NOTES PER A UN ESTUDI DE LA GEOMETRIA SOBRE GRUPS INVOLUTIUS (*)

per

E. Trillas.

INTRODUCCIÓ:

V. Glivenko (2), G. Birkhoff (3) i L. M. Blumenthal (4) estudiaren, seguint les idees de K. Menger (1), l'espai mètric associat a un reticle normat, concepte generalitzat més tard pel Blumenthal mateix (5), per C. J. Penning (7) i per D. O. Ellis (9) al cas d'àlgebres de Boole auto-metritzades. E. Trillas (10) generalitzà el concepte d'espai mètric i de reticle valarat, ocupant-se més tard A. Vila (11) d'aprofundir l'anàlisi dels reticles amb valoracions generalitzades i les àlgebres de Boole auto-metritzades sobre llur grup involutiu i A. Cuxart (12) relacionà les geometries mètriques i valorades en aquest darrer cas. Per tot això semblava escaient de cerca un enquadrament dins el marc dels espais mètrics generalitzats de Riesz, introduïts per l'autor, de les distàncies amb valors en grups involutius qualssevol i això és el que dóna lloc a aquesta nota, en la que, a més a més, es relacionen els mètrics de Riesz amb les «distàncies dirigides» de D. Singmaster (3) i es respecta la idea de «distància natural» d'un grup abelià, donada per K. Menger (14): si algú hi troba quelcom d'aprofitable, aleshores ha de saber que N. Batle, C. Alsina i A. Cuxart han aportat més d'una idea i han estalviat més d'un error.

1. — *Concepte de mètric booleà.*

Si $(G, +)$ és un grup involutiu amb neutre O, l'únic ordre compatible amb l'operació és la igualtat, per conseqüent $G = (G, +, =)$ és l'únic grup ordenat sobre $(G, +)$ i el designarem per «grup ordenat involutiu».

Anomenarem *mètric booleà* tot espai mètric de Riesz (10) del tipus (S, G, d), és a dir, tota terna en la qual S és un conjunt no buit, G és un grup ordenat involutiu i aital que $d{:}SxS \to G$ (distància booleana) verfica les tres propietats:

$$- d(p, p) = O \text{ (anul.lació)}$$
$$- d(p, q) = d(q, p) \text{ (simetria)}$$
$$- d(p, q) = d(p, r) + d(r, q) \text{ (triangular)},$$

(*) Treball realitzat gaudint d'un Ajut de la Fundació «Juan March».

per a qualssevol p, q, r de S. Notem que la desigualtat triangular es redueix a una igualtat triangular.

Prop. 1. — Condició necessària i suficient per tal que (S, G, d) sigui un mètric booleà és que existeixi una aplicació $v{:}S \to G$, tal que $d(p, q) = v(p) + v(q)$ per a tot $(p, q) \in SxS$.

En efecte: Si $v{:}S \sim G$, aleshores $d_v(p, q) = v(q) + v(p)$ és òbviament una distància booleana. Recíprocament, si d és una distància booleana, fixat $z \in S$ amb $v_z(p) = d(p,z)$, es verifica $d_{v_z}(r,s) = v_z(r) + v_z(s) = d(r, z) + d(s, z) = d(r, s)$, d'on $d = d_{v_z}$.

Per tant és clar que tota distància booleana prové d'una aplicació, fet en el qual el caràcter de grup involutiu té un paper essencial.

Si $v \in G^S$ i $v \in G^S$ podem definir $(v + v')(x) = v(x) + v'(x)$, i si $k \in G$ s'identifica amb $k(x) = k$, aleshores

Prop. 2. — $d_v = d_{v'}$ sí i solament si existeix $k \in G$ tal que $v' = v + k$.

En efecte, si $v' = k + v$, òbviament $d_v = d_{v+k}$ i recíprocament, si $v, v' \in G^S$ i $d_v = d_{v'}$, és $v(p) + v(z) = v'(p) + v'(z)$ i fixant $z \in S$, $v'(p) = k_z + v(p)$, per a qualsevol $p \in S$, amb $k_z = v'(z) + v(z)$.

Es clar, doncs, que a efectes mètrics és suficient treballar amb $G^S/\sim$, on $\sim$ és la relació d'equivalència definida per $v \sim v' \Leftrightarrow d_v = d_{v'} \Leftrightarrow v' = k + v$, $k \in G$. Les classes $\langle v \rangle = \{v';\ v' = k + v,\ k \in G\}$ de $G^S/\sim$ agrupen les aplicacions que defineixen la mateixa distància i les anomenarem *G-normes* de S. $G^S/\sim$ amb l'operació puntual $(\langle v \rangle + \langle v' \rangle)(x) = \langle v(x) + v'(x) \rangle$ és un grup involutiu amb $\langle 0 \rangle = \{v' = k,\ k \in G\}$, essent $0(x) = 0$. Quedant doncs les *G-normes* definides a menys d'una constant s'hi val considerar que $0 \in v(S)$, puix que en altre cas prendrem $v' = v(z) + v$, amb $z \in S$ fixe; veurem immediatament que això no alterarà les característiques geomètriques que pretenem estudiar. En el que resta v representarà $\langle v \rangle$.

