SOBRE TOPOLOGIAS LOCALMENTE CONVEXAS EN ESPACIOS DE SUCESIONES

por

MANUEL TORT PINILLA

(Segunda parte)

En el presente volumen se publican solamente los dos últimos capítulos de este artículo. Los tres restantes aparecieron en el número anterior.

CAPÍTULO IV

CONDICIONES PARA LA COINCIDENCIA DE LA TOPOLOGÍA NORMAL CON LA DE MACKEY EN LOS ESPACIOS ESCALONADOS Y CO-ESCALONADOS DE ORDEN p.

Los resultados de este capítulo suponen una ampliación de los resultados sobre la coincidencia de la topología normal con la de Mackey en los espacios escalonados y co-escalonados de orden p, que presentamos en las I Jornadas Matemáticas Luso-Españolas [17].

En este capítulo, las topologías débil, normal, de Mackey y fuerte en espacios de sucesiones $E \supset \varphi$ se considerarán siempre respecto del sistema dual (E, E^x).

Para cada sucesión positiva $a = (a_n)$ y cada número real $p \geq 1$, consideremos el espacio λ_a^p formado por todas las sucesiones $x = (x_n)$ tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, |x_n|^p$$

es convergente.

Dado un sistema creciente y completo de escalones (a^k) y un número real $p \geq 1$, los espacios

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \lambda_{a^k}^p \qquad \text{y} \qquad F = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_{a^k}^p)^x$$

se llaman los espacios escalonado y co-escalonado de orden p, respectivamente, correspondientes al sistema de escalones (a^k).

Estos espacios son perfectos y α-duales el uno del otro. Para $p > 1$, el espacio escalonado de orden p es un espacio de Fréchet reflexivo con la topología de Mackey.

Si E es un espacio escalonado de orden 1, E es un espacio de Fréchet con la topología normal que, por tanto, coincide con la de Mackey. Estudiamos, a continuación, la coincidencia de la topología normal con la de Mackey en los espacios escalonados de orden p para $p > 1$.

OBSERVACIÓN 10. — Sea M un subconjunto de un espacio normal de sucesiones E. Se verifica trivialmente que M está contenido en la envoltura normal de un elemento de E si y sólo si la sucesión $s = (s_n)$, $s_n = \sup_{x \in M} |x_n|$, pertenece a E.

La necesidad de la condición expresada en el siguiente teorema la demostramos en [17], proposición 5, pág. 210.

TEOREMA 28. — Sea $(a^k) = ((a_n^k))$ un sistema creciente y completo de escalones y sea E el correspondiente espacio escalonado de orden p (para un $p > 1$). Una condición necesaria y suficiente para que la topología normal en E coincida con la de Mackey es que para cada $k \in N$ exista un $N(k) > k$ tal que la serie

$$\sum \left(\frac{a_n^k}{a_n^{N(k)}}\right)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

sea convergente (la suma extendida a los índices $n \in N$ tales que $a_n^{N(k)} \neq 0$).

Demostración.

Suficiencia: Suponiendo que se cumple la condición demostraremos que todo subconjunto acotado de E^x está contenido en la envoltura normal de un elemento de E^x. Por tanto, todo subconjunto acotado de E^x será equicontinuo para la topología normal. Luego, la topología normal coincidirá con la fuerte, y por tanto con la de Mackey.

Sea B un subconjunto acotado de $E^x = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_{a^k}^p)^x$. Por ser la topología del núcleo localmente convexo

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \lambda_{a^k}^p \left[\beta\left(\lambda_{a^k}^p (\lambda_{a^k}^p)^x\right)\right]$$

la fuerte $\beta(E, E^x)$, B es equicontinuo para esta topología. Luego, existe un $k \in N$ y B está contenido en $(\lambda_{a^k}^p)^x$ y es acotado en este espacio. Supongamos, primero, que a^k tiene infinitos términos iguales a cero e infinitos términos distintos de cero.

Sean

$$N'_k = \{n \in N \mid a_n^k = 0\} \quad \text{y} \quad N''_k = \{n \in N \mid a_n^k \neq 0\}$$

N'_k y N''_k con la ordenación inducida por la de N se identifican con sucesiones estrictamente crecientes de números naturales $\{n'_i\}$ y $\{n''_i\}$ respectivamente.

$$\lambda^p_{ak} = \omega \oplus \delta\, l^p \qquad \text{y} \qquad (\lambda^p_{ak})^x = \varphi + \delta\, l^q$$

$(\lambda^p_{ak})^x$ descompone en suma directa de dos subespacios seccionales: φ correspondiente a los índices de N'_k y el transformado diagonal de $l^q = (l^p)^x$ por la sucesión $((a^k_{n''})^{1/p})$ correspondiente a los índices de N''_k. Sean

$$B' = \{(u_{n'_i}) \mid u = (u_n) \in B\} \subset \varphi \qquad \text{y}$$
$$B'' = \{(u_{n''_i}) \mid u = (u_n) \in B\} \subset \delta\, l^q$$

B' y B'' son acotados en φ y en $\delta\, l^q$ respectivamente.

Por ser B' acotado en φ es de dimensión finita. Luego,

$$s_{n'_i} = \sup_{u \in B} |u_{n'_i}| < \infty$$

y existe un número finito de índices $i \in N$ para los cuales $s_{n'_i} \neq 0$. Luego $(s_{n'_i}) \in \varphi$.

