in X$, $x \neq y$, existe $z \in X$, $x \neq z \neq y$ tal que $m(x,y) = m(x,z) + m(z,y)$ y cualesquiera que sean $a,b \in S$, $a<b$, existe $c \in S$ tal que $a<c<b$.

El siguiente teorema prueba que todo EMG puede sumergirse, de forma efectiva, en otro que sea secuencialmente convexo.

<u>Teorema 4.2.</u> Si (X,S,m) es un EMG, existe un monomorfismo métrico (f,g) de (X,S,m) en un EMG $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ que es secuencialmente convexo.

<u>Demostración.</u> Considérese el conjunto de índices $(N,\leqslant)$ y para cada $i \in N$ sean $X_i = \prod_{k=1}^{2^i} X$, $S_i = \prod_{k=1}^{2^i} S$ y m_i: $X_i \times X_i \to S_i$ definida por

$$m_i((x_1,\ldots,x_{2^i}),(y_1,\ldots,y_{2^i})) = (m(x_1,y_1),\ldots,m(x_{2^i},y_{2^i})).$$

Para cada $i \leqslant j$ considérense las aplicaciones $f_{ij}: X_i \to X_j$, $g_{ij}: S_i \to S_j$ definidas respectivamente por:

$$f_{ij}(x_1,\ldots,x_{2^i}) = (\overbrace{x_1,\ldots,x_{2^i},\ldots\ldots,x_1,\ldots,x_{2^i}}^{2^{j-i}}),$$

$$g_{ij}(s_1,\ldots,s_{2^i}) = (\overbrace{s_1,\ldots,s_{2^i},\ldots\ldots,s_1,\ldots,s_{2^i}}^{2^{j-i}}),$$

es decir, ambas aplicaciones asignan a cada elemento de X_i ó de S_i el elemento con, 2^j coordenadas obtenido al concatenarlo consigo mismo 2^{j-i} veces. Se comprueba que $(\{(X_i,S_i,m_i)\}_{i\in N},\{(f_{ij},g_{ij})\}_{i\leqslant j})$ es un sistema inductivo de EMG y, por el Teorema 4.1, existe el límite inductivo $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$. Claramente las inyecciones $f:X \to \bar{X}, f(x) = \overline{(x,0)}$ y $g:S \to \bar{S}, g(s) = \overline{(s,0)}$ determinan un monomorfismo métrico (f,g) de (X,S,m) en $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$. Dicha extensión es secuencialmente convexa. Sean $\bar{A} = \overline{(a_1,\ldots,a_{2^i},i)}$ y $\bar{B} = \overline{(b_1,\ldots,b_{2^j},j)}$, $\bar{A} \neq \bar{B}$, elementos de $\bar{X}$. Sin pérdida de generalidad consideraremos el caso $i\leqslant j$. Sea

$$C = (\overbrace{a_1,\ldots,a_{2^i},\ldots\ldots,a_1,\ldots,a_{2^i}}^{2^{j-i}},b_1,\ldots,b_{2^j},j+1),$$

el elemento obtenido al repetir 2^{j-i} veces el elemento A y una vez el B; resulta $\bar{A} \neq \bar{C} \neq \bar{B}$ y $\bar{m}(\bar{A},\bar{B}) = \bar{m}(\bar{A},\bar{C}) + \bar{m}(\bar{C},\bar{B})$. Análogamente si $\bar{A} < \bar{B}$ en $\bar{S}$ se comprueba que, precisamente, es $\bar{A} < \bar{C} < \bar{B}$.

<u>Teorema 4.3.</u> El convexificado secuencial $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$, construido en el teorema precedente, es isométrico a un EMG(X^*,S^*,m^*) que es subespacio métrico del producto puntual $(\prod_{i=1}^{\infty} X, \prod_{i=1}^{\infty} S, m_\infty)$.