Via aplicacions $v{:}G \to G$, el mateix G pot dotar-se d'estructura de mètric booleà (G, G, d_v); en particular amb $v = I_G$ s'obté la mètrica booleana natural de G: $d(p, q) = d_{I_G}(p, q) = p + q$. Si S té estructura d'àlgebra de Boole, amb l'operació «diferència simètrica» $a \Delta b = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee b)$ hom té el grup involutiu (S, Δ) i cada aplicació $v{:}S \to S$ permet de considerar el mètric booleà $(S, (S, \Delta), d_v)$ on $d_v(a, b) = v(a) \Delta v(b)$ (vid. (15)); si $v = I_S$, es retroba al mètric booleà natural $(S, (S, \Delta), d(a, b) = a \Delta b)$ (vid. (15)). De fet, tot conjunt S pot dotar-se d'estructura de mètric booleà considerant només $(\mathfrak{P}(S), \Delta)$, $v(x) = \{x\}$, $d_v(x, y) = \{x\} \Delta \{y\}$, que és igual a ϕ si $x = y$ i a $\{x, y\}$ si $x \neq y$.

En aparença la «geometria» d'un mètric booleà és simple, puix que per exemple, el concepte d' «entrellat» («between», vid. (4), (10)) degenera, de manera que en tota terna de punts, qualsevol està entre els altres dos. En un altre ordre d'idees, el concepte d' «entorn esfèric» (vid. (15)) quedarà ací reduit al de «circumferència» $E_p(k) = \{q \in S;\ d_v(p, q) = k\} = v^{-1}(k + v(p))$, conjunt que és no buit sí i solament si $k + v(p) \in v(S)$. Aleshores $E_p(0) = v^{-1}(v(p))$, i així les clases de S/v romanen caracteritzades com a circumferències de centre en un dels seus punts i radi 0. Si v és injectiva, aleshores $E_p(k)$ es redueix a l'únic punt $v^{-1}(k + v(p))$ o és buit, segons que $k + v(p)$ estigui o no en $v(S)$. Quan $E_p(k)$ conté més d'un punt, existeixen «triangles isòsceles» de vèrtex p i és suficient que $k \neq 0$ per tal que els dits triangles no siguin «equilàters», puix que si $r, s \in E_p(k)$ és $d(r,s) = d(r,p) + d(p,s) = 0$. Amb això veiem, a més, que tota parella de punts de $E_p(k)$ estan a distància nul.la, per la qual cosa tot $k \in G$ fá que $E_p(k)$ està contingut en una classe de S/v. A més, si $E_p(k) \neq \phi$ existeixen punts $q \in S$ tals que $v(q) = k + v(p)$ i $E_p(k) = v^{-1}(v(q))$, és a dir, com a conclusió, els $E_p(k)$ o són buits o són les classes de S/v.

2. — *Geometria en un mètric booleà.* —

Si (S, G, d_v) és un mètric booleà amb *G-norma v*, aleshores podrem considerar (vid. (15), (4), (6), (7), (9))) el conjunt de transformacions bijectives $GM_v = \{\alpha \in \mathfrak{S}_S;\ d_v o(\alpha \times \alpha) = d_v\} = \{\alpha \in \mathfrak{S}_S;\ d_{vo\alpha} = d_v\}$ que, amb la composició d'aplicacions dóna el grup (GM_v, o) de les isometries, que anomenarem la *geometria mètrica* (vid. (10)) del mètric booleà $(S\ G, d_v)$., La geometria mètrica no depèn de l'elecció de v dins la norma, car per a tot $k \in G$ és $GM_{v+k} = GM_v$, puix que $d_v = d_{k+v}$. En virtut de la proposició 2 del § 1, és clar que de $d_{vo\alpha} = d_v$ se segueix la.

Prop. 3. — $\alpha \in GM_v$ sí i solament si existeix $k_\alpha \in G$, tal que $v \circ \alpha = k_\alpha + v$.

A més, donada α, k_α es única: si existissin k'_α i k''_α, i si $z \in S$, seria $k'_\alpha + v(z) = k''_\alpha + v(z)$, i $k'_\alpha = k''_\alpha$. En conseqüència disposem de l'aplicació $\varphi: GM_v \to G$, $\varphi(\alpha) = k_\alpha$, que és un morfisme entre la geometria mètrica i $(G, +)$, donat que si $\varphi(\alpha \circ \beta) = k_{\alpha \circ \beta}$, de $v \circ (\alpha \circ \beta) = k_{\alpha \circ \beta} + v$, se segueix que $k_{\alpha \circ \beta} + v(x) = v(\alpha(\beta(x))) = k_\alpha + v(\beta(x)) = k_\alpha + k_\beta + v(x)$, d'on $\varphi(\alpha \circ \beta) = k_{\alpha \circ \beta} = k_\alpha + k_\beta = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. Per això ker $\varphi = \{\beta \in GM_v;\ \varphi(\beta) = 0\} = \{\beta \in GM_v;\ v \circ \beta = v\}$ és un subgrup invariant de la geometria mètrica, que *consta d'aquelles isometries que conservan la valor de la G-norma*, i que designarem per GV_v (vid. (11) i (12)). Es clar que per tot $k \in G$, es $GV_{k+v} = GV_v$.

