CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA INTEGRAL ESTOCÁSTICA

por

DAVID NUALART RODÓN

INTRODUCCIÓN

La teoría moderna de la integral estocástica parte de los trabajos de Itô (1) en los que se resuelve el problema de definir la integral de un proceso estocástico respecto a un proceso de movimiento browniano.

No pudiéndose definir esta integral por trayectorias, por ser las del movimiento browniano de variación total no acotada, el método de Itô consiste en definir primero la integral de los procesos escalonados en intervalos, continuos por la izquierda, adaptados y de segundo orden, como una suma de Stieltjes, y extender esta integral utilizando básicamente la convergencia en norma de orden dos.

En esta construcción de la integral, un resultado fundamental es el teorema de Itô: «Todo proceso $\phi = (\phi_t)_{t \in T}$, *medible, adaptado* y tal que $\int_T E(\phi_t^2)dt < \infty$ es integrable respecto a un proceso de movimiento browniano».

El paso siguiente en el desarrollo de esta teoría fue dado por Doob (2), quien utilizando la misma construcción de la integral de Itô, definió la integral estocástica respecto a una martingala $X = (X_t)_{t \in T}$ de cuadrado integrable, que verifique la condición $E(X_t^2 - X_s^2 / X_u,\ u \leqslant s) = f(t) - f(s)$, si $s \leqslant t$, siendo f una función creciente y continua por la derecha.

Si f es continua, Doob demostró, generalizando el teorema anterior, que todos los procesos ϕ medibles, adaptados y tales que $\int_T E(\phi_t^2)df(t) < \infty$, son integrables respecto a X.

Un cambio de perspectiva en el estudio de la integral estocástica lo dieron los trabajos de Courrège (3) y de Meyer (4), en los que se define la integral respecto a cualquier martingala $X = (X_t)_{t \in T}$ de cuadrado integrable, siendo $T = [a, b]$.

Su método consiste en considerar los procesos como funciones definidas en el espacio producto $(T x\, \Omega,\ \mathcal{B} \otimes \mathcal{A})$, siendo $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de los borelianos de T, en el cual se introduce una medida ν a través de la probabilidad P en $(\Omega, \mathcal{A})$ y de una función de transmisión de Ω a T inducida por el *proceso creciente natural* $A = (A_t)_{t \in T}$ asociado a la martingala X, es decir, obtenido aplicando la descomposición de Doob a la submartingala X^2.

Procediendo como en la construcción de Itô y designando por $(F_t)_{t \in T}$ una sucesión creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{A}$ adaptada a X, la integral estocástica definida primero en el subespacio $\mathcal{E}$ de $\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \nu)$ de los procesos de la forma $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, 1_{(t_{i-1}, t_i]}$ siendo $\phi_i \in L^2(\Omega, F_{t_{i-1}}, P)$, es una aplicación lineal de $\mathcal{E}$ en $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ cuya propiedad de isometría $E\left(\int_a^b \phi_t \, dX_t\right)^2 = \int \phi_t^2 \, d\nu$ permite extenderla a la adherencia de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{L}^2(\nu)$.

En el estudio de condiciones para que un proceso sea integrable, se comprueba que los procesos *previsibles* de $\mathcal{L}^2(\nu)$ (procesos medibles respecto a la σ-álgebra $\mathcal{G}$ generada por los procesos adaptados y con trayectorias continuas por la izquierda) son integrables. Si se supone que el proceso creciente A es continuo, Courrège demostró que son integrables los procesos *fuertemente adaptados* de $\mathcal{L}^2(\nu)$ (es decir, ϕ_T es F_T-medible para todo tiempo de paro T).

En este trabajo, siguiendo en la línea de dar unas condiciones mínimas de integrabilidad de un proceso, se demuestra en primer lugar (1.3) que los procesos adaptados de $\mathcal{L}^2(\nu)$ son integrables respecto a una martingala de cuadrado integrable con proceso creciente asociado continuo.

El camino seguido para demostrar esta propiedad ha llevado a probar la existencia de una función de transmisión para la medida ν en el producto cartesiano, del espacio T al espacio Ω, basándonos en la hipótesis de que el proceso creciente que da lugar a la función de transmisión de Ω a T sea continuo.

Por otra parte, en el caso de una martingala cualquiera X de cuadrado integrable, se ha obtenido (2.2) una condición necesaria y suficiente para que un proceso adaptado de $\mathcal{L}^2(\nu)$ sea integrable respecto a X, a través del estudio de los tiempos de paro correspondientes a las discontinuidades del proceso creciente asociado a X.

La propiedad de martingala de la integral estocástica indefinida $\int \phi \, dX = \left(\int_a^t \phi_s \, dX_s\right)_{t \in T}$ da lugar a que los procesos de la forma $F(X)$, donde F es una función real y X una martingala, no puedan expresarse simplemente como integrales estocásticas indefinidas, sino que se verifiquen descomposiciones como la denominada «Fórmula del cambio de variables» de Kunita y Watanabe (5):

$$F(X_t) = F(X_a) + \int_a^t F'(X_s) \quad dX_s + 1/2 \int_a^t F''(X_s) \quad dA_s \quad \text{c.s., para}$$
todo $t \in T$, siendo $F \in C^2(R)$ y X una martingala local continua.

