Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fis.Nat. (Esp)
Vol. 94, N.º 3, pp 347-355, 2000
Monográfico: Contribuciones al estudio algorítmico de problemas de moduli aritméticos

FORMAS CUADRÁTICAS TERNARIAS E INMERSIONES MATRICIALES DE ÓRDENES CUADRÁTICOS

(orden cuadrático/orden matricial/forma cuadrática ternaria/grupo de unidades/inmersión/forma cuadrática binaria)

P. BAYER*, A. TRAVESA**

* Universitat de Barcelona, Facultat de Matemàtiques. Departament d'Àlgebra i Geometria. Gran Via de les Corts Catalanes, 585. E-08007 Barcelona (bayer@mat.ub.es)

** Universitat de Barcelona, Facultat de Matemàtiques. Departament d'Àlgebra i Geometria. Gran Via de les Corts Catalanes, 585. E-08007 Barcelona (travesa@mat.ub.es)

RESUMEN

Sean K un cuerpo cuadrático y $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ el álgebra de las matrices 2×2 de coeficientes racionales. En este artículo estudiamos el efecto de las inmersiones $K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ sobre órdenes $\mathcal{O}_\Delta$ de K, de discriminante Δ, y órdenes $\mathcal{O}$ de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$. Consideramos los conceptos de inmersiones enteras y optimales para una pareja $(\mathcal{O},\mathcal{O}_\Delta)$, y remitimos su existencia y clasificación al de ciertas representaciones de $-\Delta$ por una forma cuadrática ternaria asociada al orden $\mathcal{O}$. Clasificamos las inmersiones, principalmente, por medio del grupo $\Gamma(\mathcal{O})$, que es el grupo de unidades de norma uno del orden $\mathcal{O}$. En particular, demostramos que a cada $\Gamma(\mathcal{O})$-clase de inmersiones $K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ le corresponde una $\Gamma(\mathcal{O})$-clase de formas cuadráticas binarias de discriminante Δ y, en consecuencia, una órbita de puntos del semiplano superior complejo bajo la acción del grupo fuchsiano arimético $\Gamma(\mathcal{O})$.

ABSTRACT

Let K denote a quadratic field and $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ the algebra of the 2×2-matrices with rational coefficients. This paper is devoted to the study of embeddings $K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ in terms of orders $\mathcal{O}_\Delta$ of K, of discriminant Δ, and orders $\mathcal{O}$ of $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$. We consider those embeddings that are integral and optimal for a pair $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, and refer their existence and classification to representations of $-\Delta$ by some ternary quadratic form attached to the order $\mathcal{O}$. The embeddings are mainly classified by means of the group $\Gamma(\mathcal{O})$, given by the units of the order $\mathcal{O}$ whose norm is equal to one. In particular, we show that each $\Gamma(\mathcal{O})$-class of embeddings $K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ determines a $\Gamma(\mathcal{O})$-class of binary quadratic forms of discriminant Δ and, therefore, an orbit of points in the upper half-plane under the action of the arithmetical fuchsian group $\Gamma(\mathcal{O})$.

[1] Con soporte parcial de DGES, PB96-0166.

INTRODUCCIÓN

Sean $K := \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_0})$ el cuerpo cuadrático asociado al discriminante fundamental Δ_0, y $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ el álgebra de las matrices 2×2 de coeficientes racionales. El estudio de las inmersiones $\lambda : \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_0}) \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ conlleva la consideración de las inmersiones enteras y de las inmersiones optimales de los órdenes $\mathcal{O}_\Delta \subseteq K$, de discriminante $\Delta = \Delta_0 r^2$, $r \geq 1$, en los órdenes $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ del álgebra $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$.

El objetivo principal de este artículo es caracterizar las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras, resp. optimales, para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ en función de la forma cuadrática ternaria entera nórmica asociada al submódulo de las matrices de traza nula del orden $\mathcal{O}_2 := \mathbb{Z} + 2\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$.

La sección primera se dedica a establecer las notaciones y recordar los resultados básicos para los discriminantes y los órdenes de los cuerpos cuadráticos.

En la sección segunda, se definen las inmersiones enteras y optimales para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, y se relacionan con las inmersiones enteras y optimales para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$, de manera que se puede reducir el estudio al caso de discriminantes y órdenes pares. El concepto de paridad de un orden se ha establecido en **[Ba-Tr 00-1]**.

La sección tercera contiene el resultado principal del artículo. En ella se caracterizan las inmersiones enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, y las optimales para esta pareja, en función de la forma cuadrática entera nórmica $n_{0,2}$ asociada al submódulo de las matrices de traza nula del orden $\mathcal{O}_2$. El resultado establece una biyección entre el conjunto de las inmersiones enteras y el conjunto de las representaciones de $-\Delta$ por dicha forma cuadrática ternaria entera; y las inmersiones optimales se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\Delta$ por esta forma cuadrática.

Finalmente, la sección cuarta se dedica al estudio de la clasificación de las inmersiones. En particular, se establece por qué grupos es posible clasificar, y por cuales es conveniente hacerlo. El resultado principal es la reducción de la clasificación de las inmersiones a la clasificación de ciertas formas cuadráticas, formas que son enteras en el caso en que $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2,\mathbb{Z})$ es un suborden del álgebra de las matrices de coeficientes enteros.

En el transcurso de todo el artículo, los resultados principales se ejemplifican con el caso particular del orden $\mathcal{O}_0(N)$, cuyo grupo de unidades de norma 1 es el grupo de congruencia $\Gamma_0(N)$.

