Stochastica, Vol 2. 1977

EL SISTEMA DE NOMBRES REAL REVISAT (*)

per

M.H.Stone

To Professor P.Pi Calleja

En l'ensenyament de les matemàtiques elementals hi ha diversos problemes importants que continuen reclamant atenció. Un dels més importants i difícils és el problema d'introduir els nombres reals i d'establir llurs propietats característiques. De fet, la dificultat d'aquest problema ha induit molts matemàtics a creure que un tractament matemàtic adequat dels nombres reals ha d'ésser deixat de banda fins arribar l'etapa universitària.Aquesta decisió requereix que en el nivell secundari l'estudiant aprengui

(*) El Professor M.H.Stone expressà al Professor Claudi Alsina, traductor d'aquest article publicat originalment en "L'Enseignement Mathématique" XV (1969) pp. 261-267, el desig de que en versió catalana, aquest formés part del recull de treballs en homenatge al Prof.Pere Pi Caalgunes tècniques fortes i relativament sofisticades (per exemple, les del càlcul amb decimals) i que accepti moltes més coses per acte de fe, com a matèria d'intuïció (p.e. la teoria de límits). Fins i tot, alguns escriptors de matemàtiques elementals es troben atrepats en uncercle viciós: remeten llurs estudiants a la geometria per una comprensió intuïtiva del concepte de nombre real, però basen llur tractament axiomàtic de la geometria en un coneixement previ del sistema dels nombres reals . Mentre que els raonaments circulars poden ésser útils, fins i tot indispensables, en discussions heurístiques, crean un perill clar i immediat de confondre l'estudiant,i el que és pitjor, el propi professor. En lloc d'evadir o de posposar el tema, és altament desitjable que una solució a aquest problema es cerqui en el context de les matemàtiques modernes.

Ara bé, "ressoldre" un problema de pedagogia de la matemàtica involucra al menys tres consideracions de la major importància: la motivació dels conceptes matemàtics que han d'ésser ensenyats, la selecció d'un camí matemàticament clar, simple i eficient de desenvolupar aquests conceptes i l'elaboració d'un programa detallat d'ensenyament,en el cual els conceptes que l'estudiant ha d'entendre i les tècniques que ha de dominar, s'edifiquin pas a pas. Sovint els educadors han omès les dues primeres consideracions per tal de concentrar-se en el disseny del programa d'ensenyament. En altres paraules, han acceptat sense re-exàmen una presentació usualment popular en els cercles matemàtics, basant talment llurs programes d'ensenyament. Hi ha bones raons per pensar que les reformes "curriculars" que s'estan proposant i provant arreu del món actual, es beneficiaran de l'estudi matemàtic més profund del tema en qüestió, dirigit a trobar camins nous i més planers per tractar-lo.

Em sembla que el cas del sistema dels nombres reals dóna especial ènfasi a aquestes observacions. A primera vista, pot semblar que hi ha poques eleccions sobre el camíen el qual la introducció dels nombres reals ha d'ésser motivada i portada a terme. La raó originària, i més exigent, per a inventar i usar els nombres reals fou la de tenir un procés sistemàtic de mesurament i la teoria resultant inclou, inevitablement les definicions i les tècniques damunt les cuals reposa l'estudi dels nombres reals. De fet les ideesd'Eudoxus sobre el mesurament geomètric tal i com són exposades en el llibre cinquè dels "Elements"d'Euclides, contenen en germen tots els elements essencials d'una teoria dels nombres reals (1). Allò que faltà en el tractament d'Eudoxus fou suplit segles més tard per Dedekind, que introduí els conceptes més relevants de la teoria dels conjunts i els utilitzà per a definir i investigar els nombres reals com a tallaments en el sistema dels nombres racionals (2). Variants d'aquest mètode, tals com l'ús de les successions de Cauchy en lloc de tallaments, han estat també desenvolupats (3). Malgrat això, aquestes teories modernes són molt difícils d'introduir en les matemàtiques escolars secundàries principalment per que les definicions donades per als nombres reals són molt rebuscades i menen immediatement a algunes manipulacions intrincades. Així no és ociós tornar a revisar les idees d'Eudoxus i Dedekind per tal de descobrir una manera més simple de desenvolupar el sistema dels nombres reals a través d'una presentació que sigui més directe i menys envoltada de tècniques complicades. Ara bé, de fet resulta ser que els ingradients essencials d'aquesta nova teoria poden ser trobats en alguns estudis recents, començant per un article de N.A. Kolmogorov en 1946 (4) i en una contribució més tardana i força independent de F.A.Behrend (5) en 1956. La claretat i la magnitud de la teoria es beneficien en gran manera, d'un re-exàmen actual de la teoria del mesurament degut a Krantz, Luce, Suppes i Tversky (6). En particular, un teorema de Krantz (7) redueix algunes de les idees de Behrend a una forma simple i efectiva i enforteix els vincles entre la teoria del mesurament i la teoria dels nombres reals. Em sembla que aquest tractament dels nombres reals, deixant de banda el seu interés matemàtic intrínsec, podria ésser esplotat pedagògicament amb grans avantatges.

