CONTRIBUCIÓN AL ESTUDIO DE LA TEORÍA ERGÓDICA DE PROCESOS ALEATORIOS CON VALORES EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

por

EDUARD BONET

ABSTRACT

Let $\{X_n\}$ *be a symmetric random process and let* $f(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots)$ *be an integrable mapping* $f: R^N \to R$ *then the symmetrized of order n of f,* $S_n f$ [2,1], *converges a. e. to* $\hat{f}$ [2,2].

This generalization of the ergodic theorem for symetric process led us to study processes not necessarily symmetric, taking values in a compact metric y space and such that $f: Y^N \to R$ *is continuous.*

The main results are:

— *If, for a given P on* Y^N, $S_n f \to \hat{f}$ *P a.e., then the symmetrized of order n of P,* $S_n^* P$ [3,1], *coverges weakly to some symmetric probability* $\hat{P}$ [3,3].

A poin $y \in Y^n$ *belongs to* $C = \{y / y \in Y^N$, *lim* $S_n f(y)$ *exists for eacy* $f \in C(Y^N)\}$ [3,4], *if and only if* $S_n P_y$ *coverges weakly to some* $\hat{P}$, P_y *being the unit probability at y.* [3,4].

When Y is a finite set we show:

— $y \in C$ *iff the frequency of every state in the period* T_n [4,1] *converges.*

— *The sets C and* $\bar{D} = C$ *are dense in* Y^N.

— P_y *is an independent probability on* Y^N.

— *The transformation of symmetrization led us to the result that the only symmetric probabilities which verify Savage's zero-one law are the independent symmetric probabilities.*

KEY WORDS AND PHRASES.—

Ergodic Theory, Martingales, Savage's zero-one law, strong law of large numbers, symmetric random processes, weak convergence of measures on compact metric spaces.

INTRODUCCIÓN:

Una temática importante en el estudio de *las leyes fuertes de los grandes números* es la generalización del *teorema de Kolmogorov* a los procesos o *sucesiones simétricas de variables aleatorias;* es decir, sucesiones $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ cuya distribución de probabilidad es invariante por las substituciones de N con soporte finito, propiedad que equivale a la simetría de todas las funciones de distribución $F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

La aplicación de *la teoría de las martingalas,* y en particular del *teorema de convergencia de Doob,* al problema indicado, ha conducido al *teorema ergódico de las sucesiones simétricas.* «Si $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ es una sucesión

Received, nov. 1974.

simétrica de variables aleatorias y si $f\colon R \to R$ es integrable según la probabilidad inducida por estas variables, entonces

$$f_n = \frac{f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n)}{n}$$

converge casi seguramente hacia una función $\widehat{f}$.» Si las variables son independientes y semejantes se obtiene, como caso particular, el teorema de Kolmogorov.

La constancia casi segura de la función límite $\widehat{f}$ es de especial interés en toda la teoría y esta propiedad se demuestra, para sucesiones de variables independientes, a partir de *la ley del cero-uno de Kolmogorov;* «Si $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes, entonces los sucesos asintóticos tienen probabilidad cero o probabilidad uno». La relación de este resultado con las propiedades de simetría ha sido señalada por *la ley del cero-uno de Savage:* «Si $\{X_n\}$ es una sucesión de variables aleatorias semejantes e independientes, entonces todo conjunto de la σ-álgebra de los conjuntos simétricos — la cual contiene la σ-álgebra de los conjuntos asintóticos — tiene probabilidad cero o probabilidad uno».

En este trabajo se parte de funciones que dependen de todas las variables de la sucesión, $f(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$, es decir de aplicaciones de R^N en R y se introduce $S_n f$ [2, 1], que es la simetrizada de orden n de f y que generaliza la fórmula clásica de f_n dada anteriormente. Las propiedades de $S_n f$ ponen de manifiesto el papel desempeñado en este problema por los grupos finitos de substituciones y permiten obtener una generalización del teorema ergódico de las sucesiones simétricas [2, 2].

A partir de este resultado se plantea el estudio de la convergencia casi segura de $S_n f$ en *la hipótesis de procesos no necesariamente simétricos.* Este objetivo, fuera del marco y de las técnicas de las transformaciones que conservan la medida, conduce a considerar procesos cuyos valores pertenecen a un espacio métrico compacto (Y, d). En este planteamiento, la estructura topológica permite restringir razonablemente el estudio de la convergencia de $S_n f$ al caso de las funciones contínuas $f\colon Y^N \to R$ y la condición de espacio métrico permite introducir la convergencia débil de medidas.