1. DISCRIMINANTES Y ÓRDENES DE LOS CUERPOS CUADRÁTICOS

Empecemos recordando que un discriminante fundamental es un número entero $\Delta_0 \in \mathbb{Z}$ tal que o bien es $\Delta_0 = d_0 \equiv 1 \pmod 4$ y $d_0 \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados, o bien es $\Delta_0 = 4d_0$, con $d_0 \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados y tal que $d_0 \equiv 2, 3 \pmod 4$. Además, un cuerpo cuadrático K es un cuerpo extensión de grado 2 del cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales y está determinado por un discriminante fundamental; es decir, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de los discriminantes fundamentales Δ_0 y el conjunto de los cuerpos cuadráticos $K = \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_0})$.

Sea Δ_0 un discriminante fundamental; los discriminantes asociados al discriminante fundamental Δ_0 son exactamente los números enteros de la forma $\Delta := \Delta_0 r^2$, con $r \geq 1$ un número entero cualquiera. Así, los discriminantes (no cuadrados) son exactamente los números enteros no cuadrados Δ tales que $\Delta \equiv 0,1 \pmod 4$.

Sea $\Delta := \Delta_0 r^2$, $r \geq 1$, un discriminante asociado al discriminante fundamental Δ_0, y sea $\omega_\Delta := \dfrac{\Delta_0 r + \sqrt{\Delta_0 r^2}}{2} \in$ $\in \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_0})$; se tiene que $\omega_\Delta = r\omega_{\Delta_0}$ es un generador como $\mathbb{Z}$-álgebra del orden $\mathcal{O}_\Delta$ de discriminante Δ del cuerpo cuadrático $K := \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_0})$. En particular, el orden maximal $\mathcal{O}_{\Delta_0}$ es el anillo de los enteros de K. Por otra parte, $(1, \omega_\Delta)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_\Delta$ como $\mathbb{Z}$-módulo y, en el caso en que Δ es par, $\left(1, \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ también es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_\Delta$. Finalmente, observemos que $\mathcal{O}_\Delta$ es un subgrupo de índice r del grupo abeliano $\mathcal{O}_{\Delta_0}$.

Lema 1.1. *Sean Δ, Δ' discriminantes tales que Δ' divide 4Δ pero Δ' no divide Δ. Entonces, Δ' es de la forma $\Delta' = 4\Delta''$, con Δ'' un discriminante que divide Δ. En particular, los tres discriminantes Δ, Δ' y Δ'' están asociados al mismo discriminante fundamental.* □

2. INMERSIONES ENTERAS Y OPTIMALES

Consideremos un cuerpo cuadrático $K := \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta_0})$, de discriminante fundamental Δ_0, y el álgebra de matrices $H := \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$. Sean $\Delta := \Delta_0 r^2$, $r \geq 1$, un discriminante cualquiera asociado a Δ_0, $\mathcal{O}_\Delta$ el orden de K de discriminante Δ, y $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ un orden cualquiera. Escribiremos n_0 para denotar la forma cuadrática ternaria nórmica de $\mathcal{O} \cap H_0$, donde H_0 indica el subespacio vectorial de H formado por las matrices de traza nula. Para las definiciones y las propiedades relativas a los órdenes del álgebra de matrices $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$, cf. **[Ba-Tr 00-1]**.

Definición 2.1. *Se dice que una inmersión $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ si, y sólo si, se satisface la inclusión $\lambda(\mathcal{O}_\Delta) \subseteq \mathcal{O}$. Si, además, se satisface la igualdad $\lambda(\mathcal{O}_\Delta) = \mathcal{O} \cap \lambda(K)$ o, equivalentemente, $\lambda^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_\Delta$, se dice que la inmersión λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.*

Dados un orden $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ y una inmersión $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ cualesquiera, la inmersión λ es optimal para alguna pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. En efecto, se satisface el resultado siguiente.

Proposición 2.2. *Sean $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ un orden y $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ una inmersión cualesquiera. Existe un discriminante Δ asociado al discriminante fundamental Δ_0 tal que λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.*

Demostración. La antiimagen de $\mathcal{O}$ por λ es un subanillo de K; y, puesto que la traza y la norma no varían por λ, la antiimagen de cualquier elemento de $\mathcal{O}$ es un elemento del orden maximal de K; por tanto, $\lambda^{-1}(\mathcal{O})$ es un subanillo del orden maximal de K. Para ver que $\lambda^{-1}(\mathcal{O})$ es un orden, basta ver que $\lambda^{-1}(\mathcal{O})$ contiene algún elemento $z \notin \mathbb{Q}$. Pero, por ser λ inyectiva, cualquier elemento $z \in K$, $z \notin \mathbb{Q}$, tiene imagen $\lambda(z) \notin \mathbb{Z}$, y un múltiplo entero no nulo de $\lambda(z)$ pertenece a $\mathcal{O}$, puesto que $\mathcal{O}$ es un orden; es decir, existe $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$, tal que $\lambda(dz) \in \mathcal{O}$; por tanto, $dz \in \lambda^{-1}(\mathcal{O})$, y $dz \notin \mathbb{Q}$. Esta propiedad nos permite asegurar que $\lambda^{-1}(\mathcal{O})$ es un cierto orden $\mathcal{O}_\Delta$ de K, y que λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. □

Más generalmente, dada una inmersión $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ entera para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, podemos cambiar el orden $\mathcal{O}_\Delta$ por otro $\mathcal{O}_{\Delta'}$ de manera que la inmersión es optimal para la pareja $(\mathcal{O},\mathcal{O}_{\Delta'})$.