Per descriure breument la teoria, és convenient partir d'un semigrup abelià arquimedianament ordenat G. Seguint Eudoxus es defineix una injecció Φ dels elements estrictament positius de G en el conjunt de les succesions de nombres naturals, posant $\Phi : x \to \xi_x = \xi_{x,u}$, on $\xi_{x,u}(n) = \max\{m; mu<nx\}$ amb $u > 0$ i $n \geqslant 1$. És fàcil de veure que la succesió ξ frueix de les següents propietats:

(1) $k\xi(n) \leqslant \xi(kn)<k(\xi(n)+1)$,

(2) per cada n existeix un k tal que $k\,\xi(n)<\xi(kn)$.

Seguint Kolmogorov considerem que uns succesió ξ és un nombre real positiu sí i només sí, té les propietats (1) i (2); es denota per R_+ el conjunt de tals successions. Entre els nombres reals positius cal distingir aquells que es generen quan comencem amb G=N, on N és el semigrup additiu dels nombres naturals. D'aquests nombres en direm nombres racionals positius i denotarem amb Q_+ el conjunt format per ells. Quan considerem l'ordre parcial natural < i l'addició natural + entre les succesions de nombres naturals, veiem immediatament que R_+ no és tancat respecte d'aquesta suma, però resulta ésser un conjunt totalment ordenat. Consequëntment podem definir l'addició entre els nombres reals positius pusant $\xi \oplus \eta = \inf\{\zeta;\ \xi+\eta \leqslant \zeta\}$.

Aleshores és fàcil verificar que Φ és un isomorfisme d'ordre, de G en el sistema additiu ordenat de R_+, resultst ja conegut per O.Hölder en 1904 [8]. Quan G=N veiem que $\xi_{p,u} \oplus \xi_{q,u}=\xi_{p+q,u}$, que $\xi_{kp,ku}=$ $=\xi_{p,u}$ i que $\xi_{p,u} < \xi_{q,u}$ sí i només sí p<q. Les propietats del sistema Q_+ de nombres racionals queden establertes i, per tant, podem escriure en el que segueix $\frac{p}{u}$ enlloc de $\xi_{p,u}$. Una anàlisi senzilla demostra que $\frac{p}{u} < \xi$ sí i només sí $pn < \xi(n)\, u$ per algun n. En conseqüència tenim

$$\frac{\xi(n)}{n} < \xi \leqslant \frac{\xi\ (n)\ +1}{n}$$

i la tècnica d'aproximar nombres reals per nombres racionals pot ésser desenvolupada ràpidament, utilitzant el fet que Q_+ és ordre dens en R_+. A la vegada es posen de manifest alguns aspectes importants sobre l'estructura algebràica de R_+ que poden ésser sumaritzades dient que R_+ és un semigrup abelià totalment ordenat, viz., $\oplus$ és una operació associativa i commutativa, i l'equació $\xi\oplus\ \alpha= \beta$ té una solució (única) en R_+ sí i només sí $\alpha < \beta$. A més a més, l'injecció Φ està determinada univocament com l'isomorfisme d'ordre que aplica u en $\frac{1}{1}$.

L'estudi restant de R_+ pot fonamentar-se en l'estudi dels seus endomorfismes d'ordre, tal i com Behrend (5) ho ha fet notar. Naturalment, l'unicitat de l'injecció Φ de R_+ en R_+ té un paper essencial en aquest estudi. Aquests endomorfismes formen un semicos totalment ordenat i les injeccions del seu semigrup additiu en el seu grup multiplicatiu són les funcions exponencials $\xi \to u^{\xi}$. Així R_+ és immers en un grup abelià totalment ordenat R,els endomorfismes del qual formen un cos totalment ordenat amb un grup additiu isomorf a R. Naturalment és obvi, a partir de les consideracions precedents, que dos grups abelians totalment ordenats són necessariament isomorfes i que dos cossos totalment ordenats són necessariament isomorfes exactament d'una única manera.