Si el subgrup de $(G, +)$ format per $\{k_\alpha;\ \alpha \in GM_v\} = \varphi(GM_v)$ el designem per «espectre» del mètric booleà (S, G, d_v) i el notem $sp(v)$, s'obté la

Prop. 4. — $GM_v/GV_v \approx sp(v)$.

Així $sp(v)$ representa les classes d'isometries α amb igual k_α, és a dir, *els tipus d'isometries de* (S, G, d_v) *que són realment possibles* i, sempre que $sp(v)$ no coincideixi amb $G(\varphi$ no epijectiva), existiran elements del grup que no definiran cap isometria.

Les següents proposicions tenen validesa si S conté més d'un punt.

Prop. 5. — $GV_v = \{I_S\} \iff v$ és injectiva $\iff \varphi$ és injectiva.

En efecte, si v és injectiva i $\beta \in GV_v$, de $v \circ \beta = v$ se segueix $\beta(x) = x$, per a tota $x \in S$. Recíprocament si v no és injectiva existeixen $p \neq q$ tals que $v(p) = v(q)$, i definint $\beta: S \to S$ per $\beta(p) = q$, $\beta(q) = p$, $\beta(z) = z$ si $z \notin \{p, q\}$, resulta $\beta \in GV_v - \{I_S\}$. Trivialment $GV_v = \{I_S\} \iff \varphi$ és injectiva. En aquestes condicions $GM_v \approx sp(v)$ i la geometria és un grup involutiu.

Prop. 6. — $GV_v = \mathfrak{S}_S \iff GM_v = GV_v = \mathfrak{S}_S \iff v$ és constant.

En efecte, si v és constant i $\alpha \in \mathfrak{S}_S$, de $v(\alpha\, x) = ct = v(x)$ se'n segueix $\alpha \in GV_v$, per tant $\mathfrak{S}_S \subset GV_v \subset GM_v \subset \mathfrak{S}_S$ i tots són iguals. Recíprocament si $GV_v = \mathfrak{S}_S$ i $p, q \in S$ $(p \neq q)$, considerant la permutació α_{pq} tal que $\alpha_{pq}(p) = q$ (que sempre existeix), $v \circ \alpha_{pq} = v(q) = v(p)$ i v és constant.

Donat $p \in S$, el *grup d'isotropia* de p, $I(p, v) = \{\sigma \in GM_v\colon \sigma\, p = p\}$, és el conjunt d'isometries que deixen p fix. Si $\sigma \in I(p, v)$ és $k_\sigma + v(p) = v\sigma(p) = v(p) \Rightarrow k_\sigma = 0$, d'on $I(p, v) \subset GV_v$. Per això té sentit (16) parlar de (GV_v, o) com a *grup de simetria* del mètric booleà (S, G, d_v).

Prop. 7. — Si $\alpha \in GM_v - GV_v$, per a tot $a \in v(S)$ existeix un únic $b \in v(S)$ tal que $k_\alpha = a + b$.

Demostració: Com que $k_\alpha \neq 0$, si fos $\alpha[x] \subset [x]$ per a tota classe de S/v, aleshores de $\alpha(x) \in [x]$, que equival a $v(\alpha\,(x)) = v(x)$ se'n seguiria $k_\alpha = 0$: *per a tota isometria que no sigui de GV_v tot element resulta canviat de classe mòdul v.* Aleshores per $a \in v(S)$, considerem $v^{-1}(a) = [x]$ i $[\alpha\, x] \neq [x]$ amb què si $[\alpha\, x] = v^{-1}(b)$ haurà d'ésser $b \neq a$ i de $v(x) = a$, $v(\alpha\, x) = b$, resulta $a + v(\alpha\, x) = a + b = b + v(x) \Rightarrow k_\alpha = a + b$. Donats a i α, és clara la unicitat de b. En particular.

Corol.lari: $0 \in v(S) \Rightarrow sp(v) \subset v(S)$.

Basta aplicar la proposició amb $a = 0$ puix que aleshores $k_\alpha = 0 + b \in v(S)$.

Prop. 8. — Si v és amb dos valors, $v(S) = \{0, a\}$, tenim:

«$\alpha \in GM_v - GV_v \Leftrightarrow$ permuta entre elles les dues classes de S/v».