Para desarrollar estas ideas se introduce $S_n^* \mu$ [3, 1], que es la simetrizada de orden n de la medida μ y se demuestra que la convergencia casi segura, según la probabilidad P, de $S_n f$, para toda función continua, implica la convergencia débil de $S_n^* P$ hacia una probabilidad simétrica $\widehat{P}$ [3, 3]. Así, en este caso, a un proceso no simétrico se le asocia otro que posee la probabilidad de simetría. Se introduce *el conjunto de convergencia* C, o conjunto de los puntos y de Y^N tales que $S_n f(y)$ es convergente para todas las funciones continuas [3, 4] y se demuestra una condición necesaria y suficiente de pertenencia a C en términos de la convergencia débil de la sucesión $S_n^* P_y$; siendo P_y la distribución de probabilidad unidad en el punto y. [3, 4].

Finalmente se estudia el conjunto de convergencia C cuando Y es un conjunto finito; se obtiene una condición necesaria y suficiente de pertenencia a C en términos del tiempo medio de pertenencia del proceso en cada uno de sus estados [4, 1] y se demuestra que los únicos procesos simétricos que verifican la ley del cero-uno de Savage son los procesos independientes [4,3].

1.— DEFINICIONES Y PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

1.1.— *Procesos aleatorios con valores en espacios métricos compactos.*

El estudio de una sucesión aleatoria con valores en un espacio métrico compacto (Y, d), al cual se asocia la σ-álgebra de Borel $\mathcal{A}$ generada por su estructura topológica, es equivalente al estudio de una probabilidad P definida en $(\mathcal{Y}; \mathfrak{A})$ donde $\mathcal{Y}$ es el espacio $Y^N = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n \times \ldots$, cuyos elementos serán representados por $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$ y $\mathfrak{A} = \mathcal{A}^N$ es la σ-álgebra de Borel asociada al espacio topológico $\mathcal{Y}$.

Tales procesos serán representados por $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$, notación que implica una identificación de las variables aleatorias con las componentes del producto cartesiano $Y^N = Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n \times \ldots$ Sin embargo, no es correcto hablar de proceso sin una probabilidad en Y^N y un cambio de probabilidad implica un cambio de proceso.

Recordemos que $\mathcal{Y}$ es compacto, que está metrizado por la distancia $D(y, y') = \sum_{i=1}^{\infty} d(y_i, y_i')/2^i$, y que el espacio $C(\mathcal{Y})$ de las funciones reales continuas $f\colon \mathcal{Y} \to R$ es un espacio normado separable cuyo dual topológico es el espacio $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ de las medidas finitas μ definidas en $(\mathcal{Y}, \mathfrak{A})$, según la fórmula de dualidad $<\mu, f> = \int_{\mathcal{Y}} f\, d\mu$.

1.2.— *Grupos de substituciones.*

Una substitución σ con soporte finito de orden n, en el conjunto de los números naturales N, es una aplicación biyectiva $\sigma : N \to N$ tal que $\sigma(i) = i$ para todo $i > n$.

El conjunto de substituciones con soporte de orden n constituye un grupo $\mathcal{G}_n$. Variando n obtenemos $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{G}_n \subset \ldots$ y el grupo de substituciones con soporte finito es $\mathcal{G} = \cup\, \mathcal{G}_n$.

Substituciones de coordenadas:

Una substitución σ induce una transformación $s_\sigma : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$, que llamaremos substitución de coordenadas, caracterizada por la igualdad siguiente:

$$\text{Si } y \in \mathcal{Y}, (y : N \to Y), \text{ entonces } s_\sigma(y) = y\, \sigma^{-1}.$$

La imagen de los elementos σ del grupo $\mathcal{G}_n$ por la aplicación $\sigma \to s_\sigma$ constituye un grupo isomorfo a $\mathcal{G}_n$, que será también representado por $\mathcal{G}_n$. Cada transformación s_σ es un isomorfismo de Y^N pero en general no es una isometría de dicho espacio.

Substituciones de funciones:

La transformación s induce una transformación $T_s : C(\mathcal{Y}) \to C(\mathcal{Y})$ definida por la igualdad siguiente:

$$\text{Si } f \in C(\mathcal{Y}), \text{ entonces } T_s(f) = f.s.$$

El conjunto de transformaciones correspondientes a los elementos del grupo $\mathcal{G}_n$ por la aplicación $s \to T_s$ forman un grupo $\mathcal{G}'_n$ antiisomorfo a $\mathcal{G}_n$.
Una función es simétrica de orden n, o simétrica en las n primeras variables, si es invariante por el grupo $\mathcal{G}'_n$. *Las funciones simétricas* son las funciones invariantes por el grupo $\mathcal{G}' = \cup\, \mathcal{G}'_n$

Substituciones de conjuntos.