Puesto que B'' es acotado en $\delta\, l^q$, existe un número real $R > 0$, tal que para todo $u = (u_n) \in B$ se tiene

$$\sum_{n \in N''_k} \left(\frac{|u_n|}{(a^k_n)^{1/p}} \right)^q = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{|u_{n''_i}|}{(a^k_{n''_i})^{1/p}} \right)^q \leqslant R^q.$$

Si $n \in N''_k$ se verifica

$$\frac{|u_n|^q}{(a^k_n)^{q/p}} \leqslant \sum_{n \in N''_k} \left(\frac{|u_n|}{(a^k_n)^{1/p}} \right)^q \leqslant R^q.$$

Puesto que esta relación es válida para todo $u = (u_n) \in B$, se tiene para todo $n \in N''_k$.

$$s_n = \sup_{u \in B} |u_n| \leqslant R\, (a^k_n)^{1/p}. \tag{14}$$

Por verificarse la condición del enunciado, existe $N(k) > k$ y la serie

$$\sum_{n \in N''_{N(k)}} \left(\frac{a^k_n}{a^{N(k)}_n} \right)^{q/p} \tag{15}$$

es convergente ($N''_{N(k)} = \{n \in N \mid a^{N(k)}_n \neq 0\}$). Puesto que el sistema de escalones es creciente, se tiene fácilmente $N''_k \subset N''_{N(k)}$.

Luego, se tiene

$$\sum_{n \in N''_{N(k)}} \left(\frac{s_n}{(a_n^{N(k)})^{1/p}}\right)^q = \sum_{n \in N''_{N(k)} - N''_k} \left(\frac{s_n}{(a_n^{N(k)})^{1/p}}\right)^q + \sum_{n \in N''_k} \left(\frac{s_n}{(a_n^{N(k)})^{1/p}}\right)^q \qquad (16)$$

La primera suma es finita puesto que únicamente hay un número finito de índices $n \notin N''$ tales que $s_n \neq 0$, y la segunda serie es convergente por (14) y (15).

Si suponemos que el complementario de $N''_{N(k)}$, $N - N''_{N(k)}$, es infinito, se tiene por (16)

$$(s_n)_{n \in N''_{N(k)}} \in \delta\, l^q$$

$$(s_n)_{n \notin N''_{N(k)}} \in \varphi.$$

Por tanto

$$(s_n) \in \varphi \oplus \delta\, l^q = (\lambda^p_{a^{N(k)}})^x \subset E^x,$$

y B está contenido en la envoltura normal de (s_n).

Si el complementario de $N''_{N(k)}$ fuera finito, la relación (16) implicaría

$$(s_n) \in \delta\, l^q = (\lambda^p_{a^{N(k)}})^x \subset E^x,$$

y se llegaría al mismo resultado.

Si la sucesión a^k únicamente tiene un número finito de términos iguales a cero, por ser el sistema de escalones completo, podemos encontrar un $k' > k$ tal que la sucesión $a^{k'}$ tenga todos los términos distintos de cero; en este caso

$$B \subset (\lambda^p_{a^k})^x \subset (\lambda^p_{a^{k'}})^x,$$

y la demostración es análoga.

Si la sucesión a^k pertenece a φ, se tiene

$$(\lambda^p_{a^k})^x = \varphi.$$

y B está contenido en la envoltura normal de un elemento de φ puesto que es acotado y, por tanto, de dimensión finita.

Lema 10. — En las mismas hipótesis que en el teorema 28 si se verifica la condición: Para cada $k \in N$ existe un $N(k) > k$ tal que la serie

$$\sum \left(\frac{a_n^k}{a_n^{N(k)}}\right)^{q/p}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

es convergente (la suma extendida a los índices $n \in N$ tales que $a_n^{N(k)} \neq 0$), para un $p_0 > 1$, también se verifica para $p = 2^n(p_0 - 1) + 1$, para todo $n \in N$.

Demostración. — Sea $k \in N$. Por verificarse la condición para p_0, existe un $N(k) > k$ y la serie

$$\sum_{n \in P} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{N(k)}}\right)^{q_0/p_0}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1,$$

es convergente (siendo $P = \{n \in N \mid a_n^{N(k)} \neq 0\}$).

Dado $N(k) \in N$, aplicando de nuevo la condición para p_0, existe un $N(N(k))$, que representaremos por $M(k)$ tal que la serie

$$\sum_{n \in \bar{P}} \left(\frac{a_n^{N(k)}}{a_n^{M(k)}}\right)^{q_0/p_0}$$

es convergente (siendo $\bar{P} = \{n \in N \mid a_n^{M(k)} \neq 0\}$).

Puesto que $M(k) > N(k)$, se tiene $P \subset \bar{P}$, lo que implica que la serie

$$\sum_{n \in P} \left(\frac{a_n^{N(k)}}{a_n^{M(k)}}\right)^{q_0/p_0}$$

es convergente.

Para $n \in P$, sean

$$x_n = \frac{a_n^k}{a_n^{N(k)}} \quad \text{y}_g \quad y_n = \frac{a_n^{N(k)}}{a_n^{M(k)}} \tag{17}$$

y sea

$$\alpha = \frac{q_0}{p_0} = \frac{1}{p_0 - 1}$$

De $(x_n^{\alpha/2} - y_n^{\alpha/2})^2 \geqslant 0$ se deduce $(x_n y_n)^{\alpha/2} \leqslant x_n^{\alpha/2} + y_n^{\alpha/2}$ Luego, la serie

$$\sum_{n \in P} (x_n y_n)^{\alpha/2} \tag{18}$$

es convergente.