En ordre a descriure les operacions amb nombres relas d'una forma més concreta, adoptada a les finalitats computacionals, tornem a l'article de Kolmogorov.És fàcil verificar que en termes de la funció

$$\xi \to [\ \xi\ ] = \max_k \{\ m;\ \frac{m}{k} < \xi\ \}$$

tenim

$$(\xi \oplus \eta)\ (n) = \max_k\ [\frac{\xi(kn)+\eta(kn)}{k}]$$

També s'obté una formula semblant per la multiplicació:

$$(\xi \oplus \eta)(n) = \max_k \left[\frac{\xi(kn).\eta(kn)}{k^2} \right]$$

Del fet que $\xi = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi(n)}{n}$, es segueix immediatament que el conjunt $\{n; \xi(n)=\eta(n), \xi\neq\eta\}$ és finit. En conseqüència si b és qualsevol nombre natural diferent de 0 i 1, el nombre real ξ està determinat per la successió $\xi(b^p)$. A l'investigar això es veu que les propietats (1) i (2) anteriors impliquen que $\xi(b^{p+1})=b\xi(b^p)+\xi_{p+1}$, on ξ_{p+1} és un nombre natural tal que $0\leqslant \xi_{p+1}<b$, i que $\xi_{p+1}>0$ per una infinitat de valors de p. Posant $\xi_0=\xi(1)$ veiem que amb cada nombre real positiu hi ha associat un únic desenvolupament b-àdic ilimitat

$$\xi_0\xi_1\xi_2\xi_3\ldots\xi_{p+1}\ \ldots$$

a partir del qual el propi ξ pot ésser recuperat analíticament per la fòrmula

$$\xi = \lim_{q\to x} \sum_{l=0}^{q} \frac{\xi_l}{b^l}$$

Recíprocament, per un ξ_l arbitrari, $l \geqslant 0$, on $0\leqslant \xi_l<b$ per $l\geqslant 1$ i infinits ξ_l diferents de 0, aquesta fòrmula determina un nombre real positiu únic amb l'indicat desenvolupament b-àdic. Les fòrmules donades anterior-

ment per l'addició i la multiplicació poden ser traduides en termes de desenvolupaments b-àdics. Com és ben sabut, això és senzill només en el cas de l'addició. Si es vol poden obtenir-se fòrmules per el canvi de base b.

En una presentació sistemàtica d'aquesta teoria dels nombres reals, seria convenient de començar amb una discusió sobre la teoria del mesurament. No obstant, en el context present semblava ésser avantatjós de donar primerament les anteriors línies generals, començant per el semigrup G i afegint-hi alguns comentaris sobre les formes de substituir G per alguna estructura de tipus més general. La modificació essencial consisteix en restringir l'addició en G tan dràsticament com sigui possible, sense alterar l'existència i el caràcter isomòrfic de l'injecció Φ. Així el teorema de Hölder apareix de forma natural en la formulació generalitzada donada per Krantz, esmentada anteriorment. En un tractament axiomàtic el sistema S que generalitza G és descrit més fàcilment representant-lo com un conjunt totalment ordenat proveït d'un element minimal 0 i d'una família d'escales, on una escala amb unitat s és simplement una injecció $n \to ns$ d'un segment inicial de N en S tal que 01=0 i

$11=1>0$. Els axiomes que estableixen com les diferents escales s'enllacen entre elles, en termes de l'ordre donat en S, són els següents

(I) Si ms, ps i $(n+q)t$ existeixen i $ms \leqslant nt$ i $ps \leqslant qt$, aleshores $(m+p)s$ existeix i $(m+p)s \leqslant (n+q)t$;

(II) Si $\theta < s < t$, aleshores existeixen u i n, tals que $s \leqslant nu < (n+1)u \leqslant t$;

(III) (propietat arquimediana) el conjunt $\{n; ns<t\}$ és finit.

Podem definir una operació binària + restringida a S posant $ms+ps=(m+p)s$ quan el darrer element existeix. Una vegada s'ha establert la generalització de Krantz del teorema de Hölder es veu que aquesta operació és commutativa i associativa, a causa del seu caràcter restringit.