Análogamente a las transformaciones T_s de funciones podemos definir las substituciones de conjuntos, que anotaremos también por T_s, a traves de la transformación de su función indicatriz:

$$T_s(A) = A' \quad \text{si} \quad 1_{A'} = T_s(1_A).$$

Los conjuntos de la σ-álgebra $\mathcal{A}$ invariantes por el grupo $\mathcal{G}'_n$ forman una σ-álgebra $\mathcal{S}_n$. Variando n obtenemos $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \dots \supset \mathcal{S}_n \supset \dots$ y $\mathcal{S} = \cap\, \mathcal{S}_n$ es la σ-álgebra de los conjuntos simétricos, o conjuntos invariantes por $\mathcal{G}'$.
Una condición necesaria y suficiente para que una función medible sea simétrica de orden n es que sea medible según $\mathcal{S}_n$. Una condición necesaria y suficiente para que una función medible sea simétrica es que sea medible según $\mathcal{S}$
En el caso de un proceso aleatorio, es decir cuando se tenga una probabilidad P en $(\mathcal{Y}; \mathcal{A})$ los conceptos anteriores se definiran «a menos de un conjunto de medida P nula».

Substituciones de medidas.

T_s induce una aplicación $T_s^* : \mathcal{M}(\mathcal{Y}) \to \mathcal{M}(\mathcal{Y})$, que llamaremos substitución de medidas y que se caracteriza por la siguiente definición:

$$(T_s^*(\mu))\,(A) = \mu[T_s(A)] \text{ o equivalentemente } T_s^*(\mu) = \mu \cdot T_s.$$

El conjunto de transformaciones T_s^* correspondientes a los elementos del grupo $\mathcal{G}_n$ por la aplicación $s \to T_s^*$, constituyen un grupo isomorfo a $\mathcal{G}'_n$ que representaremos por $\mathcal{G}_n^*$.
Una medida es simétrica de orden n si es invariante por el grupo $\mathcal{G}_n^*$ y esta propiedad equivale a la simetría de la medida inducida en el producto cartesiano finito $Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n$. *Una medida es simétrica* si es invariante por el grupo $\mathcal{G}^* = U\, \mathcal{G}_n^*$ *Un proceso simétrico* induce una medida simétrica en $(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$

Propiedad: T_s^* es la transformación conjugada o dual de T_s; es decir se verifica

$$\int_{\mathcal{Y}} T_s(f) \cdot d\mu = \int_{\mathcal{Y}} f \cdot dT_s^*(\mu).$$

II. — SIMETRIZACIÓN DE FUNCIONES.

2.1. — *Simetrizada de orden n de una función f.*

Si $f : \mathcal{Y} \to R$, obtendremos una función simétrica respecto de las n primeras variables si tomamos el promedio de las funciones obtenidas a partir de f por la aplicación de las transformaciones del grupo $\mathcal{G}'_n$, el cual tiene $n!$ elementos:

Definición:

Si $f \in C(\mathcal{Y})$, la simetrizada de orden n es

$$S_n f = \frac{\sum_{s \in \mathcal{G}'_n} T_s(f)}{n!}$$

Es inmediato comprobar que $S_n f$ es continua y que $S_n f = f$ si y solo si f es medible $\mathcal{S}_n$.

Si f es una función que depende sólo de una coordenada, es decir $f(Y_k)$, entonces, para $n > k$, se verifica

$$S_n f = \frac{f(Y_1) + f(Y_2) + \dots + f(Y_n)}{n}$$

En efecto, existen $(n-1)!$ substituciones que transforman $f(Y_i)$ en $f(Y_j)$.

Análogamente, si f depende sólo de dos coordenadas se obtendrá:

$S_n f = \sum_{i \neq j} f(Y_i, Y_j) / n(n-1)$, y estas fórmulas se generalizan fácilmente.

2.2. — *Propiedades ergódicas.*

Propiedades ergódicas de los procesos reales simétricos.

Si $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ es un proceso real simétrico que induce una probabilidad P en (R^N, β^N) y si $g(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ es una aplicación de R^N en R medible e integrable según P, entonces $S_n g$ converge casi P-seguramente hacia una aplicación $\widehat{g} : R^N \to R$.

Demostración:

1. — Estableceremos que $S_n g = E[g / \mathcal{S}_n]$. Si $A \in \mathcal{S}_n$ y si $s \in G_n$, la invariancia de A por T_s y la de P por T_s^* implica

$$\int_A T_s(g)\, dP = \int_A g\, dP$$

y esta igualdad conduce a

$$\int_A S_n g\, dP = \int_A g\, dP, \qquad \text{para todo} \quad A \in S_n,$$

fórmula que equivale a la proposición enunciada.

2. — $E[g /_1 \mathcal{S}_1],\ E[g / \mathcal{S}_2],\ \ldots,\ E[g / S\, \mathcal{S}_n],\ \ldots$

es una martingala respecto a la sucesión decreciente de σ-álgebras $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{S}_n \supset \ldots$ La aplicación del teorema de Doob a este tipo de martingalas conduce inmediatamente a la convergencia casi segura de $S_n g$.

