SOBRE EL RETICULO DE PROXIMIDADES DE LODATO

por

J. A. MARTÍN RIOJA

Dado un conjunto Ω, se llama proximidad sobre Ω a una relación, δ, definida en $\mathcal{P}(\Omega)$ que verifique:

$$\begin{aligned}
&(A1).\ A\,\delta B \Rightarrow B\,\delta A\ \forall\, A, B \in \mathcal{P}(\Omega)\\
&(A2).\ A\,\delta\,B \Rightarrow A \neq \phi \text{ y } B \neq \phi\\
&(A3).\ A \cap B \neq \phi \Rightarrow A\,\delta\,B\\
&(A4).\ (A \cup B)\,\delta\,C \Longleftrightarrow A\,\delta\,C \text{ ó } B\,\delta\,C\\
&(A5).\ A\,\delta\,B \text{ y } b\,\delta\,C\ \forall\, b \in B \Rightarrow A\,\delta\,C.
\end{aligned}$$

Se dice separadora si $a\,\delta\,b$ implica $a = b$. $(A7)$

El par (Ω, δ) recibe el nombre de espacio de proximidad ó espacio de Lodato. Sobre uno de estos espacios se define un espacio topológico (Ω, τ_δ) asociado a δ tomando por adherencia de un conjunto M a la familia de todos los puntos próximos a él, es decir

$$\overline{M} = \{x \in \Omega \mid x\,\delta\,M\} \underset{\cdot}{=} M^\delta.$$

Tal espacio topológico verifica el axioma R_o, es decir

$$x \in \overline{y} \text{ implica } y \in \overline{x}.$$

Recíprocamente, sobre todo espacio topológico (Ω, τ) en que se cumpla R_o, la relación δ en $\mathcal{P}(\Omega)$ definida por «$A\,\delta\,B$ sí y sólo si $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \phi$» es una proximidad sobre Ω.

Designando por Δ la familia de todas las proximidades sobre Ω, nos proponemos probar que $(\Delta, \supset)$ es un retículo completo. A tal fin consideramos las siguientes proposiciones:

Proposición 1. — Si Γ es una familia de topologías R_o sobre Ω, también $\overline{\bigcup_{\tau_i \in \Gamma}} \tau_i$ es una topología R_o sobre Ω.

Demostración. Una cierta base, $\mathcal{B}$, de abiertos en $\overline{\bigcup_{\tau_i \in \Gamma}} \tau_i$ es la familia formada por las intersecciones finitas de elementos de $\bigcup_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i$, de forma que $\forall\, A \in \overline{\bigcup_{\tau_i \in \Gamma}} \tau_i$, con $A \neq \phi$, y $\forall\, x \in A$ resulta que $\exists\, B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$ y B es de la forma $B = A_1 \cap \dots \cap A_n$, con $A_j \in \bigcup_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i$ $j = 1, \dots, n$.

Puesto que $\bigcup_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i$ es más fina que $\tau_i \ \forall \ \tau_i \in \Gamma$, si designamos por $\overset{i}{\bar{x}}$ y $\bar{x}$ las adherencias de x respectivamente en $(\Omega, \bigcup_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i)$ y (Ω, τ_i) tendremos

$$\bar{x} \subset \overset{i}{\bar{x}} \subset A_j \ j = 1, \ldots, n$$

ya que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe algún i tal que $A_j \in \tau_i$. Por tanto

$$\bar{x} \subset B \subset A$$

y $(\Omega, \bigcup_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i)$ es R_o.

Estamos ahora en condiciones de poder enunciar la

Proposición 2. — La familia $\mathcal{F}$ de todas las topologías R_0 sobre Ω, ordenada por medio de la inclusión, constituye un retículo completo.

En efecto. La (Prop. 1. —) nos asegura que dada cualquier subfamilia (en particular dos) $\Gamma \subset \mathcal{F}$, la topología $\bigcup_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i \in \mathcal{F}$ y es el supremo de Γ; así mismo implica que la topología engendrada por todas las topologías R_0 sobre Ω incluidas en $\bigcap_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i$ (la grosera será una de ellas), también será de la familia $\mathcal{F}$, es decir.

$$\bigcup_{\tau_j \subset \bigcap_{\tau_i \in \Gamma} \tau_i} \tau_j \in \mathcal{F}$$

y será el ínfimo de Γ. Tendremos, pues, que $(\mathcal{F}, \subset)$ es un retículo completo y completo, de máximo $\mathfrak{P}(\Omega)$ y mínimo $\{\phi, \Omega\}$.

La interseción de dos topologías R_o, sobre un mismo conjunto, puede no verificar esta propiedad, tal como muestra el

Ejemplo. Sobre $\Omega = (0,1]$ consideramos dos familias de cerrados que engendran espacios topológicos R_o: C_1, formada por ϕ, Ω y las uniones finitas de términos de la forma $(1/(n+1), 1/n]$ con $n \in N_o$, y $C_2 = \{\phi, \Omega, (0, \frac{1}{2}], (\frac{1}{2}, 1]\}$. La intersección $C_1 \cap C_2 = \{\phi, \Omega, (\frac{1}{2}, 1]\}$ genera sobre Ω un espacio *no*-R_o.