<u>Demostración.</u> Si $x_1,\ldots,x_n \in X$, sea $(x_1,\ldots,x_n;*)$ el elemento de $\prod_{i=1}^{\infty} X$ obtenido al repetir indefinidamente la n-pla $(x_1,\ldots,x_n)$. Sean

$$X^* = \{(x_1,\ldots,x_{2^k};*);\ k\in N,\ x_1,\ldots,x_{2^k}\in X\},$$

$$S^* = \{(s_1,\ldots,s_{2^k};*);\ k\in N,\ s_1,\ldots,s_{2^k}\in S\},$$

y m^* la restricción de m_∞ a X^*xX^*. Defínanse $\alpha_1:\bar{X}\to X^*$ y $\alpha_2:\bar{S}\to S^*$ mediante

$$\alpha_i\ (\overline{(a_1,\ldots,a_{2^k};K)}) = (a_1,\ldots,a_{2^k};*),$$

para i=1,2. El par (α_1,α_2) es una isometria de $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ en (X^*,S^*,m^*).

Vamos a aplicar dicho teorema al caso de un EM real.

<u>Teorema 4.4.</u> Todo EM real (X,R^+,d) admite una inmersión en un EM real $(X^*,R^+,\tilde{d})$ que es secuencialmente convexo.

<u>Demostración.</u> Por el Teorema 4.3 existe la inmersión de (X,R^+,d) en el EMG $(X^*,(R^+)^*,d^*)$. Sea $h: \prod_{i=1}^{\infty} R^+ \to R^+$ definida por

$$h((a_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\ \frac{a_i}{1+a_i}\ .$$

Es fácil verificar que $(X^*,R^+,\tilde{d} = hod^*)$ es un EM real y que el par (f,g) definido por:

$$f:\ X\to X^*\ ,\ f(x) = (x;*),$$

$$g:\ R^+\to R^+\ ,\ g(x) = x/(1+x),$$

determina la inmersión del espacio de partida (X,R^+,d) en $(X^*,R^+,\tilde{d})$. Para verificar la convexidad secuencial de dicha extensión, sean $a = (x_1,\ldots,x_{2^i};*)$ y $b = (y_1,\ldots,y_{2^j};*)$ con $a\neq b$ en X^* y tales que $i\leqslant j$. Tomando $c=(\overbrace{x_1,\ldots,x_{2^i},\ldots\ldots,x_1,\ldots,x_{2^i}}^{2^{j-i}},y_1,\ldots,y_{2^j};*)$, resulta

$a \neq c \neq b$. Sean $t_1,\dots,t_{2^j}$ las distancias entre las coordenadas de $(y_1,\dots,y_{2^j})$ y $(\overbrace{x_1,\dots,x_{2^i},\dots\dots,x_1,\dots,x_{2^i}}^{2^{j-i}})$. Entonces

$$\tilde{d}(a,c)+\tilde{d}(c,b)=h\big((\overbrace{o,\dots\dots,o}^{2^j},t_1,\dots,t_{2^j};*)\big)+h\big((t_1,\dots,t_{2^j};\overbrace{o,\dots\dots,o}^{2^j};*)\big)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=2^j(2n-1)+1}^{2^{j+1}n}\frac{1}{2^k}\,g(a_{k-2^j(2n-1)})+\sum_{k=2^{j+1}(n-1)+1}^{2^j(2n-1)}\frac{1}{2^k}\,g(a_{k-2^{j+1}(2n-1)})\Big)$$

$$=h\big((t_1,\dots,t_{2^j};*)\big)=\tilde{d}(a,b),$$

de donde $(X^*,R^+,\tilde{d})$ es secuencialmente convexo. La convexificación secuencial ha sido aplicada a los EM probabilísticos en [1].

5. S-completación de un espacio métrico generalizado.

El proceso de completación de los EMG usuales (reales, booleanos, probabilísticos... etc.) presupone que el semigrupo de valoración es un espacio métrico completo. En el presente apartado se establece que, con la condición de Everett en el semigrupo de valoración, es posible construir una extensión completa con características que se precisan a continuación.

Sean $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$ un EMG y $f\colon S \to \bar{S}$ una aplicación no-decreciente, tal que $f(x)=\bar{e}$ si y sólo si $x=e$, que verifica $f(\delta_n+\gamma_n)\overset{\circ}{\downarrow}\bar{e}$ siempre que $\delta_n\overset{\circ}{\downarrow}e$ y $\gamma_n\overset{\circ}{\downarrow}e$.

<u>Definición 5.1.</u> Una sucesión (x_n) de $\bar{X}$ es <u>S-fundamental</u> si existe $\delta_n\overset{\circ}{\downarrow}e$ en S tal que, para cada n, $\bar{m}(x_{n+p},x_n)\leqslant f(\delta_n)$, para todo $p\in N$. $\bar{X}$ es <u>S-completo</u> si toda sucesión S-fundamental es o-$\bar{m}$-convergente a un elemento de $\bar{X}$.