Observemos que la función límite $\widehat{g}$, definida casi P-seguramente, es simétrica y que, en el caso particular que g depende sólo de una coordenada, obtenemos el teorema ergódico de las sucesiones simétricas.

Propiedad ergódica de los procesos simétricos con valores en espacios métricos compactos:

Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ es un proceso simétrico con valores en un espacio métrico compacto (Y, d) que induce un a probabilidad P en $(\mathcal{Y}; \mathcal{A})$ y si $f \in C(\mathcal{Y})$, entonces

1. — $S_n f \longrightarrow \widehat{f}$ casi P-seguramente.

2. — $S_n f \xrightarrow{L^p} \widehat{f}$, para todo $1 \leqslant p < \infty$.

En efecto: Por ser f acotada es integrable y se verifica la convergencia casi segura. Por otra parte $S_n f$ es equiacotada, por lo tanto es equiintegrable y la convergencia casi segura implica la convergencia en norma p.

Observemos que la función límite $\widehat{f}$ es simétrica, pero no es necesariamente continua.

III. — SIMETRIZACIÓN DE MEDIDAS.

3.1. — *Simetrización de orden n de una medida* μ.

DEFINICIÓN:

La simetrizada de orden n de una medida μ es

$$S_n^* \mu = \frac{\sum_{s \in \mathcal{G}_n} T_s^* \mu}{n!}$$

Propiedad:

S_n^* es la transformación dual de S_n, es decir se verifica

$$\int_{\mathcal{Y}} S_n f \, d\mu = \int_{\mathcal{Y}} f \, dS_n^* \mu.$$

3.2. — *Convergencia débil de medidas.*

Recordemos que una sucesión $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ de medidas definidas en un espacio métrico (Y, d) converge débilmente hacia μ, $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$, si se verifica

(1) $\int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu$ para toda función continua $f \in C(Y)$.

Demostraremos fácilmente que una sucesión de medidas positivas μ_n converge débilmente hacia μ si la condición (1) de la definición anterior se verifica para un conjunto de funciones continuas que contenga las constantes y que sea denso en $C(Y)$.

Esta propiedad nos ha permitido obtener una demostración muy simple, por aplicación del teorema de Stone-Weierstrass, del siguiente teorema:

Si μ_n y μ son medidas definidas en el producto cartesiano numerable $\mathcal{Y} = Y^N$, una condición necesaria y suficiente para que $\mu_n \xrightarrow{d} \mu$ es que se verifique la convergencia débil de las medidas inducidas en los productos cartesianos finitos $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$.

La propiedad «Si $\mathcal{Y}$ es un espacio métrico compacto, entonces toda sucesión de probabilidades P_n definidas en $\mathcal{Y}$ tiene una subsucesión que converge débilmente» se demuestra inmediatamente por las propiedades de la topología w^*(weak star topology) de $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$ como dual topológico de $C(\mathcal{Y})$.

Recordemos que la convergencia débil de μ_n hacia μ no implica la convergencia de $\mu_n(A) \to \mu(A)$ para todo conjunto de la σ-álgebra $\mathcal{A}$; pero dicha convergencia se verifica si $\mu[\partial A] = 0$, siendo ∂A la frontera del conjunto A.

3.3.— *Simetrización de una medida* μ.

TEOREMA.

Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ es un proceso con una probabilidad inducida P y si, para toda función $f \in C(\mathcal{Y})$ se verifica $S_n f \to \widehat{f}$ casi P-seguramente, entonces existe una probabilidad $\widehat{P}$ tal que $S_n^* P \xrightarrow{d} \widehat{P}$.

Demostración:

1.— $S_n \widehat{f} \to f$ casi seguramente implica $S_n f \to \widehat{f}$ en L^1 y por lo tanto $S_2 S_n f \, dP \to S_2 \widehat{f} \, dP$ para toda $f \in C(Y)$, formula que transformada por dualidad da finalmente la *propiedad* (*a*):

$$\int_{\mathcal{Y}} f \cdot dS_n^* P \to \int_{\mathcal{Y}} \widehat{f} \, dP \qquad \text{para toda } f \in C(\mathcal{Y}).$$

2.— La propiedad (*a*) demuestra que la sucesión $\int_{\mathcal{Y}} f \, dS_n^* P$, para toda $f \in C(\mathcal{Y})$ es una sucesión de Cauchy y este resultado, con la propiedad que $S_n^* P$ contiene una subsucesión débilmente convergente, permite demostrar el teorema.

PROPOSICIÓN:

$\widehat{P}$ es una medida simétrica.