Sustituyendo en (18) las expresiones (17) se tiene que la serie

$$\sum_{n \in P} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{M(k)}}\right)^{\alpha/2} \tag{19}$$

es convergente.

Si $n \in \bar{P} - P$, entonces $n \notin P$ y por tanto $a_n^k \leqslant a_n^{N(k)} = 0$. Luego

$$\sum_{n \in \bar{P} - P} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{M(k)}} \right)^{\alpha/2} = 0 \tag{20}$$

y por (19) y (20) la serie

$$\sum_{n \in \bar{P}} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{M(k)}} \right)^{\alpha/2} = \sum_{n \in \bar{P} - P} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{M(k)}} \right)^{\alpha/2} + \sum_{n \in P} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{M(k)}} \right)^{\alpha/2}$$

es convergente.

Si $p = 2(p_0 - 1) + 1$, se tiene $q/p = q_0/2p_0 = \alpha/2$ Luego, hemos demostrado que para todo $k \in N$ existe un $M(k) \in N$ tal que la serie

$$\sum_{n \in \bar{P}} \left(\frac{a_n^k}{a_n^{M(k)}} \right)^{q/p}$$

es convergente para $p = 2(p_0 - 1) + 1$. Por tanto, la condición se cumple para este p.

Por recurrencia se obtiene que la condición se verifica para

$$p = 2^n (p_0 - 1) + 1, \quad \text{para todo} \quad n \in N.$$

LEMA 11. — En las mismas hipótesis que en el teorema 28, si se verifica la condición expresada en el lema 10 para un $p_0 > 1$, también se verifica para todo $p \leqslant p_0$.

Demostración. — Si $p \leqslant p_0$, se tiene

$$\frac{q_0}{p^0} \leqslant \frac{q}{p}$$

donde

$$\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

de donde se sigue la conclusión.

LEMA 12. — En las mismas hipótesis que en el teorema 28, si se verifica la condición expresada en el lema 10 para un $p_0 > 1$, también se verifica para todo $p > 1$.

Demostración. — Si $p \leqslant p_0$, se verifica la condición en virtud del lema 11. Si $p > p_0$ existe un $n \in N$ tal que p es menor que $2^n (p_0 - 1) + 1$ y el resultado se obtiene por aplicación de los lemas 10 y 11.

A partir del teorema 28 y del lema 12 se obtiene de un modo inmediato el siguiente:

TEOREMA 29. — Sea a^k un sistema creciente y completo de escalones y sea E_p el correspondiente espacio escalonado de orden p. Si para un $p_0 > 1$ coincide en E_{p_0} la topología normal con la de Mackey, también coinciden en E_p para todo $p > 1$.

Estudiamos, a continuación, la coincidencia de la topología normal con la de Mackey en los espacios co-escalonados de orden p para $p \geqslant 1$.

OBSERVACIÓN 11. — Sea E un espacio perfecto. Si K es un subconjunto $\sigma(E, E^x)$-compacto de E, entonces K es $\mathcal{N}$-compacto y la envoltura absolutamente convexa y cerrada $\overline{\Gamma(K)}$ es $\mathcal{N}$-precompacta y, por ser $E[\mathcal{N}]$ un espacio completo, es $\mathcal{N}$-compacta y por consiguiente es $\sigma(E, E^x)$-compacta. Luego, todo subconjunto de E $\sigma(E, E^x)$-compacto está contenido en uno absolutamente convexo y $\sigma(E, E^x)$-compacto. Por lo tanto, la topología de Mackey $\tau(E^x, E)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos $\sigma(E, E^x)$-relativamente compactos de E.

LEMA 13. — Sea $(a^k) = ((a_n^k))$ un sistema creciente y completo de escalones. Si para toda sucesión $x = (x_n)$ tal que, para todo $k \in N$, se verifica

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p} x_n = 0$$

se verifica también, para todo $k \in N$, que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \, |x_n|^p$$

es convergente; entonces, para toda sucesión $x = (x_n)$ tal que, para todo $k \in N$, la sucesión $((a_n^k)^{1/p} x_n)$ es acotada, se verifica, para todo $k \in N$, que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \, |x_n|^p$$

es convergente.

Demostración. — Sea $x = (x_n)$ una sucesión tal que, para todo $k \in N$ la sucesión $((a_n^k)^{1/p} x_n)$ es acotada. Sea $y = (y_n) \in \omega$ una sucesión convergente hacia cero. La sucesión $(|y_n|^{1/p})$ también es convergente hacia cero; entonces, para todo $k \in N$, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p} x_n \, |y_n|^{1/p} = 0$$

lo que implica, para todo $k \in N$, que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \, |x_n|^p \, |y_n|$$

es convergente.

Para cada $k \in N$, puesto que se cumple para todo elemento $(y_n) \in c_0$, se tiene que $((a_n^k) \, |x_n|^p)$ pertenece a $c_0^x = l^1$. Por consiguiente, para todo todo $k \in N$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \, |x_n|^p$$

es convergente.