Demostració: $0 \in v(S) \Rightarrow k_\alpha \in v(S) \Rightarrow k_\alpha = a$. Si $x \in v^{-1}(a)$, aleshores $v(\alpha\, x) = k_\alpha + a = a + a = 0$ i $\alpha\, x \in v^{-1}(0)$. Si $y \in v^{-1}(0)$, aleshores $v(\alpha\, y) = k_\alpha + v(y) = k = a$ i $\alpha\, y \in v^{-1}(a)$. Recíprocament si $\alpha\colon S \to S$ és una bijecció que canvia entre elles les classes, aleshores:

$$- x \in v^{-1}(0) \Rightarrow \alpha\, x \in v^{-1}(a) \Rightarrow v(\alpha\, x) = a + 0 = a + v(x)$$
$$- y \in v^{-1}(a) \Rightarrow \alpha\, y \in v^{-1}(0) \Rightarrow v(\alpha\, y) = a + a = a + v(y),$$

i així $v\alpha = a + v$, amb $a \neq 0$ i per tant $\alpha \in GM_v - GV_v$.

Si v té un nombre finit de valors diferents i aquest nombre es senar: $GM_v - GV_v = \phi$. En efecte, si v té, per exemple, tres valors $\{0, a, b\}$, $\alpha \in GM_v - GV_v$ canviarà de classe els elements de S com ja s'ha vist. Si $x \in v^{-1}(0)$ porta a $\alpha\, x \in v^{-1}(a)$ aleshores $v(\alpha\, x) = a + 0 = a + v(x)$ i $k_\alpha = a$. Si $y \in v^{-1}(b)$ es canvia en:

$$- \alpha\, y \in v^{-1}(0), \text{ serà } v\, \alpha\, y = 0 = b + b = b + vy \Rightarrow k_\alpha = b$$
$$- \alpha\, y \in v^{-1}(a), \text{ serà } b + v\, \alpha\, y = b + a = a + vy \Rightarrow v\, \alpha\, y = (a + b) + vy \Rightarrow k_\alpha = a + b,$$

i amb això $a = b = a + b \Rightarrow a = b = 0$ és una absurditat.

3. — *Mètrics booleans amb G-norma injectiva.*

S'ha vist que GV_v es redueix a la identitat sí i solament si v és injectiva, cosa que indica en particular que, d'isometries amb un punt fix diferents de la identitat n'existiràn només quan v no sigui injectiva.

Una propietat desitjable de tota mètrica és el caràcter *separador:* $(d\,(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q)$ que aquí ara equival a $v(p) = v(q) \Leftrightarrow p = q$; en conseqüència, *en un mètric booleà* (S, G, d_v) *és* d_v *separadora sí i solament si és* v *injectiva.* Atés que v és injectiva sí i solament si ho és $k + v$, per a qualsevol $k \in G$, resulta que *el caràcter separador de* d_v *equival al caràcter injectiu de la G-norma que la defineix.*

Vegem ara que donat un mètric booleà (S, G, d_v) amb mètrica no separadora, sempre és posible dotar S/v d'estructura de mètric booleà sobre G amb mètrica separadora. Com que $d_v(p, q) = 0 \Leftrightarrow v(p) = v(q)$, en $S/v \times S/v$ l'aplicació $\widehat{d}_v([p], [q]) = d_v(p, q)$, si és ben definida, és una distància separadora. Siguin $x \in [p]$, $y \in [q]$:

$$\widehat{d}_v([x], [y]) = d_v(x, y) = d_v(x, p) + d_v(p, y) = d_v(p, q) + d_v(q, y) = d_v(p, q).$$

A més $\widehat{v}: S/v \to G$, $\widehat{v}[p] = v(p)$, és ben definida, puix que si $x \in [p]$ és $v(x) = v(p)$, i aleshores $d_{\widehat{v}}([p], [q]) = v(p) + v(q) = \widehat{d}_v([p], [q])$, i arribem aixi al mètric booleà $(S/v, G, d_v)$, donat per una *G-norma* $\widehat{v}$ que és injectiva, essent òbviament $\widehat{v}(S/v) = v(S)$ i $GV_{\widehat{v}} = \{I_{S/v}\}$.

Prop. 9. — Si v és injectiva, $\alpha \in GM_v$ sí i solament si existeix $k \in G$ tal que $v\,\alpha = k + v$.

En efecte, α és injectiva perquè si $\alpha\, p = \alpha\, q$, aleshores: $v(\alpha\, p) = v(\alpha\, q) \Rightarrow k + v(p) = k + v(q) \Rightarrow v(p) = v(q) \Rightarrow p = q$. Per a qualsevol $p \in S$, és $v\,\alpha(\alpha\, p) = k + v(\alpha\, p) = v(p)$, i $\alpha(\alpha\, p) = p$, o sigui $p \in \alpha(S)$, i α és epijectiva.

Prop. 10. — Si v és injectiva *i* α, $\beta \in GM_v$ coincideixen sobre un element, és $\alpha = \beta$.

En efecte, si $\alpha\, p = \beta\, p$, $v(\alpha\, p) = k_\alpha + v(p) = v(\beta\, p) = k_\beta + v(p)$, i $k_\alpha = k_\beta$, doncs $v\alpha = v\beta$, o sigui $\alpha = \beta$.

Prop. 11. — Si v és injectiva i $v(S)$ és un subgrup de $(G, +)$, aleshores $sp(v) = v(S)$.