Quan S té un element minimal $u>0$ l'injecció Φ requerida per el teorema de Krantz està determinada de la següent manera: cada element de S és de la forma nu, i $\Phi: nu \to \frac{n}{1} \in R_+$. En altra cas prenem com u qualsevol element no maximal de S i posem $\Phi: x \to \xi_{x,u}$, on

$$\xi_{x,u} = \sup \{\frac{m}{n} \; ; \; m\nu < x \text{ i } u < n\nu \text{ per algun } \nu \in S\}.$$

Aquests resultats són particularment interessants quan

S és un semigrup de germen i tenen aplicacions molt importants a la teoria del mesurament d'angles, la teoria de les rotacions de la geometria euclídia i la teoria del grup multiplicatiu del cos complex. La darrera teoria inclou un tractament unificat de les funcions elementals-trigonomètriques, hiperbòliques i exponencials- i de llurs inverses. Aquestes aplicacions foren discutides en part per Behrend (5) i han estat més elaborades per mi mateix, amb interessants consequències analítiques que no seran explicadesací.

Si algú volgués ensenyar la teoria dels nombres relas tal com l'hem esboçada aquí, quina preparació hauria de requerir dels seus estudiants?. Primerament una incursió en la teoria dels nombres naturals i llurs propietats d'ordre i algebràiques seria absolutament indispensable. Comparativament, de la teoria dels conjunts és necessita molt poqueta cosa, més enllà dels conceptes bàsics de conjunt i de funció, mentre que de l'àlgebra abstracte les nocions d'operació binaria, grupoide i morfisme són essencials. També es requereixen uns pocs coneixements bàsics de la teoria i l'ordre. Com és ben sabut la majoria dels conceptes esmentats poden ésser desenvolupats a través del mateix estudi dels nombres naturals.Donat que la teoria del mesurament es posa aqui com a punt d'arrencada de la construcció d'una teoria dels nombres reals, és evident que l'estudiant hauria de tenir una experiència prèvia adequada amb els procediments de mesura en diversos casos geomètrics i físics. Cal notar que la mesura del temps és aqui fins i tot més instructiva que la mesura de la longitud o d'altres magnituds geomètriques. A més a més, el temps té un ordre psicològic natural i distintes escales de temps poden ser obtingudes per les oscil.lacions de pèndols de diverses longituds, posats tots en moviment desde una mateixa posició de repòs en el mateix instant de temps inicial. En aquesta situació física particular, els axiomes I i III del paràgraf precedent tenen una interpretació interessant. La teoria del mesurament porta directament a experiències concretes amb successions infinites que han de formar part de la preparació de l'estiduant per l'estidu formal dels nombres reals tal i com han estat definits aquí. De fet, probablement seria desitjable que aquesta preparació inclogués l'introducció usual intuitiva o heurística del càlcul amb desenvolupaments decimals i potser també amb desenvolupamnets diàdics. En la meva opinió la classe de preparació ací suggerida és completament compatible amb els programes moderns més avançats de matemàtiques escolars i podrien ésser complementats suficientment aviat per tal de permetre l'inclusió de la present teoria dels nombres reals en els dos darrers anys del programa de l'escola secundària.

REFERENCIES

[1] BOURBAKI,N. "Elements de Mathématiques",Part 1, Book III,Chapter IV, Note historique ,142-152.

[2] DEDEKIND,R."Was sind und was sollen die Zahlen".

[3] WAERDEN,B.L. VAN DER."Noderen Algebra" Part I, 212-218,(berlin 1930).

[4] KOLMOGOROV,A.N. "Uspékhi Matematischeskhik Nauk," 1(1)(1946),217-219.Aquest article no conté demostracions, pero les demostracions son donades per N.I. KAVUN, Uspekhi,2 (5) (1947), 199-229.

[5] BEHREND,F.A. "Mathematische Zeitschrift",63(1956) 345-362.

[6] KRANTZ,D.H.,R.D.LUCE,Patrick SUPPES and Amos TVERSKY estàn preparant un llibre sobre teoria de la mesura que s'espera apareixi en un futur no llunyà.

[7] KRANTZ,D.H. com anotat en [6]

[8] HÖLDER,O. "Berichte der Verhandlungen der königlichen-

Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften
zu Leipzig, "Mathematische-physikalische Klasse"
53,I (1904), 1-64.

M.H.Stone
Dept. of Math.
University of Massachussetts
Amherst,Mass..01002