Proposición 2.3. *Sean $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ un orden y $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Existe un discriminante Δ' divisor de Δ tal que λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$.*

Demostración. La antiimagen de $\mathcal{O}$ por λ es un orden de K que contiene $\mathcal{O}_\Delta$; por tanto, es un orden $\mathcal{O}_{\Delta'}$, para algún discriminante Δ' que divide Δ. Es decir, λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$. □

Si tenemos en cuenta que para todo orden $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ el orden $\mathcal{O}_2 := \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ es par, la proposición siguiente permitirá que nos restrinjamos, siempre que lo deseemos, al estudio del caso de discriminantes pares y órdenes pares. Recordemos que un orden $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es par si, y sólo si, 1 no es traza de ningún elemento de $\mathcal{O}$; en caso contrario, $\mathcal{O}$ es impar (cf. **[Ba-Tr 00-1]**).

Proposición 2.4. *Sean $\mathcal{O}$ un orden de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$, Δ un discriminante asociado al discriminante fundamental Δ_0, y $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ una inmersión cualquiera. La inmersión λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ si, y sólo si, es entera para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$.*

Demostración. Empecemos por observar que si $(1, \omega)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_\Delta$, cualquier inmersión $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es determinada por la imagen de ω, que puede ser cualquier elemento de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ de traza $t(\omega)$ y norma $n(\omega)$. Además, la inmersión λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ si, y sólo si, $\lambda(\omega) \in \mathcal{O}$. Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ y el conjunto de los elementos de $\mathcal{O}$ de traza $t(\omega)$ y norma $n(\omega)$.

Tomemos $\omega := \dfrac{\Delta + \sqrt{\Delta}}{2}$; entonces, $(1, \omega)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_\Delta$ y $(1, 2\omega)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_{4\Delta}$. Si suponemos que $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, tenemos que $A := \lambda(\omega) \in \mathcal{O}$; entonces, $\lambda(2\omega) = 2A \in 2\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_2$, de manera que λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$. Recíprocamente, supongamos que λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$ y pongamos $A' := \lambda(2\omega) \in \mathcal{O}_2$, y $A := \lambda(\omega) = \dfrac{A'}{2} \in \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$. Para ver que λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ es suficiente probar que $A \in \mathcal{O}$. Sean $z \in \mathbb{Z}$, $A'' \in \mathcal{O}$, tales que $A' = z + 2A''$. Puesto que $z^2 + 2zt(A'') + 4n(A'') = n(A') = \Delta^2 - \Delta = \Delta(\Delta - 1)$ es par y $t(A''), n(A'') \in \mathbb{Z}$, tenemos que z es par, de manera que $A = \dfrac{z}{2} + A'' \in \mathbb{Z} + \mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}$, como queríamos demostrar. □

Corolario 2.5. *Si Δ es un discriminante impar asociado al discriminante fundamental Δ_0 y existe una inmersión $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, entonces $\mathcal{O}$ es un orden impar.*

Demostración. Si Δ es impar, $\mathcal{O}_\Delta$ admite algún elemento de traza impar; por ejemplo, $\omega := \dfrac{\Delta + \sqrt{\Delta}}{2}$. Por tanto, $\mathcal{O} \supseteq \lambda(\mathcal{O}_\Delta)$ contiene un elemento de traza impar. □

Más generalmente, se tiene el resultado siguiente.

Lema 2.6. *Supongamos que $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es una inmersión entera para una pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_\Delta)$, donde Δ es un discriminante cualquiera asociado al discriminante fundamental Δ_0, y $\mathcal{O}$ es un orden cualquiera de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$. Entonces, Δ es de la forma $\Delta = 4\Delta'$, con Δ' un discriminante asociado a Δ_0, y λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$.*

Demostración. Supongamos que $\lambda(\mathcal{O}_\Delta) \subseteq \mathcal{O}_2$; puesto que $\mathcal{O}_2$ es un orden par, Δ debe ser par y, en consecuencia, múltiplo de 4. En particular, $\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2} \in \mathcal{O}_\Delta$, de manera que $A := \lambda\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \in \mathcal{O}_2$ y, por tanto, existen $z \in \mathbb{Z}$ y $A' \in \mathcal{O}$ tales que $A = z + 2A'$. Ahora, consideraremos la igualdad $-\dfrac{\Delta}{4} = n(A) = z^2 + 2zt(A') + 4n(A') = -z^2 + 4n(A')$, que se tiene ya que $t(A) = 0$ y, en consecuencia, es $t(A') = -z$.

Si z es impar, obtenemos que $-\dfrac{\Delta}{4} \equiv 3 \pmod 4$, de manera que $\Delta = 4\Delta'$, con $\Delta' \equiv 1 \pmod 4$; y si z es par, tenemos que $-\dfrac{\Delta}{4} \equiv 0 \pmod 4$, de manera que $\Delta = 4\Delta'$, con $\Delta' \equiv 0 \pmod 4$. En cualquier caso, y puesto que Δ no es cuadrado, Δ' no es ningún cuadrado y, en consecuencia, Δ' es un discriminante.

Finalmente, puesto que Δ' es un discriminante, el hecho que λ sea entera para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta'})$ nos dice que λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$, como queríamos demostrar. □

Corolario 2.7. *Una inmersión cualquiera $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es optimal para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ si, y sólo si, es optimal para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$.* □

3. INMERSIONES OPTIMALES Y REPRESENTACIONES

En esta sección se trata de caracterizar las inmersiones enteras y las inmersiones optimales para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ a partir de las representaciones de $-\Delta$ por la forma cuadrática ternaria nórmica asociada al orden $\mathcal{O}_2 := \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. Conviene empezar por el caso de discriminantes pares.