TEOREMA 30 (*). — Sea $(a^k) = ((a_n^k))$ un sistema creciente y completo de escalones y sea F el correspondiente espacio co-escalonado de orden p (para un $p \geqslant 1$). Una condición necesaria y suficiente para que la topología normal coincida con la de Mackey en F es que para toda sucesión $x = (x_n)$ tal que, para todo $k \in N$, se verifica

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p} x_n = 0,$$

se verifica también, para todo $k \in N$, que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \, |x_n|^p$$

es convergente.

Demostración. — Puesto que la topología normal es menos fina que la de Mackey, las dos topología coincidirán si y sólo si todo subconjunto de F^x equicontinuo de la topología de Mackey, también es equicontinuo de la topología normal. Considerando $E = F^x$ en la observación 11 se tiene que los subconjuntos de F^x $\sigma(F^x, F)$-relativamente compactos son los $\tau(F, F^x)$-equicontinuos. Luego, las topologías normal y de Mackey coincidirán si y sólo si todo subconjunto K de F^x $\sigma(F^x, F)$-relativamente compacto está contenido en la envoltura normal de un elemento de F^x.

Necesidad: Supongamos que la topología normal coincide con la de Mackey en el espacio co-escalonado F.

Sea $x = (x_n)$ una sucesión tal que, para todo $k \in N$, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p} x_n = 0.$$

Entonces, la sucesión de elementos de F^x $x_n e^n \in \varphi \subset F^x$ es $\beta(F^x, F)$-con-

(*) Este teorema, muy parecido a la proposición 6 presentada en las I Jornadas Matemáticas Luso-Españolas [17] pág. 213, sustituye a aquella, en la que lamentablemente se deslizó un error. No obstante, tanto el enunciado como la demostración de aquella proposición son correctos en el caso $p = 1$.

vergente hacia cero, y por lo tanto, también es $\sigma(F^x, F)$-convergente hacia cero. Por ser $\sigma(F^x, F)$-convergente, el conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n e^n\} = M$$

es $\sigma(F^x, F)$-relativamente compacto y, por coincidir las topologías normal y de Mackey en F^x, está contenido en la envoltura normal de un elemento de F^x. Luego, teniendo en cuenta la observación 10, la sucesión $|x| = (|x_n|)$, $|x_n| = \sup_{y \in M} |y_n|$ pertenece a F^x. Por tanto, para todo $k \in N$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k |x_n|^p$$

es convergente.

Suficiencia: Sea K un subconjunto de F^x $\sigma(F^x, F)$-compacto y sea $s = (s_n)$, $s_n = \sup_{x \in K} |x_n|$. Sea C el conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{s_n e^n\}.$$

Para cada $n \in N$, la aplicación que a una sucesión $x = (x_n) \in F^x$ le hace corresponder x_n es $\sigma(F^x, F)$-continua y, por ser K $\sigma(F^x, F)$-compacto, para cada $n \in N$, existe una sucesión $x = (x_n) \in K$ tal que $|x_n| = s_n$. Luego, para todo $n \in N$ la sucesión de elementos de F^x $(s_n e^n)$ pertenece a la envoltura normal de K. Puesto que $N(K)$ es $\sigma(F^x, F)$-relativamente compacta y $C \subset N(K)$, se concluye que C también lo es y, por lo tanto, $C \cup \{0\}$ es $\sigma(F^x, F)$-compacto. Puesto que los conjuntos compactos de F^x coinciden con los compactos por sucesiones y que toda sucesión de elementos de F^x $\sigma(F^x, F)$-convergente es convergente por coordenadas, se tiene que toda sucesión parcial de $(s_n e^n)$ contiene una parcial $\sigma(F^x, F)$-convergente hacia cero, lo que implica que $(s_n e^n)$ es $\sigma(F^x, F)$-convergente hacia cero. por lo tanto $(s_n e^n)$ es $\tau(F^x, F)$-acotada.

Luego, para todo $k \in N$, se tiene que la sucesión $(a_n^k)^{1/p} s_n$ es acotada.

Supongamos que se verifica la condición. Luego, en virtud del lema 13, para todo $k \in N$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k (s_n)^p$$

es convergente, lo que implica que la sucesión $s = (s_n)$ pertenece a F^x. Por lo tanto, K está contenido en la envoltura normal de un elemento de F^x. Luego, la topología normal coincide con la de Mackey en F.

LEMA 14. — En las mismas hipótesis que en el teorema 30, si se verifica la condición: Para toda sucesión $x = (x_n)$ tal que, para todo $k \in N$, se verifica

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p} x_n = 0$$

se verifica también, para todo $k \in N$, que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k |x_n|^p$$

es convergente para un $p_0 \geqslant 1$, también se verifica para todo $p \geqslant 1$.

Demostración. — Supongamos que se cumple la condición para un $p_0 \geqslant 1$ y sea $p \geqslant 1$. Sea $x = (x_n)$ una sucesión tal que, para todo $k \in N$, se verifica

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p} x_n = 0.$$

Entonces, para todo $k \in N$, se tiene

$$\lim_{n \to \infty} (a_n^k)^{1/p_0} |x_n|^{p/p_0} = 0.$$

Aplicando la condición para p_0 se concluye que, para todo $k \in N$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a |x_n|^p$$

es convergente.

A partir del teorema 30 y del lema 14 se obtiene de un modo inmediato el siguiente:

TEOREMA 31. — Sea a^k un sistema creciente y completo de escalones y sea F_p el correspondiente espacio co-escalonado de orden p. Si para un $p_0 \geqslant 1$ coincide en F_{p_0} la topología normal con la de Mackey, también coinciden en F_p para todo $p \geqslant 1$.