<u>Teorema 5.1.</u> Sea (X,S,m) un EMG tal que S verifique la condición diagonal de Everett y que $+:S \times S \to S$ sea continua respecto la topología de la convergencia en orden. Existe un monomorfismo métrico (i,f) de (X,S,m) en un EMG$(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$, tal que $i(X)$ es o-$\bar{m}$-denso en $\bar{X}$ y $\bar{X}$ es S-completo.

<u>Demostración.</u> Considérese en S^N la relación de equivalencia: "$(a_n)\sim(b_n)$ sii existe $\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$ tal que $a_n \leqslant b_n+\gamma_n$ y $b_n \leqslant a_n+\gamma_n$, para todo $n\in N$".

Nótese que en $\bar{S}=S^N/\sim$ resulta $\overline{(\gamma_n)}=\overline{(e)}$ y además

$$\overline{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n-1},\gamma_n,\gamma_n,\ldots)}=\overline{(\gamma_n,\gamma_n,\ldots)}=\gamma_n^* \text{ siempre que } \gamma_n \overset{o}{\downarrow} e \text{ en } S.$$

Definiendo en $\bar{S}$:

(+) $\overline{(a_n)}+\overline{(b_n)}=\overline{(a_n+b_n)}$,

($\leqslant$) $\overline{(a_n)}\leqslant\overline{(b_n)}$ sii existe $\gamma_n \overset{o}{\downarrow} e$ tal que $\gamma_n \leqslant b_n$ y $a_n \leqslant b_n+\gamma_n$, para todo $n\in N$,

resulta que $(\bar{S},+,\leqslant,(\bar{e}))$ es semigrupo ordenado con neutro y mínimo $(\bar{e})$, que admite al menos tantas sucesiones o-decrecientes a $(\bar{e})$ según $\leqslant$ como las haya en S. Sea

$$O(X)=\{(x_n)\in X^N;\exists\ \gamma_n \overset{o}{\downarrow} e \mid \text{para cada } n, m(x_n,x_{n+p})\leqslant\delta_n,\ \forall p\in N\},$$

y defínase la equivalencia "$(x_n)\sim(y_n)$ en $O(X)$ sii $\text{o-}\lim_{n\to\infty} m(x_n,y_n)=e$".

Sean $\bar{X}=O(X)/\sim$ y $\bar{m}:\bar{X}\times\bar{X}\to\bar{S}$ definida por $\bar{m}\ \overline{(x_n)},\overline{(y_n)}=\overline{m(x_n,y_n)}$.

Las aplicaciones $i: X\to\bar{X}$, $i(x)=(\bar{x})$ y $f:S\to\bar{S}$, $f(x)=(\bar{x})$ facilitan la inmersión de (X,S,m) en el EMG $(\bar{X},\bar{S},\bar{m})$. Con vistas a probar que $i(X)$ es o-$\bar{m}$ denso en $\bar{X}$, consideraremos $x=\overline{(x_n)}\in\bar{X}$; entonces existe $\delta_n \overset{o}{\downarrow} e$ tal que $\bar{m}(i(x_n),x)\leqslant\overline{(\delta_1,\ldots,\delta_{n-1},\delta_n,\ldots,\delta_n)}=f(\delta_n)$, es decir $\text{o-}\bar{m}\lim_{n\to\infty} i(x_n)=x$.

Para comprobar que $\bar{X}$ es S-completo, escójase una sucesión S-fundamental

$\alpha_\ell = \overline{(x_n^e)}_n$ de $\bar{X}$; entonces existirá $\tau_\ell \overset{\circ}{\downarrow} e$ tal que

$$\bar{m}(\alpha_\ell, \alpha_{\ell+p}) = \overline{(m(x_n^\ell, x_n^{\ell+p}))}_n \leqslant f(\tau_\ell) \overset{\circ}{\downarrow} (\bar{e}).$$