Proposición 3.1. *Sean $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ un orden cualquiera y Δ un discriminante par. Entonces:*

(a) Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ y el conjunto de las representaciones de $-\dfrac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$.

(b) Si $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, la imagen de $\mathcal{O}_\Delta$ está incluida en la subred par $\mathcal{O}' = \mathbb{Z} \oplus (\mathcal{O} \cap H_0)$ de $\mathcal{O}$.

(c) *Si $\mathcal{O}$ es par, las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\frac{\Delta}{4}$ por n_0; es decir, por las representaciones tales que los valores que toman las indeterminadas son primos entre sí.*

(d) *Si $\mathcal{O}$ es un orden impar, a cada inmersión optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ le corresponde una representación primitiva de $-\frac{\Delta}{4}$ por n_0; pero puede ser que una representación primitiva de $-\frac{\Delta}{4}$ dé lugar a una inmersión entera, pero no optimal, para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.*

Demostración. Puesto que Δ es par, también es múltiplo de 4, de manera que $\left(1, \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_\Delta$ y una $\mathbb{Q}$-base de K. Por tanto, una inmersión $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ cualquiera está determinada por la imagen de $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; y es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ si, y sólo si, $\lambda\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \in \mathcal{O}$. Es decir, las inmersiones λ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las posibles imágenes de $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ en $\mathcal{O}$; o sea, con los elementos $A \in \mathcal{O}$ tales que $t(A) = 0$ y $n(A) = -\frac{\Delta}{4}$; equivalentemente, con los elementos $A \in \mathcal{O} \cap H_0$ de norma $n_0(A) = -\frac{\Delta}{4}$; de otra manera, con las representaciones de $-\frac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$.

Por otra parte, para una inmersión $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, es $\lambda(1) = 1 \in \mathbb{Z}$, y $\lambda\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \in$ $\in \mathcal{O} \cap H_0$, de manera que

$$\lambda(\mathcal{O}_\Delta) = \lambda\left(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \subseteq \mathbb{Z} \oplus (\mathcal{O} \cap H_0) = \mathcal{O}';$$

esto demuestra la propiedad (b).

Sea (e_1, e_2, e_3) una $\mathbb{Z}$-base cualquiera de $\mathcal{O} \cap H_0$, de manera que $(1, e_1, e_2, e_3)$ es una $\mathbb{Z}$-base de la red $\mathbb{Z} \oplus (\mathcal{O} \cap H_0) = \mathcal{O}'$, y escribamos n_0 en esta base. Supongamos que $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ son tales que $n_0(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\Delta}{4}$; es decir, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ son las coordenadas en la base (e_1, e_2, e_3) de un elemento $A \in \mathcal{O} \cap H_0$ tal que $n_0(A) = -\frac{\Delta}{4}$; y sea $d := \mathrm{mcd}(x_1, x_2, x_3)$. Entonces, $\frac{x_i}{d} \in \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3$, de manera que $\frac{A}{d} \in \mathcal{O} \cap H_0$ y $-\frac{\Delta}{4d^2} = n_0\left(\frac{A}{d}\right) \in \mathbb{Z}$. Esto nos dice que si λ es la inmersión asociada a la representación $n_0(x_1, x_2, x_3) = -\frac{\Delta}{4}$, es $\lambda(\mathcal{O}_{\Delta/d^2}) \subseteq \mathcal{O}$, de manera que si es $d > 1$, entonces λ no es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ (porque $\mathcal{O}$ contiene la imagen de un orden de K estrictamente mayor que $\mathcal{O}_\Delta$). Luego, si la inmersión λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, la representación de $-\frac{\Delta}{4}$ por n_0 a que corresponde es primitiva.

Recíprocamente; si suponemos que $\mathcal{O}$ es par, y con las notaciones anteriores, hay que ver que si es $d = 1$, entonces λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Sean $x, y \in \mathbb{Q}$ tales que $\lambda\left(x + y\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \in \mathcal{O}$; si vemos que $x, y \in \mathbb{Z}$, sabremos que $\lambda^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}_\Delta$, de donde se obtiene la igualdad $\lambda^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_\Delta$, y habremos visto que λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, como queremos. Pero $\lambda\left(x + y\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) =$ $= x + yA \in \mathcal{O} = \mathbb{Z} \oplus (\mathcal{O} \cap H_0)$, puesto que $\mathcal{O}$ es par, de manera que $x \in \mathbb{Z}$ y $yA \in \mathcal{O} \cap H_0$. Puesto que las tres componentes yx_1, yx_2, yx_3 de yA en la base (e_1, e_2, e_3) son números enteros, y puesto que $d = \mathrm{mcd}(x_1, x_2, x_3) = 1$, obtenemos inmediatamente que $y \in \mathbb{Z}$, como queríamos probar.

Sólo resta ver que si $\mathcal{O}$ es impar, puede haber alguna representación primitiva de $-\frac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$ que corresponda a una inmersión entera pero no optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Para ello, daremos un ejemplo concreto. Consideremos el orden $\mathcal{O} := \mathcal{O}(1, 3, 1) := \mathcal{O}_0(3) := \left\{\begin{bmatrix} x & y \\ 3z & t \end{bmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{Z}\right\}$, el discriminante $\Delta = -12$, y sea λ la inmersión que se corresponde con la representación primitiva

$$3 = -\frac{-12}{4} = -3^2 + 3 \cdot 2 \cdot 2;$$

es decir, $X = Z = 2$, $Y = 3$, para la forma ternaria nórmica $n_0(X, Y, Z) = -Y^2 + 3XZ$ de $\mathcal{O}_0(3) \cap H_0$ (cf. **[Ba-Tr 00-1]**). Esto corresponde a tomar la matriz