En efecte, si $k \in v(S)$, es $k = v(p)$ amb $p \in S$, per conseqüent $k + v(x) = v(p) + v(x) \in v(S) \Rightarrow v^{-1}(k + v(x)) \in S$, $\forall x \in S$. L'aplicació $\alpha_k: S \to S$, $\alpha_k(x) = v^{-1}(k + v(x))$ verifica $v\, \alpha_k(x) = k + v(x)$, que vol dir $\alpha_k \in GM_v$ amb $k_{\alpha_k} = k \in sp(v)$, d'òn $v(S) \subset sp(v)$.

Corol.lari. Donat (S, G, d_v), si $v(S)$ és subgrup de $(G, +)$, aleshores $sp(\widehat{v}) = v(S)$.

Ambdós resultats manifesten el caràcter maximal de $sp(v)$ quan v és injectiva.

Prop. 12. — $sp(v)$ és subgrup de $sp(\widehat{v})$.

Demostració: I) Donada $\alpha \in GM_v$, sia $\widehat{\alpha} : S/v \to S/v$, $\widehat{\alpha}[p] = [\alpha p]$, aplicació ben definida puix que si $p' \in [p]$, $v(\alpha p) = k_\alpha + v(p') = v(\alpha p')$, aleshores $[\alpha p] = [\alpha p']$. A més, $\widehat{v}(\widehat{\alpha}[p]) = \widehat{v}[\alpha p] = v(\alpha p) = k_\alpha + v(p) = k_\alpha + \widehat{v}[p]$, o sia $\widehat{v}\,\widehat{\alpha} = k_\alpha + v$, pel que $\widehat{\alpha} \in GM_{\widehat{v}}$ i $k_{\widehat{\alpha}} = k_\alpha$. II) L'aplicació $\Psi : GM_v \to GM_{\widehat{v}}$, $\Psi(\alpha) = \widehat{\alpha}$ satisfà:

— $\Psi\alpha = \Psi\beta \iff \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \iff k_{\widehat{\alpha}} = k_{\widehat{\beta}} \iff v\alpha = v\beta : \Psi$ és injectiva $\iff$ v és injectiva.

— $\widehat{\alpha \circ \beta}[p] = [\alpha \circ \beta\,(p)] = [\alpha(\beta\,(p))] = (\widehat{\alpha} \circ \widehat{\beta})\,[p] \Rightarrow \Psi(\alpha \circ \beta) = \Psi\,(\alpha) \circ \Psi\,(\beta)$: és morfisme.

— $\ker\ \Psi = \{\alpha ; \widehat{\alpha} = I_{S/v}\} = \{\alpha\,;\,[\alpha p] = [p],\ \ \forall\, p \in S\} = \{\alpha\,;\,v\,\alpha = v\} = GV_v$.

III) En conseqüència, $GM_v/GV_v \approx \Psi(GM_v)$, i $\Psi(GM_v)$ és un subgrup de $GM_{\widehat{v}} = GM_{\widehat{v}}/GV_{\widehat{v}} = sp(\widehat{v})$.

Resta la identificació de GM_v en el cas que v és injectiva.

Prop. 13. — Si v és injectiva, per a tot $\alpha \in GM_v$ és: $\alpha(x) = v^{-1}(k_\alpha + v(x))$, $\forall\ x \in S$.

En efecte, si $x \in S$, $k_\alpha + v(x) = v\alpha\,(x)$ implica $k_\alpha + v(x) \in v(S)$, amb indepèndencia del caràcter de v, però essent v injectiva es pot isolar α.

Corol.lari Si v és injectiva i $v(S)$ és subgrup de $(G, +)$, $\alpha \in GM_v$ sí i solament si $\alpha(x) = v^{-1}(k + v(x))$, per a un $k \in v(S)$.

Es $v(S) = sp(v)$ i $v\,\alpha = k_\alpha + v$.

Precisament, en el cas que $v(S)$ és un subgrup de G, si $\alpha\,x = v^{-1}\,(k + v(x))$, de $k \in v(S) = sp(v)$ se segueix per la proposició 7 del § 2 que, per a tot $p \in S$, existeix $b \in v(S)$ tal que $k = v(p) + b$, però per la injectivitat de v, existeix un únic $q \in S$ tal que $b = v(q)$. En conseqüència.

Corol.lari. Si v és injectiva i $v(S)$ és subgrup de $(G, +)$, per a cada $\alpha \in GM_v$ i cada $p \in S$, existeix un únic $q \in S$ tal que $\alpha(x) = v^{-1}(v(p) + v(q) + v(x))$.

Observem que $\alpha(p) = v^{-1}(v(p) + v(q) + v(p)) = q$, doncs q és el transformat de p per la isometría α.

Prop. 14. — Si v és injectiva i $p \neq q$ $(p, q \in S)$, existeix una única isometria $\alpha_{pq} \in GM_v - \{I_S\}$ tal que $\alpha_{pq}(p) = q$.