En este sentido, hemos hallado (3.3) una descomposición semejante en el caso de una martingala X de cuadrado integrable, sin imponer hipótesis suplementarias de continuidad, mediante la utilización del concepto de proyección previsible de un proceso estocástico y teniendo en cuenta que si la función F es cóncava, la descomposición de Doob de la supermartingala $F(X)$ en diferencia de una martingala y un proceso creciente es análoga a la «Fórmula del cambio de variables», por ser $F'' \leqslant 0$.

Finalmente, partiendo de la expresión del proceso $F(X)$ como integral indefinida en el caso de una martingala X continua, se ha obtenido (4.1) una fórmula general de descomposición de $F(X)$ en suma de un polinomio en los incrementos de la martingala y del proceso creciente asociado, más un término complementario.

1. INTEGRACIÓN RESPECTO A UNA MARTINGALA CON PROCESO CRECIENTE ASOCIADO CONTINUO

1.1. *Completación de la σ-álgebra $\mathcal{G}$ de conjuntos previsibles.*

En lo que sigue, supondremos que las σ-álgebras de la sucesión $(F_t)_{t\in T}$ contienen todos los conjuntos negligibles del espacio $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ y designaremos por $\mathcal{M}_2$ el espacio de las martingalas de cuadrado integrable, de las cuales tomaremos siempre modificaciones continuas por la derecha.

El conjunto $\bar{\mathcal{E}} \subset \mathcal{L}^2(T \, x\, \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}, \nu)$ de procesos integrables respecto a una martingala $X = (X_t)_{t\in T}$ de $\mathcal{M}_2$ puede caracterizarse, teniendo en cuenta la estructura de los procesos de $\mathcal{E}$, como el espacio $\mathcal{L}^2(T \, x\, \Omega, \bar{\mathcal{G}}, \nu)$, donde $\bar{\mathcal{G}}$ designa la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$ y por los conjuntos de medida ν cero.

Por tanto, la determinación de los procesos integrables respecto a X comportará el estudio de los conjuntos de medida ν cero. Desarrollaremos este estudio suponiendo primero que el proceso creciente asociado a la martingala es continuo, lo cual equivale a que la martingala sea quasicontinua por la izquierda, para lo que basta, como es sabido, que la familia de σ-álgebras $(F_t)_{t\in T}$ esté desprovista de tiempos de discontinuidad.

1.2 *Propiedades de la medida ν inducida por un proceso creciente continuo.*

Indicaremos por μ la proyección de la medida ν en el espacio $(T, \mathfrak{B})$.

Para poder determinar que un conjunto M tiene medida ν cero, a partir del estudio de sus secciones M_t, para cada $t \in T$, necesitamos disponer de una función de transmisión para la medida ν del espacio T al espacio Ω, lo cual queda establecido en el siguiente.

Teorema. — Si el proceso creciente $A(t, \omega)$ es continuo, entonces existe una aplicación $Q(t, A)$ de $T \, x\, \mathfrak{A}$ en R tal que:

a) $Q(t,.)$ es una probabilidad en $(\Omega, \mathfrak{A})$ absolutamente continua respecto a P, para todo $t \in T$.

b) $Q(., A)$ es una función medible, para todo $A \in \mathfrak{A}$, tal que

$$\nu(B \, x\, A) = \int_B Q(t, A) d\mu, \text{ si } B \in \mathfrak{B} \text{ y } A \in \mathfrak{A}.$$

Demostración. — Para cada $A \in \mathfrak{A}$, podemos definir la variable $Q(t, A) \in \mathcal{L}^1(T, \mathfrak{B}, \mu)$, como la densidad de la medida $\nu_A(B) = \nu(B \, x\, A)$ respecto a la medida μ, con lo cual se verificará la condición *b*).

El problema de elegir para cada $A \in \mathfrak{A}$ un representante de la clase de variables $\overline{Q(t, A)}$ de modo que se cumpla la condición *a*) se resuelve sabiendo que $\overline{Q(t, A)} \in L^\infty(T, \mathfrak{B}, \mu)$ (pues $Q(t, A) \leqslant 1$, μ — c.p.t.) y tomando el representante $\rho\,\overline{Q(t, A)}$, siendo ρ un «lifting» en L^∞ $(T, \mathfrak{B}, \mu)$.

Las propiedades de la aplicación $\rho : L^\infty(\mu) \to \mathcal{L}^\infty(\mu)$ junto con las propiedades de la clase $\overline{Q(t, A)}$ comportan que para cada $t \in T$ $\rho\,\overline{Q(t, A)}$ sea una medida positiva, aditiva, de masa total igual a 1 y absolutamente continua respecto a P.

Falta probar que para cada $t \in T$, $\rho\,\overline{Q(t, A)}$ es σ-aditiva, lo que demostraremos viendo que si $A_n \in \mathfrak{A}$, $A_n \downarrow \phi$, entonces $\rho\,\overline{Q(t, A_n)} \downarrow 0$.

En primer lugar, para todo $B \in \mathfrak{B}$ es $\int_B Q(t, A_n)\, d\mu = \nu\,(B \times A_n) \downarrow 0$, y por tanto se cumple.