$$\lambda(\sqrt{-3}) = \lambda\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{O}_0(3) \cap H_0$$

como imagen de $\sqrt{-3}$ por λ. Ahora bien, puesto que

$$\lambda\left(\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}\right)=\begin{bmatrix}-3 & -1\\ 3 & 0\end{bmatrix}\in \mathcal{O}_0(3),$$

y puesto que $\left(1, \dfrac{-3+\sqrt{-3}}{2}\right)$ es una $\mathbb{Z}$-base del orden maximal $\mathcal{O}_{-3}$, tenemos que $\lambda^{-1}(\mathcal{O}_0(3)) \supseteq \mathcal{O}_{-3} \supsetneq \mathcal{O}_{-12}$; es decir, λ es entera, pero no optimal, para la pareja $(\mathcal{O}_0(3), \mathcal{O}_{-12})$. □

Teorema 3.2. *Sean $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ un orden y Δ un discriminante cualesquiera. Las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones de $-\Delta$ por la forma cuadrática nórmica $n_{0,2}$ asociada al orden $\mathcal{O}_2$. Las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\Delta$ por $n_{0,2}$.*

Demostración. En la sección anterior, hemos probado que las inmersiones enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ son exactamente las mismas que las inmersiones enteras para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$; y que lo mismo sucede para las inmersiones optimales. Ahora, el discriminante 4Δ es par y el orden $\mathcal{O}_2$ también es par; por tanto, podemos aplicar la proposición anterior. Obtenemos que la inmersiones λ enteras para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_{4\Delta})$ se corresponden biyectivamente con las representaciones de $-\Delta = -\dfrac{4\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ de $\mathcal{O}_2 \cap H_0$; y que las inmersiones optimales se corresponden con las representaciones primitivas. □

Hemos obtenido, pues, una caracterización de las inmersiones enteras para una pareja cualquiera $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ a partir de la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ del orden $\mathcal{O}_2$; y también una caracterización de las inmersiones optimales. Además, en el caso en que Δ es par, también hemos obtenido una caracterización de las inmersiones enteras a partir de la forma ternaria nórmica n_0 del orden $\mathcal{O}$. Y, además, si Δ y $\mathcal{O}$ son ambos pares, una caracterización de las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ a partir de n_0.

Sin embargo, si $\mathcal{O}$ es impar, y aunque Δ sea par, no tenemos una caracterización de las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ a partir de la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$. En este caso, aún podemos afinar un poco más.

Proposición 3.3. *Sean $\mathcal{O}$ un orden impar, Δ un discriminante par, y $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ una inmersión entera pero no optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Supongamos que la representación de $-\dfrac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$ es primitiva. Entonces, existe un discriminante impar Δ' tal que $\Delta = 4\Delta'$ y λ es una inmersión optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$; equivalentemente, λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_\Delta)$.*

Demostración. Puesto que Δ es par, $\left(1, \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ es una $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}_\Delta$; y una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ está determinada por una matriz $A := \lambda\left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right) \in \mathcal{O} \cap H_0$ tal que $n_0(A) = -\dfrac{\Delta}{4}$.

Sea $\mathcal{O}_{\Delta'} := \lambda^{-1}(\mathcal{O})$; puesto que, por hipótesis, λ no es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, Δ' es un discriminante divisor estricto de Δ, pongamos $\Delta = \Delta' d^2$, $d > 1$. Si Δ' fuese par, tendríamos que $A' := \lambda\left(\dfrac{\sqrt{\Delta'}}{2}\right) \in \mathcal{O} \cap H_0$, porque λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$; esto implica que $A = dA'$, de manera que la representación de $-\dfrac{\Delta}{4}$ que corresponde a A no es primitiva porque d divide todos los coeficientes de A. Por tanto, Δ' debe ser impar.

El argumento anterior demuestra, de hecho, que si Δ es de la forma $\Delta = \Delta'' d^2$, con Δ'' un discriminante par, $d > 1$, y λ es entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta''})$, entonces la representación de $-\dfrac{\Delta}{4}$ no es primitiva. Por tanto, si se satisfacen las hipótesis del enunciado, no solamente tenemos que Δ' es impar, sino que Δ no puede tener divisores propios pares Δ'' que sean discriminantes y tales que $\lambda^{-1}(\mathcal{O}) \supseteq \mathcal{O}_{\Delta''}$. Lo cual implica que $\Delta = 4\Delta'$, con Δ' un discriminante impar, y que $\lambda^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_{\Delta'}$; es decir, que λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_{\Delta'})$. □

A continuación, resumimos en un sólo enunciado la caracterización de las inmersiones optimales.

Corolario 3.4. *Si $\mathcal{O}$ es par y Δ es impar, no existen inmersiones λ optimales (ni tampoco enteras) para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.*

Si $\mathcal{O}$ es par y Δ es par, las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\dfrac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$, y con las representaciones primitivas de $-\Delta$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ de $\mathcal{O}_2 \cap H_0$.

Si $\mathcal{O}$ es impar y Δ es impar, las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\Delta$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ de $\mathcal{O}_2 \cap H_0$.

Si $\mathcal{O}$ es impar y Δ es par pero no de la forma $\Delta = 4\Delta'$, con Δ' un discriminante impar, las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\frac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica n_0 de $\mathcal{O} \cap H_0$, y con las representaciones primitivas de $-\Delta$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ de $\mathcal{O}_2 \cap H_0$.