En efecte, considerem $k = v(p) + v(q) \neq 0$ i definim $\alpha_{pq}(x) = v^{-1}\,(k + v(x))$: s'obté una isometria que no és la identitat i transforma p en q. α_{pq} és única, perquè si β en fos una altra tal que $\alpha_{pq}(p) = \beta(p) = q$, aleshores $\alpha_{pq} = \beta$, per la proposició 10.

En el cas d'un mètric booleà (S, G, d_v) amb v injectiva i $v(S)$ subgrup de G, existeix l'únic element $\alpha_{pq}(e) = v^{-1}(v(p) + v(q) + v(e)) = v^{-1}(v(p) + v(q)) \in S$, obtenint-se una operació en S, $p \otimes q = v^{-1}(v(p) + v(q))$ que dota a S de l'estructura de grup involutiu $(S, \otimes)$ isomorf al $(v(S), +)$.

Teorema 1. — Si v és injectiva i $v(S)$ subgrup de $(G, +)$, aleshores GM_v és el grup de les traslacions de $(S\ \otimes)$.

En efecte $t_p(x) = x \otimes p$ (traslació) $\Rightarrow vt_p(x) = v(x \otimes p) = v(x) + v(p)$: t_p és una isometria amb $k_{t_p} = v(p)$. Recíprocament, si $\alpha \in GM_v$, prenent l'element $e \in S$ tal que $v(e) = 0$ i amb $p = e \otimes \alpha(e)$ és $t_p(e) = \alpha(e)$ d'ón $\alpha = t_p$.

Corol.lari. Si v és injectiva i $v(S)$ subgrup de G, GM_v és un grup isomorf al $v(S)$.

En efecte, el grup de les traslacions de $(S, \otimes)$ és isomorf al $(S, \otimes)$ que, alhora, ho és al $v(S)$.

Teorema 2. — Si v és injectiva, $v(S)$ subgrup de G i $\sigma : H \to S$ una «congruència» (bijecció tal que $d_v(r, s) = d_v\ (\sigma\, r,\ \sigma\, s)$, $\forall r,\ s \in H$, amb $\phi \neq H \subset S$), aleshores existeix una única isometria de S tal que, sobre H, coincideix amb σ.

Demostració. Prenem $r \in H$ i $\sigma\, r = s \in \sigma\ (H)$; la traslació $t(x) = x \otimes (r \otimes s)$, $x \in S$, és l'única isometria de S que canvia r en s. Veiem que t coincideix, en H, amb σ; si $x \in H$ es $d\ (r, x) = d_v\ (\sigma\, r,\ \sigma\, x) = d_v\ (s, \sigma\, x) = v(s) + v\ (\sigma\, x)$, i $d_v(r, x) = d_v(t(r),\ t(x)) = d_v(s, t(x)) = v(s) + v(t(x))$, d'on $v(\sigma\, x) = v(t(x))$ i $\sigma\, x = t(x)$, per $x \in H$.

4. — *Mètrics booleans sobre un grup.*

Sigui (S, G, d_v) un mètric booleà i $(S, \oplus)$ un grup amb neutre e. Per trobar $v : S \to G$ tal que $d_v = d$, cal considerar només $v_e(p) = d(e, p)$ i així, si $v \in \langle v_e \rangle$ serà $v = k + v_e$, és a dir $k = v(e)$: les aplicacións d'una *G-norma* queden individuades per la valor que prenen sobre el neutre de $(S, \oplus)$.

Es possible que $v(e) \neq 0$ encara que $0 \in v(S)$. Per exemple, si junt amb $G = \{0,1\}$ (grup involutiu amb dos elements), considerem un $(S, \oplus)$ que sigui suma directa de dos subgrups H_1, H_2, aleshores $v : S \to G$ definida per $v(x) = 1$, si $x \in H_1$ i $v(x) = 0$, si $x \in H_2 - \{e\}$, dóna $v(S) = G$ però $v(e) = 1 \neq 0$. Cal notar que l'aplicació v verifica $v(x \oplus y) = v(x) + v(y) + v(e)$ per a qualssevol $x, y \in S$, que $v^{-1}(1) = H_1$ és un subgrup i que $v^{-1}(0) = H_2 - \{e\}$ no ho és.

Prop. 15. — Una condició necessària i suficient perquè (S, G, d_v) admeti com a isometries les traslacions de $(S, \oplus)$, és que v verifiqui:

$$v(p \oplus q) = v(p) + v(q) + v(e),$$

qualssevol que siguin $p, q \in S$.

En efecte, si v verifica una tal igualtat, $d_v(x \oplus p, y \oplus p) = d_v(x, y)$. Recíprocament, si les traslacions de $(S, \oplus)$ són isometries, de la igualtat anterior se segueix $v(x \oplus p) = v(x) + v(y) + v(y \oplus p)$, i així si $x = e$ i $p = -y$, resulta $v(-y) = v(e) + v(y) + v(e) = v(y)$, per tant, cal només fer $y = -p$ perquè $v(x \oplus p) = v(x) + v(-p) + v(e) = v(x) + v(p) + v(e)$. Òbviament, de $vt_z = k_{t_z} + v$, es dedueix $v(x + z) = k_{t_z} + v(x)$, d'on $k_{t_z} = v(z) + v(e)$: per tant, a GV_v hi són només aquelles traslacions per a les quals $z \in v^{-1}(v(e))$.