Demostración:

Probaremos que $\widehat{P}$ es invariante para todo T_s^* de $\mathcal{G}$.

a.— Si $T_s^* \in \mathcal{G}_K$, como $S_n^* P$ es invariante por este grupo se obtiene $S_n^* P = T_s^* [S_n^* P]$ para todo $n \geqslant k$.
b.— Dado que $s : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ es una función continua se verifica:

$$S_n^* P \xrightarrow{d} \widehat{P} \quad \text{implica} \quad T_s^* [S_n^* P] \xrightarrow{d} T_s^* \widehat{P}$$

3.— Por las propiedades anteriores obtenemos

$$S_n^* P \xrightarrow{d} \widehat{P} \quad \text{y} \quad S_n^* P \xrightarrow{d} T_s^* \widehat{P}.$$

La unicidad del límite demuestra la igualdad buscada.

3.4.— *Conjunto de convergencia C.*

DEFINICIÓN:

$$C = \{y \mid y \in \mathcal{Y}\,;\ \text{existe lim. } S_n f(y),\ \text{para toda } f \in C(\mathcal{Y})\}.$$

C será llamado *el conjunto de convergencia* y su complemento se representará por D.

Para estudiar el conjunto C, a cada punto y del espacio $\mathcal{Y}$ le asociamos la probabilidad P_y, o probabilidad unitaria en el punto y.

TEOREMA:

Una condición necesaria y suficiente para que $y \in C$ es que la sucesión de probabilidades $S_n^* P_y$ sea débilmente convergente.

Demostración:

1.— Si $y \in C$, entonces $S_n f(y)$ converge, para toda $f \in C(\mathcal{Y})$; pero esta condición equivale a la convergencia casi segura de $S_n f$ respecto de P_y y por el teorema anterior se obtiene la convergencia débil de $S_n^* P_y$

2.— Si $S_n^* P_y \xrightarrow{d} \widehat{P}$, entonces $\int_y f \, dS_n^* P_y \to \int_y f \, d\widehat{P}$, para toda $f \in C(\mathcal{Y})$, y esta propiedad, transformada por la dualidad, implica

$$\int_y S_n f \, dP_y \to \int_y f \, d\widehat{P}, \quad \text{para toda } f \in C(\mathcal{Y}).$$

Pero como P_y es una probabilidad puntual $\int S_n f \, dP_y = S_n f(y)$ y, por lo tanto, $S_n f(y)$ es convergente para toda función continua.

PROPIEDAD:

El conjunto C es medible y simétrico.

Dado que $C(y)$ es separable se puede obtener C como intersección numerable de conjuntos medibles y simétricos.

3.5.— *Transformación de simetrización.*

DEFINICIÓN:

Llamaremos $\mathcal{M}_C(\mathcal{Y})$ al conjunto de las medidas finitas μ de $(\mathcal{Y}, \mathcal{A})$ para las cuales $S_n f$ converge casi μ-seguramente, para todas las funciones continuas.

De esta definición se deduce inmediatamente que «una condición necesaria y suficiente para que una medida positiva μ pertenezca a $\mathcal{M}_C(\mathcal{Y})$ es que $\mu(D) = 0$» y también que «el conjunto $\mathcal{M}_C(\mathcal{Y})$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\mathcal{Y})$, cerrado respecto de la topología de la norma.»

DEFINICIÓN:

Si a cada $\mu \in \mathcal{M}_C(\mathcal{Y})$ le hacemos corresponder $\widehat{\mu} = \lim. S_n^* \mu$ queda establecida un a aplicación S: $\mathcal{M}_C(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathcal{M}_C(\mathcal{Y})$, que llamaremos *aplicación de simetrización.*

Si dotamos el espacio inicial con la topología de la convergencia uniforme y el espacio imagen de la topologia de la convergencia débil, entonces S es una aplicación continua.

IV.— ESTUDIO DE LA CONVERGENCIA Y SIMETRIZACIÓN SI Y ES UN ESPACIO FINITO.

4.1.— *Caracterización del conjunto de convergencia C.*

Un conjunto finito $Y = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\}$ será identificado a un espacio métrico compacto; sus elementos, que se designaran genericamente por α, serán interpretados como los estados de un sistema; y los puntos $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$ de Y^N constituiran las trayectorias de un proceso.

Definición:

Dada una trayectoria $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...)$, llamaremos *frecuencia absoluta del estado α en el periodo $T_n = \{1, 2, ..., n\}$* — o también *tiempo de permanencia en α* — al número $K_n(\alpha, y)$, o $K_n(\alpha)$, de veces que la coordenada α aparece en la secuencia finita $(y_1, y_2, ..., y_n)$. Dividiendo por n obtendremos la frecuencia relativa del estado α o tiempo medio de permanencia en α: $k_n(\alpha, y) = K_n(\alpha, y) | n$.