Siendo $\alpha_\ell \in \bar{X}$ existe una familia $(\delta_k^\ell)_{(\ell,k)\in N\times N}$, tal que $\delta_k^\ell \overset{\circ}{\underset{k\to\infty}{\downarrow}} e$ y que para cada ℓ, $m(x_k^\ell, x_{k+p}^\ell) \leqslant \delta_k^\ell$, para todo $p \in N$. Además se cumplirá:

$$\bar{m}(\alpha_\ell, i(x_n^\ell)) \leqslant f(\delta_n^\ell), \; \bar{m}(\alpha_{\ell+p}, i(x_n^{\ell+p})) \leqslant f(\delta_n^{\ell+p}).$$

Por la condición de Everett, existe una sucesión creciente de índices $(\mu_\ell)_{\ell\in N}$ tal que $\delta_{n_\ell}^\ell \underset{\ell\to\infty}{\to} e$; es decir, $\delta_{n_\ell}^\ell \leqslant \mu_\ell$ para cierta $\mu_\ell \overset{\circ}{\underset{\ell\to\infty}{\downarrow}} e$. Sea $\alpha = (x_{n_\ell}^\ell)_{\ell\in N}$. Resulta, en consecuencia:

$$f\left(m(x_{n_k}^k, x_{n_{k+p}}^{k+p})\right) = \bar{m}\left(i(x_{n_k}^k), i(x_{n_{k+p}}^{k+p})\right)$$

$$\leqslant \bar{m}\left(i(x_{n_k}^k), \alpha_k\right) + \bar{m}(\alpha_k, \alpha_{k+p}) + \bar{m}\left(\alpha_{k+p}, i(x_{n_{k+p}}^{k+p})\right)$$

$$\leqslant f(\delta_{n_k}^k) + f(\tau_k) + f(\delta_{n_{k+p}}^{k+p}) \leqslant f(\mu_k + \tau_k + \mu_k),$$

y al ser $(\mu_k + \tau_k + \mu_k) \overset{\circ}{\underset{k\to\infty}{\downarrow}} e$, resulta $\alpha \in \bar{X}$. Por último es

$$\bar{m}(\alpha_\ell, \alpha) \leqslant \bar{m}\left(\alpha_\ell, i(x_{n_\ell}^\ell)\right) + \bar{m}\left(i(x_{n_\ell}^\ell), \alpha\right)$$

$$\leqslant f(\delta_{n_\ell}^\ell + \beta_\ell),$$

y por tanto $o\text{-}\bar{m} \lim_{\ell\to\infty} \alpha_\ell = \alpha$.

Por ejemplo, el Q^+-completado de $(Q, Q^+, |\,|)$ es $(R, R^+, |\,|)$ y en los casos de EM reales se recupera el completado clásico. Nótese que el semigrupo (respecto de la convolución) de las funciones de distribución de probabilidad con un número finito de discontinuidades, verifica la condición diagonal de Everett; por ello cabe aplicar el teorema precedente al caso de los EM probabilísticos de Wald valorados en dicho semigrupo.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALSINA, C., "On countable products and algebraic convexifications of probabilistic metric spaces", Pacific J. of Math.Vol. 76, N°.2 (1978), 291-300.

[2] ALSINA, C. y TRILLAS, E., "Introducción a los espacios métricos generalizados", Pub. Fundación Juan March, Serie Universitaria n°49 (1978).

[3] BATLE, N., "Contribución a un estudio básico de los espacios métricos probabilísticos". Tesis. Pub. Univ. Barcelona (1973).

[4] BLUMENTHAL, L. y MENGER, K., "Studies in Geometry". Freeman, (1970).

[5] FRÉCHET, M., "Les espaces abstraits", Gauthier Villars, Paris, (1929).

[6] MENGER, K., "Statistical metrics, Proc. Nac. Acad. Sci. USA 28 (1942), 535-537.

[7] SCHWEIZER, B., "Multiplications on the space of probability distribution functions, Aeq. Math. vol. 12 f 2/3 (1975) 151-183.

[8] SCHWEIZER, B., "Probabilistic metric spaces: The first 25 years, The New York Statistician 19 (1967) 3-6.

[9] TRILLAS, E., "Sobre distancias estadísticas, Tesis, Pub. Univ. Barcelona (1972).

[10] TRILLAS, E., "Intent d'aproximació a un concepte d'estructura mètrica, en "Una lleu sorra", Ed. 62. Barcelona (1975).

Dep. Matemàtiques i Estadística.
Esc. Tec. Sup. d'Arquitectura.
Universitat Politècnica de Barcelona.
Spain.

Recibido: Noviembre 1.978.
Revisado: Diciembre 1.978.