Si $\mathcal{O}$ es impar y $\Delta = 4\Delta'$, con Δ' un discriminante impar, las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones primitivas de $-\Delta$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ de $\mathcal{O}_2 \cap H_0$. □

Ejemplo 3.5. *Consideremos las inmersiones enteras y las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}_0(N), \mathcal{O}_\Delta)$, donde*

$$\mathcal{O}_0(N) := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ zN & t \end{bmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Si Δ es impar, la inmersiones enteras se corresponden biyectivamente con las representaciones (a, b, c),

$$-b^2 + 4Nac = -\Delta,$$

de $-\Delta$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}(X, Y, Z) = -Y^2 + 4NXZ$ de $(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(N)) \cap H_0$. Y las inmersiones optimales, con las representaciones primitivas; es decir, tales que $\mathrm{mcd}(a, b, c) = 1$.

Si Δ es par, las inmersiones enteras se corresponden biyectivamente con las representaciones $\left(a, \frac{b}{2}, c\right)$,

$$-\left(\frac{b}{2}\right)^2 + Nac = -\frac{\Delta}{4} \qquad (\text{o sea, } -b^2 + 4Nac = -\Delta),$$

de $-\frac{\Delta}{4}$ por la forma ternaria nórmica $n_0(X, Y, Z) = -Y^2 + NXZ$ de *$\mathcal{O}_0(N) \cap H_0$. Observemos que las inmersiones optimales se corresponden con las representaciones primitivas del tipo*

$$-b^2 + 4Nac = -\Delta,$$

y no necesariamente con las representaciones primitivas del tipo

$$-\left(\frac{b}{2}\right)^2 + Nac = -\frac{\Delta}{4};$$

de hecho, podría ser que a, c fuesen pares y $\frac{b}{2}$ impar, y de manera que esta última representación fuese primitiva y, en cambio, la representación de $-\Delta$ no sería primitiva.

4. CLASIFICACIÓN DE LAS INMERSIONES

En general, para un orden cualquiera $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$, si el conjunto de las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ es no vacío, entonces es infinito. Y para algunas aplicaciones es necesario clasificar las inmersiones. Para ello, conviene, en primer lugar, establecer por qué grupo se van a clasificar. Para aclarar un poco más la cuestión, empecemos observando el resultado siguiente.

Proposición 4.1. *Dos inmersiones $\lambda, \lambda' : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ cualesquiera son conjugadas por una matriz $U \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$.*

Demostración. Sean $\lambda, \lambda' : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ dos inmersiones cualesquiera. El isomorfismo $\lambda' \circ \lambda^{-1} : \lambda(K) \to \lambda'(K)$ se extiende, en virtud del teorema de Skolem-Noether (cf. **[Ja 89]**), a un automorfismo interno de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$; en particular, existe un elemento inversible $U \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) = \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})^*$ tal que $\lambda' \circ \lambda^{-1} = \sigma_U$, donde σ_U denota el automorfismo interno de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ definido por U, y que es dado por la asignación $M \mapsto U^{-1}MU$. Es decir, se tiene que $\lambda' = \sigma_U \circ \lambda$, como queríamos demostrar. □

No es cierto, en general, que dos inmersiones $\lambda, \lambda' : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras (u optimales) para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ sean conjugadas por algún automorfismo de $\mathcal{O}$. De hecho, el grupo $\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$ no actúa en general, por conjugación, en el conjunto de las inmersiones enteras (u optimales) para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Es decir, dadas una matriz $U \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$ y una inmersión $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ entera (e, incluso, optimal) para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, la inmersión $\sigma_U \circ \lambda$ no es necesariamente entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Se tiene, sin embargo, el resultado siguiente, consecuencia inmediata de la definición.

Proposición 4.2. *Sean $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ y $\sigma \in Aut(\mathcal{O})$ un automorfismo cualquiera. La composición $\sigma \circ \lambda$ es una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Y, si λ es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, la composición $\sigma \circ \lambda$ también es optimal para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.* □

El cálculo del grupo de los automorfismos de $\mathcal{O}$ puede hacerse de manera sencilla, también a partir del teorema de Skolem-Noether, al tener en cuenta el normalizador de $\mathcal{O}$ en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$.

Proposición 4.3. *El grupo de los automorfismos de $\mathcal{O}$ se identifica con el grupo cociente $N(\mathcal{O})/\mathbb{Q}^*$, donde*

$$N(\mathcal{O}) := \{U \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q}) : U^{-1}\mathcal{O}U = \mathcal{O}\}$$

es el normalizador de $\mathcal{O}$ en $\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$, y $\mathbb{Q}^*$ se identifica con el subgrupo formado por las homotecias no nulas de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$.

Demostración. Por definición del grupo $N(\mathcal{O})$, si $U \in N(\mathcal{O})$, entonces $\sigma_U \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$; en consecuencia, la asignación $U \mapsto \sigma_U$ define un morfismo de grupos $N(\mathcal{O}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$. Además, si $U \in \mathbb{Q}^*$, σ_U es la identidad en $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ y, en particular, en $\mathcal{O}$; por tanto, obtenemos un morfismo de grupos

$$N(\mathcal{O})/\mathbb{Q}^* \to \mathrm{Aut}(\mathcal{O}).$$

Ahora, dado $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O})$, σ se extiende a un automorfismo σ' de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ (por extensión lineal de escalares); por tanto, existe una matriz $U \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$ tal que $\sigma' = \sigma_U$; y, evidentemente, se satisface que $\sigma_U(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Por tanto, el morfismo anterior es exhaustivo. Además, si σ es la identidad, la única extensión posible a $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es la identidad, de manera que U es una unidad central del álgebra $\mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$; es decir, $U \in \mathbb{Q}^*$. Esto acaba la demostración. □

Así, pues, hemos obtenido que el grupo $N(\mathcal{O})$ actúa en el conjunto de las inmersiones enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, y también en el conjunto de las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$. Como consecuencia, vemos que tiene sentido la clasificación de estas inmersiones para cualquier subgrupo $\Gamma \subseteq N(\mathcal{O})$.