Dado un elemento α, llamaremos *cilindro de base $\{\alpha\}$ en el espacio Y_i* al conjunto $A_i(\alpha) = \{y | y \in \mathcal{Y}, y_i = \alpha\}$. Análogamente, el cilindro de base $\{\alpha\} \times \{\alpha'\}$ en el espacio $Y_i \times Y_j$ es $A_{i,j}(\alpha, \alpha') = \{y | y \in \mathcal{Y}; y_i = \alpha, y_j = \alpha'\}$; $A_{i,j}(\alpha, \alpha') = A_i(\alpha) \cap A_j(\alpha')$ y esta definición se extiende a cualquier número finito de elementos en la base.

Propiedad:

El conjunto de cilindros $A_1(\alpha), A_2(\alpha), ..., A_n(\alpha)$ contituye la órbita de uno cual quiera de ellos por el grupo $\mathcal{G}'_n$. Existen exactamente $(n - 1)!$ elementos de $\mathcal{G}'_n$ que transforman $A_i(\alpha)$ en $A_j(\alpha)$ y, por lo tanto,

$$S_n^* \mu [A_1(\alpha)] = \frac{\mu [A_1(\alpha)] + \mu [A_2(\alpha)] + ... + \mu [A_n(\alpha)]}{n}.$$

Análogamente, $A_{i,j}(\alpha, \alpha')$, para todo $i = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$; $i \neq j$; es la orbita de $A_{1,2}(\alpha, \alpha')$ por el grupo $\mathcal{G}'_n$ Existen exactamente $(n - 2)!$ elementos de $\mathcal{G}'_n$ que transforman $A_{i,j}(\alpha, \alpha')$ en $A_{i',j'}(\alpha, \alpha')$ y por lo tanto

$$S_n^* \mu [A_{1,2}(\alpha, \alpha')] = \frac{\sum_{i \neq j} \mu [A_{i,j}(\alpha, \alpha')]}{n(n - 1)}.$$

Observemos que si P_y es la probabilidad puntual asociada al punto y, entonces $P_y [A_i(\alpha)]$ es igual a 1 si $y_i = \alpha$ e igual a 0 si $y_i \neq \alpha$. Analogamente, $P_y[A_{i,j}(\alpha, \alpha')]$ es 1 si $y_i = \alpha, y_j$ y $= a'$; y es 0 en los demás casos.

TEOREMA.

Una condición necesaria y suficiente para que $y \in C$ es que exista el límite de $k_n(\alpha, y)$ para todo $\alpha \in Y$. Es decir

$$k_n(\alpha, y) \to k(\alpha, y).$$

Demostración:

1.— Si $y \in C$, entonces $k_n(\alpha, y)$ debe converger. En efecto, $A_1(\alpha)$ es un conjunto abierto y cerrado ya que $\{\alpha\}$ es abierto y cerrado en Y_1. La frontera $\partial A_1(\alpha) = \phi$ y por lo tanto $S_n^* P_y \xrightarrow{d} \widehat{P}$ implica que

$$S_n^* P_y[A_1(\alpha)] = \frac{K(\alpha, y)}{n} = k_n(\alpha, y) \to \widehat{P}[A_1(\alpha)].$$

2.— La convergencia de $k_n(\alpha, y)$, para todo α, equivale a la convergencia débil de las medidas inducidas por $S_n^* P_y$ en los espacios Y_i y si demostramos la convergencia débil de las medidas inducidas en los productos cartesianos finitos $Y_1 \times Y_2 \times ... \times Y_n$, quedará probada la conción suficiente:

Si $\alpha \neq \alpha'$,

$$S_n^* P[A_{1,2}(\alpha, \alpha')] = \frac{K_n(\alpha) \cdot K_n(\alpha') \cdot (n - 2)!}{n!} = \frac{K_n(\alpha)}{n} \cdot \frac{K_n(\alpha')}{(n - 1)} \to k(\alpha) \cdot k(\alpha').$$

Esta demostración, con ligeras modificaciones, se extiende al caso $\alpha = \alpha'$, y se generaliza del producto $Y_1 \times Y_2$ a cualquier producto cartesiano finito. La fórmula $k(\alpha) \cdot k(\alpha')$ obtenida en el límite anterior permite demostrar inmediatamente el

COROLARIO.

Si $y \in C$, entonces $\widehat{P}_y = \lim. S_n^* P_y$ es una probabilidad independiente, es decir existe una probabilidad k: $k(\alpha_1), k(\alpha_2), \ldots, k(\alpha_r)$; en el espacio Y de modo que $\widehat{P}_y$ en $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n$ se obtiene como producto de k en cada Y_i.

Observemos que si Y es un conjunto de dos puntos y adoptamos la representación $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$, entonces un punto cualquiera de Y^N, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, que es una sucesión de ceros y unos, pertenece a C si y solo si la sucesión $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ converge en el sentido de Cesaro, es decir, si y solo si $(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)/n$ es convergente. Así, por ejemplo, el punto $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ pertenece a C la probabilidad que $\widehat{P}_y$ induce en Y es la uniforme: $\widehat{P}_y(\{0\}) = 1/2$ y $\widehat{P}_y(\{1\}) = 1/2$.