Se conocen ejemplos en que no es proximidad sobre Ω la unión *y/o* la intersección de dos proximidades sobre dicho conjunto. Con todo, estudiaremos ahora el subconjunto $\Delta_\tau \subset \Delta$, de las proximidades sobre Ω que inducen la misma topología τ, probando que sobre él, el orden dado por $\supset$ es de tipo reticular, con ínfimo dado por la unión.

Proposición 3. — Si Δ_τ es el conjunto de las proximidades sobre Ω que inducen τ, y $\{ \delta_i \mid i \in \Lambda\} \subset \Delta_\tau$ entonces $\bigcup_{i \in \Lambda} \delta_i \in \Delta_\tau$.

Veamos primeramente que $\bigcup_{i \in \Lambda} \delta_i$ verifica los axiomas de proximidad. Respecto $(A1)$, $(A2)$ y $(A3)$ basta considerar que

$(A, B) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i \Rightarrow \exists\ k \in \Lambda \quad (A, B) \in \delta_k \Rightarrow \exists\ k \in \Lambda \quad (B, A) \in \delta_k \Rightarrow (B, A) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i$

$(A, B) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i \Rightarrow \exists\ k \in \Lambda \quad (A, B) \in \delta_k \Rightarrow A \neq \phi$ y $B \neq \phi$ por ser δ_k proximidad. Por ser δ_i proximidad para todo $i \in \Lambda$, tendremos que

$$A \cap B \neq \phi \Rightarrow (A, B) \in \delta_i \quad \forall\ i \in \Lambda \Rightarrow (A, B) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i.$$

Probemos que verifica $(A4)$:

$$(A \cup B, C) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i \iff \exists\ k \in \Lambda \quad (A \cup B, C) \in \delta_k$$

que por ser δ_k proximidad, equivale a

$$\exists\ k \in \Lambda \quad (A, C) \in \delta_k \text{ ó } (B, C) \in \delta_k \iff (A, C) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i \text{ ó } (B, C) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i.$$

El mayor interés reside en la demostración de $(A5)$, en la que interviene la hipótesis de que todas las $\delta_i \in \Delta_\tau$ inducen la misma topología τ. Observemos que si $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_\tau$, se tendrá para todo $A \subset \Omega$ que $\bar{A} = A^{\delta_1} = A^{\delta_2}$ es decir $x \in A^{\delta_1} \iff x \in A^{\delta_2}$ ó equivalentemente $x\ \delta_1\ A \iff x\ \delta_2\ A$.

Si $(A, B) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i$ y $\forall\ b \in B\ (b, C) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i$ resultará que, existe algún $j \in \Lambda$ para el que $(A, B) \in \delta_j$ y existe algún $k \in \Lambda$ tal que $(b, C) \in \delta_k\ \forall\ b \in B$. Pero puesto que $(b, C) \in \delta_k \iff b \in C^{\delta_k} = \bar{C} = C^{\delta_j}$ que equivale a $(b, C) \in \delta_j$, tendremos que

$$\exists\ j \in \Lambda \text{ tal que } (A, B) \in \delta_j \text{ y } (b, C) \in \delta_j\ \forall\ b \in B$$

y por tanto, para algún $j \in \Lambda$ $(A, C) \in \delta_j$ que implica $(A, C) \in \bigcup_{i\in\Lambda} \delta_j$.

Probado que $\bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i$ es una proximidad sobre Ω, vemos que pertenece a Δ_τ:

$$x \in A^{\bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i} \iff x(\bigcup_{i\in\Lambda} \delta_i)\ A \iff \exists\ k \in \Lambda \text{ tal que } x\ \delta_k\ A \iff \exists\ k \in \Lambda$$

para el que $x \in A^{\delta_k} \iff x \in \bigcup_{i\in\Lambda} A^{\delta_i} = \bar{A}$

por ser $A^{\delta_i} = \bar{A}\ \forall\ i \in \Lambda$.

Podemos ahora afirmar:

Proposición 4. — El subconjunto Δ_τ de las proximidades sobre Ω que inducen la misma topología τ, ordenado por inclusión constituye un retículo completo.

Hemos visto que $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_\tau$ implica que $\delta_1 \cup \delta_2 \in \Delta_\tau$, y está claro que se trata de ínfimo de ambas.

Consideremos la unión de todos elementos de Δ_τ incluidos en δ_1 y δ_2 simultáneamente; $\bigcup_{\Delta_\tau \ni \delta_i \subset \delta_1 \cap \delta_2} \delta_i$ se trata de un elemento de Δ_τ, precisamente el menor de los que son simultáneamente mayores que δ_1 y δ_2, es decir su supremo. Podemos extender la existencia de supremo a una familia cualquiera $\{\delta_i \mid i \in \Lambda\} \neq \phi$ de los elementos de Δ_τ por medio de $\bigcup_{\Lambda_\tau \ni \delta_j \subset \bigcap_{i \in \Lambda} \delta_i} \delta_j$.