Sea $\Gamma(\mathcal{O})$ el grupo de las unidades de norma 1 del orden $\mathcal{O}$; entonces, $\Gamma(\mathcal{O})$ actúa por automorfismos internos en $\mathcal{O}$ y se tiene que $\Gamma(\mathcal{O}) \subseteq N(\mathcal{O})$, de manera que, aplicando la proposición anterior, hemos demostrado el resultado siguiente.

Corolario 4.4. *El grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ actúa en el conjunto de las inmersiones enteras y en el conjunto de las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.* □

Observación 4.5. *En la sección anterior, hemos demostrado que las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las representaciones de $-\Delta$ por la forma ternaria nórmica $n_{0,2}$ asociada al submódulo formado por las matrices de traza nula del orden $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. En efecto, las inmersiones enteras se corresponden biyectivamente con las matrices de traza nula*

$$\lambda(\sqrt{\Delta}) \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O},$$

y tales que $\det\left(\lambda(\sqrt{\Delta})\right) = -\Delta$. En consecuencia, la clasificación de las inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ por la acción del grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ equivale a la clasificación de las posibles matrices $\lambda(\sqrt{\Delta}) \in (\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}) \cap H_0$ por este grupo.

Notemos que, aunque las matrices $\lambda(\sqrt{\Delta})$ asociadas a las inmersiones enteras pertenecen a un suborden estricto de $\mathcal{O}$ y $\Gamma(\mathcal{O})$ no es un subgrupo del grupo de los elementos inversibles de este suborden, el grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ actúa por conjugación en el conjunto de las posibles matrices $\lambda(\sqrt{\Delta}) \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. A continuación se trata de hacer explícita esta acción.

Recordemos que la acción usual del grupo $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ en el plano complejo $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es dada por la fórmula

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}(z) := \frac{az + b}{cz + d},$$

para $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ y $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ arbitrarios, y que las homotecias actúan trivialmente, de manera que la acción lo es, de hecho, por el grupo $\mathbf{PGL}(2, \mathbb{R})$. Además, la acción del subgrupo formado por las matrices de determinante positivo respeta el signo de la parte imaginaria, de manera que actúa en el semiplano superior, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, y también en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

En particular, si $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es una inmersión cualquiera, se tiene que $\det\left(\lambda(\sqrt{\Delta})\right) = -\Delta \neq 0$; por tanto, $\lambda(\sqrt{\Delta}) \in \mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$.

Observación 4.6. *Sea $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ una inmersión cualquiera, dada por la asignación $\lambda(\sqrt{\Delta}) =: \begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{bmatrix}$, con a, b, $c \in \mathbb{Q}$.*

Para la acción de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$ en $\mathbb{C}$, existen exactamente dos puntos $z \in \mathbb{C}$ fijos por todas las matrices $x + y\lambda(\sqrt{\Delta}) \in \lambda(K)$, x, $y \in \mathbb{Q}$; es decir, existen dos puntos tales que para toda matriz no nula

$$x + y\lambda(\sqrt{\Delta}) = \begin{bmatrix} x - yb & -2yc \\ 2ya & x + yb \end{bmatrix} \in \lambda(K),$$

con $x, y \in \mathbb{Q}$, $(x, y) \neq (0, 0)$, es $\dfrac{(x - yb)z - 2yc}{2yaz + (x + yb)} = z$. Estos dos números complejos son las raíces

$$z := \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad z' := \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

del polinomio cuadrático $aZ^2 + bZ + c$. En particular, sólo dependen de $\lambda(K)$, pero no de la imagen de ningún elemento concreto de K, de manera que están asociados unívocamente a la inmersión λ. Si $\Delta < 0$, exactamente uno de los dos puntos z, z' pertenece a $\mathbb{H}$; en este caso, elegiremos siempre $z \in \mathbb{H}$, de manera que $z' \notin \mathbb{H}$, o sea, $-z' \in \mathbb{H}$. En el caso en que sea $\Delta > 0$, los dos puntos z, z' son reales; elegiremos la notación de manera que sea $z > z'$.

Además, si dos inmersiones cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2 : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ son Γ-equivalentes para un cierto subgrupo $\Gamma \subseteq \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$, de tal manera que para una matriz $P \in \Gamma$ se tiene que $\sigma_P \circ \lambda_1 = \lambda_2$, entonces los puntos fijos respectivos, z_1, z_2, son equivalentes por la acción de la matriz P^{-1}; es decir, se tiene que $P^{-1}z_1 = z_2$ y $P^{-1}z_1' = z_2'$. Por tanto, hemos establecido el resultado siguiente.