Podemos disponer los ceros y unos en bloques $(1, 0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1, \ldots)$, por ejemplo bloques de 1, 10, 100, ... elementos, de modo que el promedio de ceros y unos forme una sucesión oscilante.

Los teoremas ergódicos permiten demostrar que C *no es el conjunto vacío*, ahora acabamos de establecer que D *no es el conjunto vacío*.

TEOREMA.

Los conjuntos C y D son densos en Y^N.

Demostración:

Recordemos que, dado un $\varepsilon > 0$, existe un n tal que, si los puntos y e y' de Y^N tienen iguales sus primeras n coordenadas, entonces $D(y, y') < \varepsilon$. Dado un punto cualquiera y de Y^N y un $\varepsilon > 0$, podemos obtener, por reorganización de coordenadas, un punto y_1 de C y un punto y_2 de D, tales que $D(y, y_1) < \varepsilon$ y $D(y, y_2) < \varepsilon$.

4.2. — *Estudio de la órbita de un punto y de* $\widehat{P}_y$.

Se demuestra fácilmente las proposiciones siguientes:

Propiedad 1.— Si Δ es la diagonal de Y^N y si $y \in \Delta$, entonces $y \in C$ y $\widehat{P}_y$ es la probabilidad puntual en el punto y.

Basta observar que Δ es el conjunto de puntos invariantes por $\mathcal{G}$.

El punto $y = (1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ nos facilita un ejemplo de un elemento que no pertenece a Δ y cuya $\widehat{P}_y$ es la probabilidad puntual en $(0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in \Delta$.

Propiedad 2.— Si $y \in C$ y si $y' \notin \Delta$; entonces $\widehat{P}_y[\{y'\}] = 0$.

En efecto, si $y' \notin \Delta$, entonces y' tiene por lo menos dos coordenadas distintas y la órbita de dicho punto por el grupo $\mathcal{G}$ es un conjunto numerable. La invariancia de $\widehat{P}_y$ por el grupo $\mathcal{G}$ y la σ-aditividad de la probabilidad implican la proposición enunciada.

Observemos que la órbita de y por $\mathcal{G}_n$ es un conjunto finito y que $S_n^* P_y$ es la distribución equiprobable en dicho conjunto.

Propiedad 3.— Si $y \in C$ y $y' \in \Delta$; entonces $\widehat{P}_y[\{y'\}]$ es igual a cero o es igual a uno.

En efecto, basta aplicar que $\widehat{P}_y$ es una probabilidad independiente.

Propiedad 4.— Si $y \in C$, entonces $\widehat{P}_y$ es una probabilidad puntual en un elemento de la diagonal principal o es una medida difusa.

Propiedad 5.— Si $y \notin \Delta$, entonces la órbita de y por $\mathcal{G}$ no es un conjunto cerrado de Y^N.

4.3.— *Estudio de la transformación de simetrización.*

DEFINICIÓN.

Sean y e y' dos elementos de C, diremos que $y \sim y'$ si $\widehat{P}_y = \widehat{P}_{y'}$. Esta relación de equivalencia es simplemente la inducida por la aplicación de simetrización,

$$y \longrightarrow P_y \xrightarrow{S} \widehat{P}_y,$$

y dado que $\widehat{P}_y$ queda determinada por la probabilidad $k(\alpha) = k(\alpha'_1)$, $k(\alpha'_2)$, ..., $k(\alpha_n)$ representaremos las clases de equivalencia por $C_{k(\alpha)}$.

Propiedad.

La transformación de simetrización S: $\mathcal{M}_C(\mathcal{Y}) \to \mathcal{M}_C(\mathcal{Y})$, no es continua débilmente.

En efecto, para concretar mejor las ideas desarrollaremos el ejemplo siguiente:

Dado el espacio $Y = \{0, 1\}$, la sucesión de puntos

$$y_1 = (0,1,0,1,0,1, ...); \; y_2 = (0,0,1,0,1,0,1, ...)$$

$$y_3 = (0,0,0,1,0,1,0,1, ...), ..., y_n = (0, 0, ..., 0, 1,0,1,0,1 ...) ...$$

converge en $\mathcal{Y}$ hacia $y = (0; 0, 0, ..., 0, ...)$. Por lo tanto $P_{y_n} \to P_y$ débilmente y sin embargo $\widehat{P}_{y_n}$ no converge débilmente hacia $\widehat{P}_y$, ya que $\widehat{P}_{y_n}$ es constante, $k(\{0\}) = 1/2$, $k(\{1\}) = 1/2$, y $\widehat{P}_y$ verifica $k(\{0\}) = 1$ y $k(\{1\}) = 0$.