És clar que $v(x \oplus y) = v(x) + v(y) + v(e)$ si i només si $v' = v(e) + v$ és un morfisme entre els grups $(S, \oplus)$ i $(G, +)$; amb això $v^{-1}(v(e)) = ker\ v'$ i per conseqüent,

Prop. 16. — Si $v(x \oplus y) = v(x) + v(y) + v(e)$, aleshores S/v és un grup quocient amb neutre $v^{-1}(v(e))$ que és isomorf al grup $v(e) + v(S)$, i és involutiu.

En efecte, $p \equiv q\ (v) \Leftrightarrow v(p) = v(q) \Leftrightarrow v(p \oplus q) + v(e) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p \oplus q \in v^{-1}(v(e)) = ker\ v'$, per tant $S/v = S/ker\ v'$. Es clar que les classes son del tipus $[p] = v^{-1}(v(p)) = p + v^{-1}(v(e))$, i que $S/v \approx v'(S) =$ $= v(e) + v(S)$. El caràcter involutiu es inmediat, essent isomorf a un subgrup de G.

Teorema 3. — Si (S, G, d_v) és un mètric booleà sobre un grup $(S, \oplus)$ amb neutre e i la *G-norma* verifica $v(x \oplus y) = v(x) + v(y) + v(e)$, qualssevol que siguin $x, y \in S$, aleshores val l'isomorfisme de grups $sp(v) \approx S/v$.

Demostració. $\phi : GM_v \to S/v$, $\phi(\alpha) = [\alpha\, e]$, és un morfisme entre ambdós grups puix que $v^{-1}(v(\alpha\, e) + v(\beta\, e) + v(e)) = \phi(\alpha) \oplus \phi(\beta) = \phi(\alpha \circ \beta)$. Es ker $\phi = \{\alpha \in GM_v;\ \phi(\alpha) = [e]\} = \{\alpha \in GM_v;\ v^{-1}(v(\alpha\, e)) = v^{-1}(v(e))\} = \{\alpha \in GM_v;\ v(\alpha\, e) = v(e)\}$, però $v(\alpha\, e) = v(e)$ es verifica si i solament si $k_\alpha = 0$, per tant ker $\phi = \{\alpha \in GM_v;\ v\,\alpha = v\} = GV_v$. Cal notar que, si bé ϕ serà injectiva si i només si $GV_v = \{I_S\}$, és a dir, si i només si v es injectiva, ϕ és epijectiva, puix que per a cada $[p] \in S/v$, la traslació t_p és de GM_v i $\phi(t_p) =$ $= [e + p] = [p]$. Doncs $GM_v/GV_v \approx S/v$.

Corol.lari. — En les hipòtesis del teorema 3, es $sp(v) \approx v(e) + v(S)$ i, si v es un morfisme, aleshores $sp(v) \approx v(S)$.

Òbviament si, en les hipòtesis del teorema 3, és $v(e) = 0$, aleshores $d_v(p, q) = v(p \oplus q)$.

Prop. 17. — En les hipòtesis del teorema 3, el grup de les isometries que són automorfismes de $(S, \oplus)$ és un subgrup de GV_v.

En efecte, $v(\alpha\, p) = v(\alpha(p \oplus e)) = v(\alpha\, p + \alpha\, e) = v(\alpha\, p) + v(\alpha\, e) + v(e)$ $= v(p)$, és a dir $\alpha \in GV_v$.

És clar, per tant, que si, a més v és injectiva, aleshores l'única isometria que és un automorfisme de $(S, \oplus)$ és la identitat.

Prop. 18. — En les hipòtesis del teorema 3, amb v injectiva i $v(e) = 0$, es:

$$\oplus = \otimes$$

En efecte, $v(p \oplus q) = v(p) + v(q)$ equival a $p \oplus q = v^{-1}(v(p) +$ $+ v(q)) = p \oplus q$.

5. — *Notes finals.*

Si el grup $(S, \oplus)$ és involutiu, aleshores pot dotar-se d'una mètrica natural sobre si mateix, considerant $v = I_S$ i així $d_v(p, q) = p \oplus q$, amb GM_v igual al grup de les traslacions i GV_v reduïda a la identitat: tenim doncs, per tal com $(S, \oplus)$ és involutiu, el mètric booleà «natural» $(S, (S, \oplus, I_S), d_{I_S})$. Però, d'altra banda, $(S, \oplus)$, com a grup abelià, és proveït de la «distancia natural» de Menger (14) obtinguda assignant a cada parell (p, q) el «parell desordenat» $(p\text{-}q,\ q\text{-}p) = (p \oplus q,\ q \oplus p)$. Vegem que dins el marc dels espai de Riesz, ambdues distàncies no són essencialment diferents.