1) $$Q(t, A_n) \downarrow 0, \ \mu\text{-casi por todo.}$$

Por otra parte, si F_n y F son las funciones de distribución de las medidas ν_{A_n} y μ respectivamente, es sabido que

2) $$\lim_{s \to t} \frac{F_n(s) - F_n(t)}{F(s) - F(t)} = Q(t, A_n), \qquad \mu\text{-casi por todo.}$$

Entonces se verificarán las condiciones 1) y 2) para cada A_n, a menos de un conjunto de medida μ cero. Por tanto, si suponemos que la medida μ no es idénticamente nula (en cuyo caso el teorema es trivial), existirá algún punto $t \in T$ para el cual se cumplan las condiciones 1) y 2) simultáneamente y para todo A_n.

Fijado este punto $t \in T$, definimos para cada $n \in N$ la función $f_n : T \to R$ de la forma siguiente:

$$f_n(s) = \frac{F_n(s) - F_n(t)}{F(s) - F(t)} \text{ si } s \neq t \text{ y } f_n(t) = Q(t, A_n).$$

Cada función f_n es positiva y continua, puesto que si $s \neq t$ es continua en s por serlo las funciones F_n y F, y en el punto t, f_n es continua como consecuencia de la condición 2).

Al variar n obtenemos una sucesión decreciente de funciones continuas que converge puntualmente a cero. En consecuencia, el teorema de Dini asegura la convergencia uniforme de la sucesión de funciones f_n hacia cero en T.

Por lo tanto si fijamos un número real $\epsilon > 0$, existirá un $n_0 \in N$ tal que $f_n(s) \leqslant \epsilon$ para todo $n > n_0$ y todo $s \in T$.

Luego para todo $n > n_0$ se cumple

$$\int_{[t,s]} Q(u, A_n) d\mu = F_n(s) - F_n(t) \leqslant \varepsilon[F(s) - F(t)] = \varepsilon \cdot \mu[t, s], \text{ si } s > t$$

y

$$\int_{[s,t]} Q(u, A_n) d\mu = F_n(t) - F_n(s) \leqslant \varepsilon\,[F(t) - F(s)] = \varepsilon \cdot \mu[s, t], \text{ si } s < t.$$

En consecuencia, para todo intervalo $[c, d] \subset T$ la desigualdad

$$\int_{[c,d]} Q(u, A_n) d\mu \leqslant \varepsilon \cdot \mu[c, d] \text{ implica } Q(u, A_n) \leqslant \varepsilon \ \mu\text{-casi por todo,}$$

de lo que se deduce $\overline{Q(u, A_n)} \leqslant \bar{\varepsilon}$.

Finalmente, por las propiedades del «lifting» se obtiene $\rho\, \overline{Q(u, A_n)} \leqslant \varepsilon$ para todo $n > n_0$ y todo $u \in T$, lo cual implica $\rho\, \overline{Q(u, A_n)} \downarrow 0$ para todo $u \in T$. □

Corolario 1. — La medida ν es absolutamente continua respecto a $\mu \otimes P$.

Corolario 2. — Un conjunto $M \in \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}$ tal que $P(M_t) = 0$, μ-casi por todo, es de medida ν cero.

En efecto, basta observar que $\nu(M) = \int_T Q(t, M_t) d\mu$.

1.3. *Condiciones de integrabilidad de un proceso.*

Todo proceso equivalente a un proceso integrable, por el Corolario 2, difiere de él en un conjunto de medida ν cero, y por lo tanto es también integrable.

En consecuencia, sabiendo que todo proceso fuertemente adaptado de $\mathcal{L}^2(\nu)$ es integrable y que dado un proceso medible y fuertemente adaptado existe un proceso medible y adaptado equivalente, obtenemos finalmente el siguiente resultado:

Teorema. — Si X es una martingala de $\mathcal{M}_2$ con proceso creciente asociado continuo, los procesos ϕ *adaptados, medibles* y tales que $E \int_a^b \phi_t^2 \, dA_t < \infty$ son integrables respecto a X.

1.4. *Prolongación de la integral estocástica mediante la convergencia en probabilidad.*

En el conjunto $M(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ de clases de variables aleatorias finitas c.s., el «écart» $N(X) = E(|X|/1 + |X|)$ induce la topología de la convergencia en probabilidad.

Si X es una martingala de $\mathcal{M}_2$ con proceso creciente asociado continuo y $\phi \in \mathcal{L}^2(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$, la desigualdad

$$N\left(\int_a^b \phi_t \, dX_t\right) \leqslant 4 \left[N\left(\sqrt{\int_a^b \phi_t^2 \, dA_t}\right)\right]^{1/3},$$

debida a Courrège (3), prueba que la integral estocástica es una aplicación lineal continua de $\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$ en $M(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, considerando $\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$ incluido en el espacio $\mathcal{M}(T \times \Omega, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{A}, \nu)$ de los procesos medibles y tales que $\int_a^b \phi_t^2 \, dA_t < \infty$ c.s., en el que se toma la topología inducida por el «écart»

$$\eta(\phi) = N\left(\sqrt{\int_a^b \phi_t^2 \, dA_t}\right).$$

De esta foma puede extenderse la integral estocástica a la adherencia de $\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$ en $\mathcal{M}(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \nu)$, que caracterizaremos de la forma siguiente:

Proposición. — $\overline{\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)} = \mathcal{M}(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$.