Llegamos pues a que $(\Delta_\tau, \supset)$ es un retículo completo, con supremo δ_τ (proximidad generada por τ) e ínfimo $\bigcup_{\delta_i \in \Lambda_\tau} \delta_i$.

El punto fundamental de este primer objetivo es probar el carácter reticular de $(\Delta, \supset)$; disponemos ahora de medios suficientes como para enunciar la siguiente

Proposición 5. — El conjunto Δ, de las proximidades sobre Ω, ordenado por medio de la inclusión, constituye un retículo completo.

Sean $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, y τ_{δ_1}, τ_{δ_2} sus topología asociadas; ambas son R_o y, por tanto, también lo es $\tau_{\delta_1} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}$ (Vid. Prop. 1. —). Veamos que la proximidad δ_ν, unión de todas las proximidades cuya topología asociada es $T_{\delta_1} \bar{\cup} T_{\delta_2}$ y son mayores que δ_1 y δ_2

$$\delta_\nu = \bigcup_{\Delta_{\tau_{\delta_2} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}} \ni \delta_j \subset \delta_1 \cap \delta_2} \delta_j$$

es el supremo de $\{\delta_1, \delta_2\}$. Desde luego $\delta_\nu \subset \delta_1 \cap \delta_2$, y por tanto $\delta_\nu \subset \delta_1$ y $\delta_\nu \subset \delta_2$, y además $\delta_\nu \in \Delta_{\tau_{\delta_1} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}}$, es decir, genera la topología $\tau_{\delta_1} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}$. Si $\delta' \subset \delta_1$ y $\delta' \subset \delta_2$ resultará que $\tau_{\delta}' \supset \tau_{\delta_1}$ y $\tau_{\delta}' \supset \tau_{\delta_2}$, luego $\tau_{\delta}' \supset \tau_{\delta_1} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}$; y si $\delta' \supset \delta_\nu$, tendríamos $\tau_{\delta}' \subset \tau_{\delta_1} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}$, y por tanto $\delta' \in \Delta_{\tau_{\delta_1} \bar{\cup} \tau_{\delta_2}}$ La (Prop. 4. —) asegura $\delta' = \delta_\nu$.

Partiendo nuevamente de $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ y τ_{δ_1}, τ_{δ_2}, consideramos la topología, R_o sobre Ω, ínfimo de $\{\tau_{\delta_1}, \tau_{\delta_2}\}$, que designaremos por $\tau_{\delta_1} \bar{\cap} \tau_{\delta_2}$. En el retículo condicionalmente completo $(\Delta_{\tau_{\delta_1} \bar{\cap} \tau_{\delta_2}}, \supset)$ de las proximidades que generan $\tau_{\delta_1} \bar{\cap} \tau_{\delta_2}$ tomaremos δ_Λ, definida por

$$\delta_\Lambda = \bigcup_{\Delta_{\tau_{\delta_1} \bar{\cap} \tau_{\delta_1}} \ni \delta_i \supset \delta_1 \cup \delta_2} \delta_i$$

y probaremos que se trata del ínfimo de $\{\delta_1, \delta_2\}$. En primer lugar $\delta_\Lambda \supset \delta_1 \cup \delta_2$, luego $\delta_\Lambda \supset \delta_1$ y $\delta_\Lambda \supset \delta_2$. Dada $\delta' \supset \delta_1$, y $\delta' \supset \delta_2$ tendremos $\tau_{\delta}' \subset \tau_{\delta_1}$ y $\tau_{\delta'} \subset \tau_{\delta_2}$ y, por tanto, $\tau_{\delta'} \subset \tau_{\delta_1} \bar{\cap} \tau_{\delta_2}$; si además $\delta' \subset \delta_\Lambda$, resultará $\tau_{\delta'} \supset \tau_{\delta_1} \cap \tau_{\delta_2}$ y $\delta' \in \Delta_{\tau_{\delta_1} \bar{\cap} \tau_{\delta_2}}$, donde δ_Λ es la mayor entre las que verifican ser menores que δ_1 y δ_2.

Obsérvese que la demostración anterior permanece válida si se substituye $\{\delta_1, \delta_2\}$ por cualquier subfamilia no vacía de Δ, por lo que $(\Delta, \supset)$ constituye un retículo completo, con las proximidades discreta y grosera como primer y último elemento.

BIBLIOGRAFÍA

ČECH Topological Spaces. Interscience Publisher; John Wiley and son (1966).
LODATO. On topologically induced generalized proximity relations.
Proc. Am. Math. Soc. 15 pag. 417-422. (1964).
LODATO. On topologically induced generalized proximity relations II.
Pacific. J. Math. 17 pag. 131-135 (1966).
NAIMPALYY y WARRACK. Proximity Spaces. Cambridge University Press. (1970)
SZÁSZ. Théorie des treillis. Dunod. Paris (1971).