Si $(S, \oplus)$ es un grup abelià amb neutre e, i considerem $\mathfrak{P}(S)$ i en ell l'operació $A \oplus B = \{a \oplus b;\ a \in A,\ b \in B\}$ s'obté el semigrup commutatiu i ordenat $\mathcal{S}_S = (\mathfrak{P}(S), \oplus, \subset)$ amb neutre $\{0\}$ i mínim ϕ. Amb $d{:}SxS \to \mathfrak{P}(S)$, $d(p, q) = \{p\text{-}q,\ q\text{-}p\}$ s'obté el mètric de Riezs $(S, \mathcal{S}_S, d)$, ja que és evident que $d(p, q) = \{0\} \Leftrightarrow p = q$, que $d(p, q) = d(q, p)$ i és $d(p, r) \oplus d(r, q) = \{p\text{-}q,\ p\text{-}q\text{-}2r,\ 2r\text{-}p\text{-}q,\ q\text{-}p\} \supset d(p, q)$. Podem considerar que $(S, \mathcal{S}_S, d)$ és el mètric booleà sobre el grup abelià $(S, \oplus)$ que, si és involutiu, dóna $d(p, q) = \{p \oplus q\}$, amb la qual cosa entre ell i el mètric booleà natural $(S, (S, \oplus, I_S), d_{I_S})$ existeix un morfisme de semblança (vid. (15)) $\varphi = (I_S, F)$, amb $F(p) = \{p\}$, car

$$- (d \circ I_S \times I_S)\ (p, q) = d(I_S(p),\ I_S(q)) = d(p, q) = \{p \oplus q\}$$
$$- (F \circ d_{I_S})\ (p, q) = F(d_{I_S}(p, q)) = F(p + q) = \{p \oplus q\},$$

sense cap inconvenient a considerar a F com a creixent respecte als ordres corresponents.

Si S es un àlgebra de Boole, aleshores $v{:}S \to S$ es una (S, Δ)-valoració, si $v(x \vee y)\ \Delta\ v(x \wedge y) = v(x)\ \Delta\ v(y)$ i (vid. (11)) és condició necessària i suficient perquè això es verifiqui que $v(x \Delta y) = v(x)\ \Delta\ v(y)\ \Delta\ v(0)$, essent 0 el mínim de l'àlgebra de Boole i neutre de la diferència simètrica. En conseqüència, de l'anterior i de tot quant hem dit, es retroba el resultat (vid. (12)): *Per al mètric «natural» d'un àlgebra de Boole* S $(d(p, q) = p\ \Delta\ q$, *considerant* $(S, \Delta) = G$ i $v = I_S)$ *la geometria mètrica coincideix amb el grup de les traslacions de* (S, Δ). Anàlogament, si v es una (S, Δ)-valoració, es retroben altres resultats (vid. (12)).

BIBLIOGRAFÍA

(1) K. MENGER, *Axiomatik der endlichen Mengen un der elementargeometrischen Vernüpfungsbeziehungen*, Jber. Deutsch. Math. Verein, 37: 309-325 (1928)

(2) V. GLIVENKO, *Géométrie des systèmes de choses normées*, Amer. Journ. Maths., 58 (1936): 799-828.

(3) G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. vol. 25, 1940.

(4) L. M. BLUMENTHAL i K. MENGER, *Studies in Geometry*, Freeman & Cia., San Francisco, 1970.

(5) L. M. BLUMENTHAL i D. O. ELLIS, *Notes on lattices*, Duke Math. J., 16: 585-590, (1949).

(6) L. M. BLUMENTHAL, *Boolean Geometry*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, vol. I (1952): 343-361.

(7) L. M. BLUMENTHAL i C. J. PENNING, *Boolean Geometry II*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, vol. X (1961): 175-192.

(8) D. ELLIS, *Autometrized Boolean Algebras I: Fundamental distance-theoretic properties*, Can. J. Math., vol. 3 (1951): 87-93.

(9) D. ELLIS, *Autometrized Boolean Algebras II: The group of motions*, Can. J., Math., vol. 3 (1951): 145-147.

(10) E. TRILLAS, *Sobre distancias aleatorias*, Actas RAME (1967).

(11) A. VILA, *Contribución al estudio de los retículos S-valorados*, Tésis doctoral (1974): en curso de publicación.

(12) A. CUXART, *Sobre la geometría de la diferencia simétrica*, en éste mismo número de STOCHASTICA.

(13) D. SINGMASTER, *On the concept of directed distance*, L'Enseignement Math., XVII, Fasc., 1 (1971): 87-91.

(14) K. MENGER, *Beiträge zur Gruppentheorie I*, Math. Zeit., vol. 33 (1931): 396-418.

(15) E. TRILLAS, *Sobre distancias estadísticas*, Tésis doctoral Pubs. Univ. Barcelona (1972) i *Una lleu sorra*, Eds. 62, Col.lecció Ciència Aplicada, vol. 1 (1975).

(16) M. P. RYAN i L. C. SHEPLEY, *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton Univ. Press (1975).

Maig 1975.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE BARCELONA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA APLICADA