Demostración. — Si $\phi \in \overline{\mathcal{L}^2(T \times \overline{\mathcal{G}}, \nu)}$, entonces existe una sucesión $(\phi^n)_{n \in N}$ en $\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$ tal que $\eta(\phi^n - \phi) \to 0$, lo cual implica que existe una subsucesión $(\phi^{n'})_{n' \in N}$ tal que $\int_a^b (\phi_t^{n'} - \phi_t)^2 \, dA_t \xrightarrow{c.s.} 0$.

Por lo tanto, designando por μ_ω la medida inducida en el espacio $(T, \mathcal{B})$ por la función creciente $A(., \omega)$, se tiene $\mu_\omega(|\phi_t^{n'}(\omega) - \phi_t(\omega)| > \varepsilon) \xrightarrow{c.s.} 0$ y por estar esta expresión acotada por $\mu_\omega(T) = A_b(\omega) \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, resulta que $E(\mu_\omega(|\phi_t^{n'}(\omega) - \phi_t(\omega)| > \varepsilon)) \to 0$ para cada $\varepsilon > o$, lo cual implica que $\phi^{n'} \xrightarrow{\nu} \phi$, y en consecuencia, ϕ es o $\overline{\mathcal{G}}$-medible.

Como por otra parte $\int_a^b \phi_t^2 \, dA_t < \infty$ c.s., se tiene en definitiva que $\phi \in \mathcal{M}(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$.

Recíprocamente, si $\phi \in \mathcal{M}(T \times \Omega, \overline{\mathcal{G}}, \nu)$, podemos suponer que $\phi \geqslant 0$ y tomar una sucesión $\phi^n \in \mathcal{E}$ tal que $0 \leqslant \phi^n \uparrow \phi$, ν-casi por todo, de lo que se deduce $\eta(\phi^n - \phi) \to 0$, y por lo tanto $\phi \in \overline{\mathcal{L}^2(T \times \Omega\, \overline{\mathcal{G}}, \nu)}$. □

Aplicando los resultado anteriores, se obtiene finalmente el siguiente:

Teorema. — Si X es una martingala de $\mathcal{M}_2$ con proceso creciente asociado continuo, entonces los procesos ϕ *medibles, adaptados* y tales que $\int_a^b \phi_t^2 \, dA_t < \infty$ c.s. son integrables respecto a X.

2. INTEGRACIÓN RESPECTO A UNA MARTINGALA DE CUADRADO INTEGRABLE.

2.1. *Estudio de la σ-álgebra completada $\overline{\mathcal{G}}$.*

Si $X = (X_t)_{t \in T}$ es una martingala de $\mathcal{M}_2$ y $A = (A_t)_{t \in T}$ su proceso creciente natural asociado, la descomposición $A = A^c + A^d$, siendo A^c un proceso creciente continuo y A^d un proceso creciente puramente discontinuo y natural, permite construir las medidas ν^c y ν^d y las σ-álgebras $\bar{\mathcal{G}}^c$ y $\bar{\mathcal{G}}^d$ asociadas a estos procesos crecientes.

Considerando que un proceso es $\bar{\mathcal{G}}$ -medible si y sólo si es $\bar{\mathcal{G}}^c$ -medible y $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible, nos interesará determinar en qué condiciones un proceso es $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible

La estructura de la parte puramente discontinua $A_t^d = \sum_{n\in N} \lambda_n.1_{\{T_n \leq t\}}$ siendo $\lambda_n \geqslant 0$ y T_n tiempos de paro previsibles, ha conducido a la siguiente caracterización:

Teorema. — Una condición necesaria y suficiente para que un proceso medible $\phi = (\phi_t)_{t\in T}$ sea $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible, es que para todo tiempo de paro T la variable $\phi_T.1_{\{A_T \neq A_{T-}\}}$ sea F_{T_-} -medible.

Recordemos que F_{T-} designa la σ-álgebra generada por F_a y los conjuntos $A \cap \{t < T\}$ con $t \in R^+$ y $A \in F_t$; y que los tiempos de paro se suponen a valores en $[a, b] \cup \{\infty\}$.

Demostración. — El conjunto de discontinuidades $D = \{(t, \omega)/A(t, \omega) \neq A(t^-, \omega)\}$, que pertenece a $\mathcal{G}$ por ser el proceso A natural y por tanto previsible, verifica $\nu^d/_{D}\complement = 0$, con lo cual la traza de $\bar{\mathcal{G}}^d$ en D^c contiene todos los subconjuntos medibles de D^c y por lo tanto ϕ es $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible si y sólo si lo es $\phi.1_D$.

Como $D = \bigcup_{n\in N} [T_n]$, donde $[T_n] = \{(t, \omega)/T(\omega) = t \in [a, b]\}$ pertenece a $\mathcal{G}$ por las propiedades de los tiempos de paro previsibles, que ϕ sea $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible equivale a que $\phi|_{[T_n]}$ sea $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible para cada $n \in N$.

1.º) Suponiendo cierta la condición del teorema, $\phi_{T_n}.1_{\{T_n < \infty\}}$ es F_{T_n-}-medible para cada $n \in N$.

Consideremos la composición de aplicaciones

$$\{T_n < \infty\} \xrightarrow{\quad f \quad} [T_n] \xrightarrow{\quad \phi/[T_n] \quad} R,$$

donde $\phi|_{[T_n]}$ o $f = \phi_{T_n}|_{\{T_n < \infty\}}$ es F_{T_n-} -medible.

