SOBRE LA GEOMETRÍA DE LA DIFERENCIA SIMÉTRICA

por

A. M. CUXART

Iniciando la aplicación del programa de Erlangen al caso de los métricos de Riesz, se introdujo en [4] la geometría métrica como estructura que unifica y generaliza los conceptos de espacio métrico ordinario, de espacio métrico probabilístico (de Wald-Šertnev) y de álgebra de Boole autometrizada (Menger-Blumenthal-Ellis). Proseguido en [5] el estudio de los retículos provistos de una valoración generalizada y de su geometría («valorada») y analizado el caso de las álgebras de Boole de cuatro puntos, todo ello hacía presuponer la existsncia de una fuerte relación entre el grupo cociente L/v, determinado por una L-valoración v deqnida en el álgebra de Boole y la geometría asociada al pre-métrico $(L,(L \leqslant), (L,\oplus), d_v)$, con $d_v(a, b) = v(a) \oplus v(b)$.

Es fácil ver las:

PROP. 1. La geometría valorada de $(L, (L, \oplus), v)$ es un subgrupo de la geometría métrica de $(L, (L, \leqslant), (L, \oplus), d_v)$.

PROP. 2. Si v es una valoración inyectiva, dos isometrías que coinciden en un elemento de L, son idénticas.

Evidentemente, toda traslación de $(L, \oplus)$ es una isometría de GM_{d_v} con lo que el grupo $(L, \oplus)$ se inyecta homomórficamente en GM_{d_v}.

PROP. 3. Condición necesaria y suficiente para que la geometría métrica coincida con el grupo de las traslaciones de $(L, \oplus)$ es que la valoración sea inyectiva.

Demostración. La condición es suficiente ya que dada $h \in GM_{d_v}$ basta considerar la traslación $t_{x \oplus h(x)}$ para un elemento $x \in L$ cualquiera .En virtud de la proposición 2, h y $t_{x \oplus h(x)}$ son idénticas. Recíprocamente, si consideramos al álgebra de Boole de cuatro puntos con máximo u y mínimo e $L_4 = \{a, b, u, e\}$, y la L_4-valoración dada por $v(a) = v(u) = a, v(b) = = v(e) = e$, encontramos isometrías de GM_{d_v} que no son traslaciones; por ejemplo, $h(a) = u, h(u) = a, h(e) = e, h(b) = b$, es una isovaloración y, en consecuencia, una isometría, pero no es una traslación porque tiene puntos fijos.

TEOREMA. La geometría valorada es un subgrupo normal de la geometría métrica y el grupo cociente que definen es isomorfo al grupo $(L/v, \oplus)$.

Demostración. Consideremos la aplicación φ de GM_{d_v} en L/v definida por $\varphi(h) = \overline{h(e)}$. φ es un morfismo de grupos cuyo núcleo es GV_v, de donde el primer aserto. φ es epiyectiva, ya que dado un $\bar{x} \in L/v$ basta considerar la traslación h_x, con $x \in \bar{x}$, que por φ se transforma en $\bar{x}$.

Corolario. Si v es un endomorfismo de $(L, \oplus)$, es decir, si $v(e) = e$ ([5]) entonces $L/Ker\, v = L/v$ y $GM_{d_v} \cong v(L)$.

REFERENCIAS

1. J.C. ABBOT, *Trends in Lattice theory*. Van Nostrand, 1970.
2. L. BLUMENTHAL - K. MENGER, *Studies in Geometry*. W. H. Freeman Co., 1970.
3. D. ELLIS, *Autometrized Boolean Algebras*. I, pág. 87-93, y II, pág. 145-147. Canad. Jour. of Math., 1951.
4. E. TRILLAS, *Sobre distancias estadísticas*. Tesis. Universidad de Barcelona, 1972.
5. A. VILA, *Contribucion al estudio de los reticulos S-valorados*. Tesis. Universidad de Barcelona, 1974.

Mayo, 1975.
Universidad Politécnica de Barcelona.