Esta demostración establece también la siguiente

Propiedad:

Las clases de equivalencia $C_{k(\alpha)}$ no son cerradas débilmente.

TEOREMA.

Una condición necesaria y suficiente para que $y \sim y'$ es que se verifique

$$\lim. S_n f(y) = \lim. S_n f(y'), \text{ para toda } f \in C(\mathcal{Y}).$$

La demostración es inmediata si recordamos que

$$\int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P}_y = \int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P}_{y'}, \text{ para toda } f \in C(\mathcal{Y}), \text{ implica } \widehat{P}_y = \widehat{P}_{y'}.$$

DEFINICIÓN.

Sea P una medida en $(\mathcal{Y};\ \mathcal{A})$; diremos que P es ergódica, respecto del grupo $\mathcal{G}'$, si, para toda $f \in C(\mathcal{Y})$, se verifica que el límite de $S_n f(y) = \widehat{f}(y)$ es casi P-seguramente constante.

Analogamente, diremos que un proceso $Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$ es ergódico, si la probabilidad P que induce es una medida ergódica.

Las propiedades enunciadas anteriormente permiten demostrar que P es ergódica si y solo si existe una clase de equivalencia $C_{k(\alpha)}$ tal que $P[C_{k(\alpha)}] = 1$.

Análogamente, un proceso $Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$ es ergódico si y solo si el tiempo medio $k_n(\alpha; y)$ de permanencia en cada estado α tiende, para casi todas las trayectorias y, a un límite $k(\alpha; y)$ que no depende de y.

TEOREMA.

Si P es ergódica, entonces $\widehat{P}$ es una probabilidad independiente.

Demostración:

1.— Si $y_0 \in C_{k(\alpha)}$, entonces $\lim. S_n f(y_0) = f(y_0) = l = \int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P}_{y_0}$.

2.— Para toda $f \in C(\mathcal{Y})$ tenemos $\lim. S_n f(y) = l$, casi P-seguramente, por lo tanto $\int_{\mathcal{Y}} f(y)\, d\widehat{P} = l$ y

$$\int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P} = \int_{\mathcal{Y}} \widehat{f}\, dP = l = \int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P}_{y_0}.$$

La igualdad $\int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P} = \int_{\mathcal{Y}} f\, d\widehat{P}_{y_0}$, para todo $f \in C(\mathcal{Y})$ implica $\widehat{P} = \widehat{P}_{y_0}$ y sabemos ya que esta última medida es independiente.

COROLARIO.

Una condición necesaria y suficiente para que una medida simétrica P sea ergódica es que sea independiente.

En efecto, basta observar que toda medida simétrica P coincide con $\widehat{P}$.

Este enunciado, a su vez, implica la siguiente

PROPIEDAD.

Las únicas medidas simétricas que verifican la ley del cero-uno de Savage son las independientes.

En efecto, si P no es independiente, debe existir una función continua f_0 tal que f_0 no sea casi P-seguramente contante y por lo tanto en la σ-álgebra S, debe existir algún conjunto de probabilidad distinto de cero y de uno.

BIBLIOGRAFÍA

PATRICK BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*. J. Willey, New York, 1968.

N.A., FRIEDMAN, *Introduction to ergodic theory*, Van Nostrand, New York, 1970.

EDWIN HEWITT AND LEONARD SAVAGE, *Symetric Measures on Cartesian Products* 1955.

KINGMAN, *An Ergodic Theorem*, London Math. Soc., 1969.

K. KRICKEBERG, *Teoria de la Probabilidad*, Trad. Teide, Barcelona, 1973.

J. NEVEU, *Bases Mathematiques du Calcul des Probabilités*, Masson et Cie, Paris 1964.

J. NEVEU, *Martingales a temps discret*, Masson et Cie., Paris 1972.

D. NUALART, *Martingalas y Derivación*, Tesina, Facultad de Ciencias, Barcelona 1972.

K. PETERSEN, *Introduction to Ergodic Theory*, Chapel Hill, North Carolina, 1971.

J. G. SINAI, *Theory of Dynamical Systems, Part 1, Ergodic Theory*, Matematiks Institut, Aarhus Universitet, 1970.

Agradezco al Doctor D. FRANCISCO de A. SALES VALLES la dirección de este trabajo. Las sugerencias y revisión de D. DAVID NUALART me permitieron realizar modificaciones esenciales.

Gracias a una beca de la U.N.E.S.C.O., del programa C.E.N.I.D.E. para la reforma de la enseñanza en España, pude permanecer, bajo el patrocinio del Doctor DAVID CARDUS, durante el curso 1973-74, en el Departament of Mathematical Sciences, de la Universidad de Rice. Agradezco al Doctor WILLIAM WEECH, de dicha Universidad, la valiosa sugerencia de limitar mi estudio a los espacios métricos compactos y de utilizar la convergencia débil.