De la igualdad $\phi|_{[T_n]} = \phi_{T_n}|_{\{T_n < \infty\}}$ o f^{-1} y de la propiedad $f^{-1}(\mathcal{G}) = F_{T_n-}$, demostrada por Meyer (6), en la que la σ-álgebra F_{T_n-} se restringe a $\{T_n < \infty\}$, se deduce que $\phi|_{[T_n]}$ es $\mathcal{G}$ -medible y por lo tanto $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible.

2.º) Supongamos que ϕ es $\bar{\mathcal{G}}^d$ -medible. Si T es un tiempo de paro cualquiera, A_T es F_{T-} -medible por ser el proceso A previsible, y en consecuencia $\{A_T \neq A_{T-}\} \in F_{T_-}$.

Consideremos la composición de aplicaciones

$$\begin{tikzcd} \{A_T \neq A_{T-}\} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\phi_T|_{\{A_T \neq A_{T-}\}}"'] & \{A_T \neq A_{T-}\} \arrow[r, "\phi"] & R. \end{tikzcd}$$

La traza de $\bar{\mathcal{G}}^d$ en $f\{A_T \neq A_{T_-}\}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$ y por los conjuntos cuya proyección sobre Ω tiene probabilidad cero. Por lo tanto, como $f^{-1}(\mathcal{G}) = F_T -$ y F_{T-} es completa, resulta $f^{-1}(\bar{\mathcal{G}}^d) = F_{T-}$ y en consecuencia $\phi_T|_{\{A_T \neq A_{T-}\}}$ es F_{T-} —medible, □

2.2. *Condiciones de integrabilidad de un proceso.*

Aplicando los resultados anteriores puede enunciarse el siguiente.

Teorema. — Una condición necesaria y suficiente para que un proceso $\phi \in \mathcal{L}^2(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \nu)$, *adaptado*, sea integrable respecto a una martingala X de $\mathcal{M}_2$, es que para todo tiempo de paro T la variable $\phi_T.1_{\{A_T \neq A_{T-}\}}$ sea F_{T-} -medible.

3. ESTUDIO Y OBTENCIÓN DEL PROCESO $F(X)$ COMO INTEGRAL INDEFINIDA

3.1. *Semimartingalas equiintegrables.*

Puede definirse una semimartingala equiintegrable como un proceso que se descompone en diferencia de dos supermartingalas equiintegrables y continuas por la derecha.

Si X es una martingala acotada, la descomposición de toda función F de $C^2(R)$ en diferencia de dos funciones cóncavas de $C^2(R)$ da lugar a que $F(X)$ sea diferencia de dos supermartingalas. Sin embargo esto no implica que para una martingala X cualquiera, $F(X)$ sea una semimartingala equiintegrable, ni aún imponiendo condiciones de acotación a F. Basta observar, por ejemplo, que la parte cóncava y la parte convexa de $F(x) =$ sen x no están acotadas.

En este sentido, como el objetivo de este apartado es obtener la «Fórmula del cambio de variables» para una martingala X de $\mathcal{M}_2$ cualquiera, necesitaremos suponer para ello que $F(X)$ es una semimartingala equiintegrable. Esto se consigue, por ejemplo, si F'' está acotada, o si la martingala X está acotada.

3.2. *Extensión de la integral estocástica mediante la proyección previsible.*

La proyección prevesible ϕ^p de un proceso ϕ medible, positivo o acotado, estudiada por Meyer en (7), es un proceso determinado a menos de un conjunto de proyección negligible sobre Ω por la condición $\phi^p_T = E(\phi_T/F_{T-})$ c.s., para todo tiempo de paro previsible y finito T.

Si $X \in \mathcal{M}_2$ y $\phi \in \mathcal{L}^2$ $(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \nu)$, entonces se verifica $\phi^p = E(\phi/\mathcal{G})$ ν-casi por todo, y puede extenderse la integral estocástica a todo el espacio $\mathcal{L}^2$ $(T \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{A}, \nu)$, definiendo $\int_a^b \phi_t \, dX_t = \int_a^b \phi^p_t \, dX_t$, aunque esta integral ya no es una isometría de este espacio en $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, a menos que se restrinja al subespacio $\mathcal{L}^2(T \times \Omega, \bar{\mathcal{G}}, \nu)$ de los procesos integrables respecto a X en el sentido ordinario.

3.3. *Expresión del proceso $F(X)$ como integral indefinida.*

Si X es una martingala de $\mathcal{M}_2$ se demuestra (8) que su proceso creciente natural asociado A puede obtenerse de la forma siguiente:

$$A_t^h = \int_a^t \frac{E(X_{s+h}^2 - X_s^2/F_s)}{h}\, ds \xrightarrow[h\downarrow 0]{\sigma(L^1, L^\infty)} A_t, \text{ para cada } t \in T.$$

Esta convergencia nos ha llevado a probar la siguiente propiedad.