CAPÍTULO V

EL ESPACIO $E_{\mathcal{T}}^{+}$

DEFINICIÓN 4. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones. Llamaremos $E_{\mathcal{T}}^{+}$ al conjunto formado por todas las sucesiones $u = (u_n) \in E^x$ tales que la seminorma p_u

$$p_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|, \qquad x = (x_n) \in E,$$

es $\mathcal{T}$-continua.

TEOREMA 32. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones. $E^+_{\mathcal{T}}$ es un espacio de sucesiones normal. Si la topología $\mathcal{T}$ es más fina que la de la convergencia por coordenadas $E^+_{\mathcal{T}}$ contiene φ.

TEOREMA 33. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones que contiene φ. Existe una aplicación lineal inyectiva de $E^+_{\mathcal{T}}$ en el dual topológico $(E[\mathcal{T}])'$ (Luego, podemos considerar $E^+_{\mathcal{T}} \subset (E[\mathcal{T}])'$).

Demostración. — Definimos una aplicación $\psi : E^+_{\mathcal{T}} \to (E[\mathcal{T}])'$ que a cada elemento $u = (u_n) \in E^+_{\mathcal{T}}$ le hace corresponder la forma lineal

$$\psi_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n, \qquad x = (x_n) \in E,$$

Puesto que $u = (u_n) \in E^+_{\mathcal{T}}$, la seminorma p_u es $\mathcal{T}$-continua. Luego, la relación

$$|\psi_u(x)| = |\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| = p_u(x), \qquad x = (x_n) \in E,$$

implica que ψ_u pertenece a $(E[\mathcal{T}])'$.

La aplicación ψ es lineal y, puesto que E contiene φ, es inyectiva.

Con la notación del capítulo II tenemos el siguiente:

TEOREMA 34. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones donde $\mathcal{T}$ es una topología más fina que la de la convergencia por coordenadas. Se verifica

$$E^+_{\mathcal{T}} = [N(E)]^+_{S^0_{\mathcal{T}}} = E^+_{S_{\mathcal{T}}}.$$

Demostración. — Puesto que $S_{\mathcal{T}}$ es menos fina que $\mathcal{T}$, se tiene inmediatamente

$$E^+_{S_{\mathcal{T}}} \subset E^+_{\mathcal{T}}.$$

Si $u \in [N(E)]^+_{S_{\mathcal{T}}}$, la seminorma p_u, en $[N(E)]$, es $S^0_{\mathcal{T}}$-continua, y su restricción a E es $S_{\mathcal{T}}$-continua puesto que la topología $S^0_{\mathcal{T}}$ induce en E la topología $S_{\mathcal{T}}$. Luego

$$[N(E)]^+_{S^0_{\mathcal{T}}} \subset E^+_{S_{\mathcal{T}}}$$

Basta, pues, demostrar la inclusión

$$E^+_{\mathcal{T}} \subset [N(E)]^+_{S^0_{\mathcal{T}}}$$

Sea $u = (u_n) \in E^+_{\mathcal{T}}$. La seminorma p_u en E es $\mathcal{T}$-continua. Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\mathcal{T}$-entorno de cero U en E tal que

$$p_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \leqslant \varepsilon,$$

para todo $x = (x_n) \in U$.

Si $x = (x_n) \in C(N(U))$, existen números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, con $\lambda_k \geqslant 0$, para $1 \leqslant k \leqslant m$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$, sucesiones $\alpha^1 = (\alpha^1_n), \ldots, \alpha^m = (\alpha^m_n)$, con $|\alpha^k_n| \leqslant 1$, para $1 \leqslant k \leqslant m$ y para todo $n \in N$, y elementos $x^1 = (x^1_n), \ldots, x^m = (x^m_n)$ de U tales que

$$x_n = \lambda_1 \alpha^1_n x^1_n + \ldots + \lambda_m \alpha^m_n x^m_n$$

para todo $n \in N$.

Luego, se tiene

$$p_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n (\lambda_1 \alpha^1_n x^1_n + \ldots + \lambda_m \alpha^m_n x^m_n)| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x^1_n| + \ldots + \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x^m_n| \leqslant (\lambda_1 + \ldots + \lambda_m)\, \varepsilon = \varepsilon.$$

Luego, puesto que si U es un $\mathcal{T}$-entorno de cero en E, $C(N(U))$ es un $S^0_{\mathcal{T}}$-entorno de cero en $[N(E)]$, la relación anterior, válida para todo $x = (x_n) \in C(N(U))$, implica que la seminorma p_u en $[N(E)]$ es $S^0_{\mathcal{T}}$-continua. Luego,

$$u \in [N(E)]^+_{S^0_{\mathcal{T}}}.$$

COROLARIO. — Sea E un espacio de sucesiones y $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ topologías localmente convexas en E más finas que la topología de la convergencia porcoordenadas. Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ tienen la misma topología sólida asociada se tiene

$$E^+_{\mathcal{T}} = E^+_{\mathcal{T}'}.$$

LEMA 15. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones. Se verifica la igualdad:

$$E^+_{\mathcal{N}(E,F)} = [N(F)].$$

Demostración. — Se tiene de un modo inmediato, a partir de la definición de $E^+_{\mathcal{N}(E,F)}$

$$F \subset E^+_{\mathcal{N}(E,F)}$$

y puesto que, en virtud del teorema 32, $E^+_{\mathcal{N}(E,F)}$ es un espacio de sucesiones normal, se tiene

$$[N(F)] \subset E^{+}_{\mathcal{N}(E,F)}$$

Para establecer la inclusión contraria consideramos un elemento $u = (u_n)$ de $E^{+}_{\mathcal{N}(E,F)}$. La seminorma p_u es $\mathcal{N}(E, F)$-continua. Luego, existen elementos $v^1 = (v^1_n), \ldots, v^m = (v^m_n)$ de F tales que

$$p_u(x) \leqslant \sup_{1 \leq k \leq m} p_{v^k}(x) \leqslant p_{v^1}(x) + \ldots + p_{v^m}(x),$$

para todo $x \in E$.