Lema. — Si Y es un proceso positivo, acotado y previsible tal que $\int_a^t Y_s\, dA_s^h$ converge debilmente si $h \downarrow 0$, entonces se verifica

$$\int_a^t Y_s\, dA_s^h \xrightarrow[h\downarrow 0]{\sigma(L^1, L^\infty)} \int_a^t Y_s\, dA_s, \text{ para todo } t \in T.$$

Demostración. — Si ν^h y ν son las medidas inducidas por los procesos crecientes A^h y A, la convergencia débil de A_t^h implica $\int Z\, d\nu^h \xrightarrow{h\downarrow 0} \int Z d\nu$ para todo proceso Z escalonado en intervalos, continuo por la izquierda y acotado.

Entonces, dado $G \in \mathfrak{A}$, la convergencia de $\int Y.1_G\, d\nu^h$ hacia $\int Y.1_G\, d\nu$ cuando $h \downarrow 0$, se deduce de la existencia del límite por hipótesis, y de aproximar el proceso $Y.1_G$ por dos sucesiones, una creciente y otra decreciente, de procesos escalonados en intervalos, continuos por la izquierda y acotados. □

Como conclusión de este apartado, utilizando los resultados anteriores y aplicando el teorema de descomposición de Doob, demostraremos el siguiente.

Teorema. — Si X es una martingala de $\mathcal{M}_2$ con un proceso creciente natural asociado A y F es una función de $C^2(R)$ tal que $F(X)$ es un proceso de cuadrado integrable, entonces se verifica la igualdad

$$F(X_t) = F(X_a) + \int_a^t F'(X_s)^p\, dX_s + \tfrac{1}{2}\int_a^t F''(X_s)^p\, dA_s \text{ c.s., para todo } t \in T,$$

si se cumple $F'(X) \in \mathcal{L}^2(\nu)$ o bien $F''(X) \in \mathcal{L}^2(\nu)$.

Demostración. — Si para cada $M > 0$ definimos el tiempo de paro $T_M(\omega) = \inf\{t \,|\, |X_t(\omega)| > M\}$, $T_M(\omega) = b$ si el conjunto es vacío, bastará probar la igualdad para $X_t^M = X_{t\wedge T_M}$, y luego hacer tender M a infinito.

Por ello podemos suponer que X está acotada y, por ser $F(X)$ una semimartingala equiintegrable, que F es cóncava, con lo cual $F(X)$ es una supermartingala acotada.

1.º Aplicando el teorema de descomposición de Doob, $F(X) = M - B$, siendo M una martingala continua por la derecha y B un proceso creciente natural tal que $\int_a^t \frac{E(F(X_s) - F(X_{s+h})/F_s)}{h}\, ds \xrightarrow[h\downarrow 0]{\sigma(L^1, L^\infty)} B_t$, para todo $t \in T$.

Desarrollando por Taylor la función F en el punto s se obtiene,

$$\int_a^t \frac{E(F(X_s) - F(X_{s+h})/F_s)}{h}\, ds = -\tfrac{1}{2}\int_a^t F''(X_s)\,\frac{E(X^2_{s+h}/F_s) - X^2_s}{h}\, ds -$$

$$-\tfrac{1}{2}\int_a^t \frac{E((F''(X_s + \theta(X_{s+h} - X_s)) - F''(X_s))\,(X_{s+h} - X_s)^2/F_s)}{h}\, ds.$$

a) Probaremos que el segundo término converge hacia cero en L^1.

$$E\Big|\int_a^t \frac{E((F''(X_s + \theta(X_{s+h} - X_s)) - F''(X_s))\,(X_{s+h} - X_s)^2/F_s)}{h}\, ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant E\left[\sup_{s\in[a,t]} |F''(X_s + \theta(X_{s+h} - X_s)) - F''(X_s)|.\int_a^t \frac{E(X^2_{s+h} - X^2_s/F_s)}{h}\, ds\right] = (\alpha).$$

Por la continuidad uniforme de F'', fijado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $|X_{s+h} - X_s| < \delta \Rightarrow |F''(X_s + \theta(X_{s+h} - X_s)) - F''(X_s)| < \varepsilon$ para todo $s \in [a, t]$.

En consecuencia,

$$(\alpha) \leqslant \int_{\left\{\sup\limits_{s\in[a,t]} |F''(X_s + \theta\,(X_{s+h} - X_s)) - F''(X_s)| > \varepsilon.\right\}} K.A^h_t\, dP + \varepsilon.\int_a^t \frac{E(X^2_{s+h} - X^2_s)}{h}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant K.\int_{\left\{\sup\limits_{s\in[a,t]} |X_{s+h} - X_s| > \delta\right\}} A^h_t\, dP + \varepsilon.\, M.$$

Si se define el tiempo de paro $S(\omega) = \inf\,\{s|s \leqslant t$ y $|X_{s+h}(\omega) - X_s(\omega)| > \delta\}$ y $S(\omega) = t$ si el conjunto es vacío, se cumple

$\left\{\{\sup\limits_{s\in[a,t]} |X_{s+h} - X_s| > \delta\} \subset \{|X_{s+h} - X_s| \geqslant \delta\}\right.$ y por tanto

$\delta.P\left\{\sup\limits_{s\in[a,t]} |X_{s+h} - X_s| > \delta\right\} \leqslant E\, X_{s+h} - X_s \xrightarrow{h \downarrow 0} 0$, por ser la martingala X continua por la derecha.

Teniendo en cuenta que la familia de variables $(A^h_t)_{h>0}$ es equiintegrable, queda probada la convergencia buscada.

b) En virtud del lema anterior, el primer término converge debilmente hacia $-\frac{1}{2}\int_a^t F''(X_s)^p\, dA_s$ para cada $t \in T$, de lo que se deduce la descomposición $F(X_t) = M_t + \frac{1}{2}\int_a^t F''(X_s)^p\, dA_s$ siendo M una martingala continua por la derecha y acotada, que además es válida para cualquier función F de $C^2(R)$.

2.º) Probaremos que la martingala $N = M - \int F'(X)^p \, dX$ es constante, y por tanto igual a $F(X_a)$, para lo cual bastará ver que el proceso creciente natural asociado a N es nulo, es decir, que

$$N^2 = M^2 - (\int F'(X)^p \, dX)^2 - 2\, N. \int F'(X)^p \, dX$$

es una martingala, lo que demostraremos mediante los siguientes pasos:

a) Las martingalas N y X son ortogonales, es decir, el producto $N.X = X.F(X) - \frac{1}{2} X. \int F''(X)^p \, dA - X. \int F'(X)^p \, dX$ es una martingala

En efecto, el proceso natural de variación acotada asociado a $X.F(X)$, teniendo en cuenta lo demostrado en el apartado 1.º, es

$$\int \left[F'(X)^p + \tfrac{1}{2} (X.F''(X))^p\right] dA$$

y puede deducirse de las propiedades de la integral estocástica que

$\int (X.F''(X))^p \, dA - X. \int F''(X)^p \, dA$ y $X. \int F'(X)^p \, dX - \int F'(X)^p \, dA$ son martingalas.

Como consecuencia, las martingalas N y $\int F'(X)^p \, dX$ son también ortogonales.

b) Las martingalas M y $\int F'(X)^p \, dX$ tienen el mismo proceso creciente natural asociado, puesto que partiendo de la igualdad

$$M^2 = F(X)^2 - F(X). \int F''(X)^p \, dA + 1/4 (\int F''(X)^p \, dA)^2 =$$
$$F(X)^2 - M. \int F''(X)^p \, dA - 1/4 (\int F''(X)^p \, dA)^2,$$

el proceso natural de variación acotada asociada a $F(X)^2$, por lo demostrado en 1.º, es $\int (F'(X)^2)^p \, dA + \int (F(X).F''(X))^p \, dA =$
$= \int (F'(X)^2)^p \, dA + \int (M.F''(X))^p \, dA + \frac{1}{2} \int (\int F''(X)^p \, dA). \, F''(X)^p \, dA$,
y basta comprobar finalmente que $\int (M.F''(X))^p \, dA - M. \int F''(X)^p \, dA$ es una martingala, que los dos últimos términos de las dos expresiones anteriores se anulan y que $\int (F'(X)^2)^p \, dA = \int (F'(X)^p)^2 \, dA$ c.s., para cada $t \in T$. □

Como aplicación de este teorema podemos citar el siguiente

Ejemplo. — Si X es una martingala de L^4, continua por la derecha, se verifica $X_t^2 = X_a^2 + 2. \int_a^t X_s^- \, dX_s + A_t$ c.s., para todo $t \in T$.

En efecto, por ser X una martingala, se verifica $X^p = E(X/\mathcal{G}) = X^-$ ν-casi por todo.

4. APROXIMACIÓN DEL PROCESO $F(X)$ POR POLINOMIOS EN LOS INCREMENTOS DE LA MARTINGALA Y DEL PROCESO CRECIENTE

4.1. *Expresión general del polinomio que aproxima al proceso $F(X)$.*

Sea X una martingala continua de $\mathcal{M}_2$, A su proceso creciente continuo asociado y F una función real derivable con continuidad un número suficiente de veces. Partiendo de la «Fórmula de Itô»:

$$F(X_t) = F(X_a) + \int_a^t F'(X_s) \; dX_s + \tfrac{1}{2} \int_a^t F''(X_s) \; dA_s,$$

y aplicando sucesivamente esta descomposición a las derivadas de la función F, nos proponemos expresar el proceso $F(X)$ como suma de un polinomio en los incrementos de la martingala y del proceso creciente más un cierto término complementario.

La «Fórmula de Itô», extendida por Meyer (9) a semimartingalas continuas a valores en R^n, permite calcular las siguiente integrales estocásticas

$$\int_a^t F^{(m)} (X_a) \, (X_s - X_a)^p \, (A_s - A_a)^q \, dX_s =$$

$$= F^{(m)} (X_a) . \frac{1}{p+1} (X_t - X_a)^{p+1} (A_t - A_a)^q - \tfrac{1}{2}$$

$$\int_a^t F^{(m)} (X_a) . \, p(X_s - X_a)^{p-1} \cdot (A_s - A_a)^q \, dA_s -$$

$$- \int_a^t F^{(m)} (X_a) . \frac{q}{p+1} (X_s - X_a)^{p+1} (A_s - A_a)^{p-1} \; dA_s,$$

siendo $m, p, q \in N$.