Puesto que E contiene φ aplicando la desigualdad anterior a $x = e^n$, para cada $n \in N$, se tiene

$$|u_n| \leqslant |v^1_n| + \ldots + |v^m_n|,$$

lo que implica $u \in N([N(F)])$. Por tanto, puesto que, en virtud del corolario del teorema 1, $[N(F)]$ es un espacio de sucesiones normal, se tiene

$$u \in [N(F)].$$

TEOREMA 35. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones, donde F es un espacio normal. La topología $N(E, F)$ es la menos fina entre las topologías $\mathcal{T}$ compatibles con la estructura de espacio vectorial de E tales que

$$E^{+}_{\mathcal{T}} = F.$$

Demostración. — En virtud del lema 15, y puesto que, por ser F normal, $[N(F)] = F$, se tiene

$$E^{+}_{\mathcal{N}(E,F)} = F.$$

Sea $\mathcal{T}$ una topología en E, compatible con la estructura de espacio vectorial de E, tal que $E^{+}_{\mathcal{T}} = F$.

Si $u = (u_n) \in F$, entonces $u \in E^{+}_{\mathcal{T}}$, y por tanto la seminorma p_u es $\mathcal{T}$-continua.

Puesto que el sistema de seminormas $\{p_u\}_{u \in F}$ define la topología $N(E, F)$, resulta que la topología es menos fina que $\mathcal{T}$.

TEOREMA 36. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones que contiene φ, donde $\mathcal{T}$ es una topología sólida. Si $(E[\mathcal{T}])' \subset E^{x}$, entonces

$$E^{+}_{\mathcal{T}} = (E[\mathcal{T}])'.$$

Demostración. — Si $u = (u_n)$ es un elemento de $(E[\mathcal{T}])' \subset E^{x}$, para todo

$\varepsilon > 0$, existe un $\mathcal{T}$-entorno de cero U en E, normal en E, tal que

$$\sup_{x \in U} |\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n| \leqslant \varepsilon.$$

En virtud del lema 3 y de la desigualdad anterior, por ser U normal en E, se tiene

$$\sup p_u(x) = \sup \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| = \sup |\sum_{n=1}^{\infty} u_n x_n| \leqslant \varepsilon$$

lo que implica que la seminorma p_u es $\mathcal{T}$-continua.

Luego, $u \in E^+_{\mathcal{T}}$, lo que implica

$$(E[\mathcal{T}])' \subset E^+_{\mathcal{T}}$$

Por otra parte, la inclusión

$$E^+_{\mathcal{T}} \subset (E[\mathcal{T}])'$$

se verifica en virtud del teorema 33.

Corolario. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones que contiene φ, donde $\mathcal{T}$ es más fina que la topología de la convergencia por coordenadas, tal que $(E[\mathcal{T}])' \subset E^x$. El dual topológico de E con la topología sólida asociada $S_{\mathcal{T}}$ es el espacio $E^+_{\mathcal{T}}$.

Demostración. — En virtud del teorema 34, se tiene $E^+_{\mathcal{T}} = E^+_{S_{\mathcal{T}}}$, y aplicando el teorema anterior, teniendo en cuenta que por ser $S_{\mathcal{T}}$ menos fina que $\mathcal{T}$, $(E[S_{\mathcal{T}}])' \subset (E[\mathcal{T}])' \subset E^x$, se tiene $E^+_{S_{\mathcal{T}}} = (E[S_{\mathcal{T}}])'$. Luego, $E^+_{\mathcal{T}} = E[S_{\mathcal{T}}])'$.

Teorema 37. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones, donde F es un espacio normal, y sea $\mathcal{T}$ una topología localmente convexa en E. $E^+_{\mathcal{T}} = (E[\mathcal{T}])' = F$ si y sólo si $\mathcal{T}$ es más fina que la topología normal $\mathcal{N}(E, F)$ y menos fina que la de Mackey $\tau(E, F)$.

Demostración. — Supongamos, primero, que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{N}(E, F)$ y menos fina que $\tau(E, F)$. Por ser $\mathcal{T}$ más fina que $\mathcal{N}(E, F)$, teniendo en cuenta el teorema 35, se tiene

$$F = E^+_{\mathcal{N}(E, F)} \subset E^+_{\mathcal{T}}.$$

Por ser $\mathcal{T}$ menos fina que $\tau(E, F)$, se tiene

$$(E[\mathcal{T}])' \subset (E[\tau(E, F)])' = F.$$

Puesto que por el teorema 33, $E_{\mathcal{T}}^{+} \subset (E[\mathcal{T}])'$, se tiene

$$F \subset E_{\mathcal{T}}^{+} \subset (E[\mathcal{T}])' \subset F,$$

lo que implica

$$E_{\mathcal{T}}^{+} = (E[\mathcal{T}])' = F.$$

Recíprocamente, supongamos

$$E_{\mathcal{T}}^{+} = (E[\mathcal{T}])' = F$$

$E_{\mathcal{T}}^{+} = F$ implica, por el teorema 35, que $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{N}(E, F)$ y $(E[\mathcal{T}])' = F$ implica que $\mathcal{T}$ es menos fina que $\tau(E, F)$.

Corolario. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones que contiene φ tal que $(E[\mathcal{T}])' \subset E^{x}$, siendo $\mathcal{T}$ más fina que la topología de la convergencia por coordenadas. La topología sólida asociada $S_{\mathcal{T}}$ es más fina que la topología normal $\mathcal{N}(E, E_{\mathcal{T}}^{+})$ y menos fina que la de Mackey $\tau(E, E_{\mathcal{T}}^{+})$.

Demostración. — En virtud de los teoremas 34 y 36 se tiene

$$E_{\mathcal{T}}^{+} = E_{S_{\mathcal{T}}}^{+} = (E[S_{\mathcal{T}}])',$$

y la conclusión se obtiene por aplicación del teorema anterior.

Teorema 38. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones. El espacio $E_{\sigma(E,F)}^{+}$ coincide con el espacio φ.

Sea (E, F) un sistema dual. Si U es un subconjunto de E, se llama polar de U al subconjunto de F definido por

$$U^{0} = \{u \in F \mid |\langle u, x\rangle| \leqslant 1 \quad \text{para todo} \quad x \in U\}$$

Si U es absorbente en E, U^{0} es acotado. U^{00} es la envoltura absolutamente convexa y $\sigma(E, F)$-cerrada de U.

Si (E, F) es un sistema dual de espacios de sucesiones y U un subconjunto de E, definiremos, a continuación, el polar normal de U. Estudiaremos sus propiedades para utilizarlo, más adelante, para dar una representación, en el caso $(E[\mathcal{T}])' \subset E^{x}$, de la topología sólida asociada $S_{\mathcal{T}}$ como topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de una familia de acotados de $E_{\mathcal{T}}^{+}$, y para dar una representación de $E_{\mathcal{T}}^{+}$.

Definición 5. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones y U un subconjunto de E. Definimos el polar normal de U como el subconjunto de F

$$U^{\square} = \{u = (u_n) \in F \mid \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \leqslant 1 \quad \text{para todo} \quad x = (x_n) \in U\}$$

TEOREMA 39. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones y U un subconjunto de E. El polar normal de U es un subconjunto de F absolutamente convexo y normal en F.

TEOREMA 40. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones y U un subconjunto de E. El polar normal de U está contenido en el polar U^0.

COROLARIO. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones y U un subconjunto absorbente de E. El polar normal de U es acotado.

TEOREMA 41. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones. Si U es un subconjunto de E normal en E, su polar normal $U^{\square}$ es igual a su polar U^0.

Demostración. — Basta tener en cuenta las definiciones de $U^{\square}$ y de U^0 y aplicar el lema 3.

LEMA 16. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones. Consideremos el sistema dual $([N(E)], F)$. Si U es un subconjunto de E (entonces $C(N(U)) \subset [N(E)]$), se verifica la igualdad

$$U^{\square} = (C(N(U)))^{\square}$$

Demostración. — Puesto que $U \subset C(N(U))$, se tiene fácilmente

$$U^{\square} \supset (C(N(U)))^{\square}$$

Para demostrar la inclusión contraria, consideremos un elemento $u = (u_n)$ de $U^{\square}$ y sea $x = (x_n)$ un elemento de $C(N(U))$.

Puesto que $x = (x_n) \in C(N(U))$, existen números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, con $\lambda_k \geqslant 0$, para $1 \leqslant k \leqslant m$ y $\sum_{n=1}^{m} \lambda_k = 1$, sucesiones $\alpha^1 = (\alpha_n^1), \ldots, \alpha^m = (\alpha_n^m)$, con $|\alpha_n^k| \leqslant 1$ para $1 \leqslant k \leqslant m$ y para todo $n \in N$ y elementos $x^1 = (x_n^1)$, $, \ldots, x^m = (x_n^m)$ de U, tales que

$$x_n = \lambda_1 \alpha_n^1 x_n^1 + \ldots + \lambda_m \alpha_n^m x_n^m,$$

para todo $n \in N$.

Luego,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n (\lambda_1 \alpha_n^1 x_n^1 + \ldots + \lambda_m \alpha_n^m x_n^m)| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n^1| + \ldots + \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n^m| \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1,$$

lo que implica que $u = (u_n)$ pertenece a $(C(N(U)))^{\square}$.

TEOREMA 42. — Sea (E, F) un sistema dual de espacios de sucesiones y U un subconjunto de E. Se tiene

$$U^{\square\square} = \overline{C(N(U)) \cap E},$$

donde $\overline{C(N(U)) \cap E}$ representa la $\sigma(E, F)$-adherencia de $C(N(U)) \cap E$.