La aplicación de esta fórmula ha llevado a obtener la siguiente propiedad, que se demuestra por inducción sobre n:

Lema. — Si designamos por $S_n^k (Z)$, siendo k y n naturales tales que $k \leqslant n$, la suma de las $\binom{n}{k}$ integrales reiteradas de la variable Z, F_a -medible, $n - k$ veces respecto a X y k veces respecto a A, obtenidas al permutar el orden de las integrales, se verifica

$$S_n^k (Z) = Z . \sum_{j=o}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{(-1)^j}{(n-k-2j)! \, k! \, j \, 2^j} (X_t - X_a)^{n-k-2j} (A_t - A_a)^{k+j}$$

Con un procedimiento de cálculo de integrales reiteradas basado en el lema anterior y probando también el resultado por inducción sobre n, hemos obtenido el siguiente

Teorema. — Si F es una función de $C^{2n+2}(R)$, se verifica la descomposición

$$F(X_t) = P_n(F(X_t)) + Q_n(F(X_t)) + T_n(F(X_t)), \text{ siendo}$$

$$P_n(F(X_t)) = \sum_{k=o}^{n} \frac{1}{k!} F^{(k)}(X_a)(X_t - X_a)^k,$$

$$Q_n(F(X_t)) = \sum_{k=1}^{n} F^{(n+k)}(X_a) \left[\sum_{i=o}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]} \frac{\sum_{r=o}^{i} (-1)^r \binom{k+i}{r}}{(n-k-2i)!(k+i)!2^{k+i}} (X_t - X_a)^{n-k-2i}(A_t - A_a)^{k+i} \right],$$

$$T_n(F(X_t)) = \sum_{k=o}^{n+1} \frac{1}{2^k} S^k_{n+1}(F^{(n+k+1)}(X_t)).$$

Observemos que los términos P_n y Q_n son combinaciones lineales de expresiones del tipo $F^{(r)}(X_a)(X_t - X_a)^i (A_t - A_a)^j$, siendo $r = i + 2j$ y variando r desde 0 hasta $2n$. El número $i + 2j$ puede interpretarse como el grado del producto $(X_t - X_a)^i (A_t - A_a)^j$, si asignamos al proceso creciente el grado 2 teniendo en cuenta la relación $E(A_t - A_a/F_a) = E((X_t - X_a)^2/F_a)$.

El término T_n, que viene dado en forma de integrales reiteradas, lo denominaremos término complementario y estudiaremos su convergencia hacia cero cuando $t \to a$.

4.2. *Convergencia hacia cero del término complementario.*

Considerando en primer lugar el caso particular de un proceso W de movimiento browniano, y teniendo en cuenta que la dificultad de obtener aproximaciones polinómicas por trayectorias indica que deberán utilizarse convergencias en norma y no casi seguras, hemos obtenido la siguiente

Proposición. — El cociente $\dfrac{T_n(W_t)}{t^{n/2}} \xrightarrow[t \to 0]{L^2} 0$ para cada $n \in N$.

Demostración. — Por inducción sobre n, expresando T_n en función de los términos complementarios anteriores y aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral. □

En el caso de una martingala X continua de $\mathcal{M}_2$ con proceso creciente asociado A, la generalización de la propiedad anterior da lugar a la convergencia $\dfrac{E(T_n^2)}{A(t, \omega)^n} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ para cada $n \in N$ y cada $\omega \in \Omega$.

BIBLIOGRAFÍA

(1) K. Itô *Stochastic integral*. Proc. Imperial Acad., Tokyo, 20, 519-524, 1944.

(2) J. L. Doob. *Stochastic Processes*. Wiley, New York, 1953.

(3) PH. COURRÈGE *Intégrales stochastiques et martingales de carré intégrable*. Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 1962-63, exposé 7.

(4) P. A. MEYER. *Intégrales stochastiques I, II*. Séminaire de Probabilités I, Université de Strasbourg, Lec. Not in Math., 39, 1967. 72-117,

(5) H. KUNITA and S. WATANABE. *On square integrable martingales*. Nagoya Math. J., 30, 209-245, 1967.

(6) P. A. MEYER. *Martingales and Stochastic Integrals I*. Lec. Not. in Math., 1972.

(7) P. A. MEYER. *Guide détaillé de la théorie «générale» des processus*. Séminaire de Probabilités II, Université de Strasbourg, Lec. Not. in Math., 1968. 140-165.

(8) P. A. MEYER. *Probabilités et Potentiel*. Hermann, Paris, 1966.

(9) P. A. MEYER. *Intégrales stochastiques par raport aux martigales locales*. Séminaire de Probabilités IV, Université de Strasbourg, Lec. Not. in Math., 124, 77-107, 1970.

(10) H. P. MC KEAN, JR. *Stochastic Integrals*. Academic Press, New York, 1969.

(11) E. WONG. *Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems*. Mc GrawHill, Berkeley, 1971.

(12) R. S. BUCY and P. D. JOSEPH. *Filtering for Stochastic Processes With Applications to Guidance*. Interscience Publishers, Wiley, New York, 1968.

(13) P. A. MEYER, P. PRIOURET, F. SPITZER. *Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour III*-1973. Lec Not. ijn Math., 1974.

(14) P. LÉVY. *Processus stochastiques et mouvement browunien*. Gauthier-Villors, Paris, 1948.

Agradezco al Dr D Francisco de A. Sales Vallés la dirección de este trabajo. Las indicaciones y la revisión crítica de D. Eduardo Bonet han permitido presentar este artículo en su forma actual.