Demostración. — Puesto que

$$U \subset C(N(U)) \cap E \subset C(N(U))$$

se tiene fácilmente

$$(C(N(U)))^{\square} \subset (C(N(U)) \cap E)^{\square} \subset U^{\square}.$$

de lo que se deduce, teniendo en cuenta que en virtud del lema 16 $U^{\square} = (C(N(U)))^{\square}$.

$$U^{\square} = (C(N(U)) \cap E)^{\square};$$

y por ser $C(N(U)) \cap E$ normal en E, por el teorema 41, se tiene

$$U^{\square} = (C(N(U)) \cap E)^{0}.$$

Puesto que por el teorema 39, $U^{\square}$ es normal en F, aplicando nuevamente el teorema 41, se tiene

$$U^{\square\square} = (C(N(U)) \cap E)^{0}.$$

Luego, como $C(N(U)) \cap E$ es absolutamente convexo, se verifica

$$U^{\square\square} = \overline{C(N(U)) \cap E}$$

TEOREMA 43. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones que contiene φ y tal que $(E[\mathcal{T}])' \subset E^{x}$, siendo $\mathcal{T}$ más fina que la topología de la convergencia por coordenadas. La topología sólida asociada $S_{\mathcal{T}}$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los polares normales en $E_{\mathcal{T}}^{+}$ de los $\mathcal{T}$-entornos de cero.

Demostración. — Los conjuntos $C(N(U)) \cap E$, para U $\mathcal{T}$-entorno de cero, forman base de entornos de cero de la topología $S_{\mathcal{T}}$.

Si U es un $\mathcal{T}$-entorno de cero, a partir de los teoremas 39, 41 y 42, se obtiene

$$U^{\square 0} = U^{\square\square} = \overline{C(N(U)) \cap E},$$

donde $\overline{C(N(U)) \cap E}$ es la $\sigma(E, E^{+}_{\mathcal{T}})$-adherencia de $C(N(U)) \cap E$.

El resultado se obtiene del hecho de ser, en virtud del corolario del teorema 36, $(E[S_{\mathcal{T}}])' = E^{+}_{\mathcal{T}}$.

El siguiente teorema nos proporciona una representación del espacio $E^{+}_{\mathcal{T}}$.

TEOREMA 44. — Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo de sucesiones y sea $\mathcal{U}$ una base de $\mathcal{T}$-entornos de cero en E. Se tiene

$$E^{+}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} U^{\square},$$

donde los polares normales se consideran en E^{x}.

Demostración. — Sea $U \in \mathcal{U}$ y sea $u = (u_n)$ un elemento de E^{x} tal que $u \in U^{\square}$. Se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \leqslant 1$$

para todo $x = (x_n) \in U$, lo que implica que la seminorma p_u es $\mathcal{T}$-continua, y por tanto $u \in E^{+}_{\mathcal{T}}$.

Luego,

$$\bigcup_{u \in \mathcal{U}} U^{\square} \subset E^{+}_{\mathcal{T}}.$$

Por otra parte, si $u = (u_n) \in E^{+}_{\mathcal{T}}$, la seminorma p_u es $\mathcal{T}$-continua. Existe, pues, un $\mathcal{T}$-entorno de cero de la base tal que

$$p_u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \leqslant 1$$

para todo $x = (x_n) \in U$. Luego, $u \in U^{\square}$ y por tanto

$$E^{+}_{\mathcal{T}} = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} U^{\square}.$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] BOURBAKI, N. *Eléménts de mathematique. Livre V: Espaces vectoriels* topologiques. Actualités Sci. Ind. n.º 1189, 1229. París (1966, 1967).

[2] CERDA, J.L. *Dualidad de Köthe y funciones analíticas.* Collectanea Mathematica, Vol. XXII, 157-191. Barcelona (1971).

[3] COOPER, J.L.B. *Coordinated linear spaces.* Proc. London Math. Soc. (3), 3, 305-327. (1953).

[4] CROFTS, G. *Concerning perfect Fréchet spaces and diagonal transformations.* Math. Ann. 182, 67-76. (1969).

[5] DIEUDONNE, J. *Sur les espaces de Köthe.* J. Analyse Math. 1, 81-115. (1951).

[6] DUBINSKY, E. *Perfect Fréchet spaces.* Math. Ann. 174. 186-194. (1967).

[7] FREMLIN, D. H. *Abstract Köthe spaces I.* Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 653-660. (1967).

[8] FREMLIN, D. H. *Abstract Köthe spaces II.* Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 951-956. (1967).

[9] FREMLIN, D. H. *Abstract Köthe spaces III.* Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 957-962. (1967).

[10] GARLING, D.J.H. *On symmetric sequence spaces.* Proc. London Math. Soc. (3), 16, 85-106. (1966).

[11] GARLING, D.J.H. *On topological sequence spaces.* Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 997-1019. (1967).

[12] GARLING, D.J.H. *The β-and γ-duality of sequence spaces.* Proc. Camb. Phil. Soc. 63, 963-981. (1967).

[13] GREGORY, D.A. *Some basic properties of vector sequence spaces* J. reine. angew. Math. 237, 26-38. (1969).

[14] KOMURA, T. - KOMURA, Y. *Sur les espaces parfaits de suites et leurs généralisations.* J. Math. Soc. Japan 15, 319-338. (1963).

[15] KÖTHE, G. *Neubegründung der Theorie der vollkommenen Raüme.* Math. Nachr. 4, 70-80. (1951).

[16] KÖTHE, G. *Topological vector spaces I.* Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften B. 159. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York. (1969).

[17] TORT, M. *Consideraciones sobre la topología normal en los espacios de Köthe.* 203-216. Actas de las I Jornadas Matemáticas Luso-Españolas. (1973).