Corolario 4.7. *Sea $\Gamma \subseteq \mathbf{GL}(2, \mathbb{Q})$ un grupo cualquiera. A cada clase de Γ-equivalencia de inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ le corresponde una clase de Γ-equivalencia de puntos de $\mathbb{H}$ (o de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$) por la acción de Γ en $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ como subgrupo de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$.* □

Ejemplo 4.8. *Consideremos las inmersiones enteras y las inmersiones optimales para la pareja $(\mathcal{O}_0(N), \mathcal{O}_\Delta)$. Si $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es una inmersión entera para la pareja $(\mathcal{O}_0(N), \mathcal{O}_\Delta)$, λ está definida por una asignación*

$$\lambda(\sqrt{\Delta}) = \begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2aN & b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(N),$$

es decir, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tal que $-b^2 + 4Nac = -\Delta$. Y la inmersión es optimal para la pareja $(\mathcal{O}_0(N), \mathcal{O}_\Delta)$ si, y sólo si, $\mathrm{mcd}(a, b, c) = 1$. En particular, a cada clase de $\Gamma_0(N)$-equivalencia de inmersiones enteras (u optimales) para la pareja $(\mathcal{O}_0(N), \mathcal{O}_\Delta)$ le corresponde una clase de equivalencia de puntos de $\mathbb{H}$ o de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ por la acción de $\Gamma_0(N)$ como subgrupo de $\mathbf{GL}(2, \mathbb{R})$. Concretamente, los puntos $\Gamma_0(N)$-equivalentes a la raíz elegida, $z := \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2aN}$, del polinomio

$$NaZ^2 + bZ + c$$

asociado a la inmersión λ.

Proposición 4.9. *Dos inmersiones $\lambda_1, \lambda_2 : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$, dadas por las asignaciones*

$$\lambda_1(\sqrt{\Delta}) = \begin{bmatrix} -b_1 & -2c_1 \\ 2a_1 & b_1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2(\sqrt{\Delta}) = \begin{bmatrix} -b_2 & -2c_2 \\ 2a_2 & b_2 \end{bmatrix},$$

son $\Gamma(\mathcal{O})$-equivalentes si, y sólo si, las formas cuadráticas binarias

$$a_1X^2 + b_1XY + c_1Y^2, \quad a_2X^2 + b_2XY + c_2Y^2$$

son $\Gamma(\mathcal{O})$-equivalentes.

Demostración. Para una matriz $P \in \Gamma(\mathcal{O})$, se tiene que $\lambda_2(\sqrt{\Delta}) = P^{-1}\lambda_1(\sqrt{\Delta})P$ si, y sólo si, $B_2 = P^t B_1 P$, donde

$$B_1 := \begin{bmatrix} 2a_1 & b_1 \\ b_1 & 2c_1 \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 2a_2 & b_2 \\ b_2 & 2c_2 \end{bmatrix}$$

son las matrices asociadas a las formas cuadráticas $a_1X^2 + b_1XY + c_1Y^2$, $a_2X^2 + b_2XY + c_2Y^2$, respectivamente.

Supongamos que $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2,\mathbb{Z})$ es un suborden cualquiera. Entonces, el grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ es un subgrupo de $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$, y una inmersión $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ entera para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ está dada por una asignación

$$\lambda(\sqrt{\Delta}) = \begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O} \subseteq \mathbb{Z} + 2\mathbf{M}(2, \mathbb{Z})$$

tal que $-b^2 + 4ac = -\Delta$. En particular, se tiene que $a, b, c \in \mathbb{Z}$, de manera que el polinomio $aZ^2 + bZ + c$ es de coeficientes enteros. Así, a la inmersión λ le podemos hacer corresponder unívocamente una forma cuadrática binaria *entera* $aX^2 + bXY + cY^2$, de discriminante Δ.

Corolario 4.10. *Sea $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Z})$ un suborden cualquiera. Las clases de $\Gamma(\mathcal{O})$-equivalencia de inmersiones $\lambda : K \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ se corresponden biyectivamente con las clases de $\Gamma(\mathcal{O})$-equivalencia de un cierto subconjunto de formas cuadráticas binarias enteras de discriminante Δ.* □

4.11. Acción de $\Gamma(\mathcal{O})$ en el conjunto de inmersiones enteras. Supongamos que $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Z})$ es un suborden de $\mathbf{M}(2, \mathbb{Z})$; entonces, $\Gamma(\mathcal{O}) \subseteq \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z})$. Dada una matriz cualquiera $P := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \Gamma(\mathcal{O})$, y dado un elemento $A := \begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ tal que $-b^2 + 4ac = -\Delta$, pongamos $A' := P^{-1}AP$; entonces, es $A' := \begin{bmatrix} -b' & -2c' \\ 2a' & b' \end{bmatrix}$, donde

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \mathcal{P} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

con

$$\mathcal{P} := \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\gamma & \gamma^2 \\ 2\alpha\beta & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\gamma\delta \\ \beta^2 & \beta\delta & \delta^2 \end{bmatrix}, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = 1 + 2\beta\gamma.$$

Por tanto, $A' \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ y también es un elemento de traza nula y norma $-\Delta$. Así, la asignación $(P, A) \mapsto A' := P^{-1}AP$ define una acción del grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ en el conjunto de las matrices $A \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ de traza nula y determinante $-\Delta$; es decir, una acción en el conjunto de las inmersiones $\lambda : \mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}) \to \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para la pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$.

Proposición 4.12. *La asignación $P \mapsto \mathcal{P}$ define un antimorfismo inyectivo de grupos $\Gamma(\mathcal{O})/\{\pm 1\} \to \mathbf{O}^+(n_{0,2})$, donde $\mathbf{O}^+(n_{0,2})$ designa el grupo ortogonal especial asociado a la forma cuadrática ternaria entera $n_{0,2}$.*

Demostración. Dada la matriz $P \in \Gamma(\mathcal{O})$, la matriz $\mathcal{P}$ pertenece a $\mathbf{SL}(3, \mathbb{Z})$, ya que $\det(\mathcal{P}) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^3 = 1$. En particular, $\mathcal{P}$ define un automorfismo del grupo abeliano formado por los elementos de traza nula de $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. Si, para cada elemento de traza nula $A := \begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, escribimos $\mathcal{A} := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, este automorfismo lineal es dado por la asignación $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{P}\mathcal{A}$; además, se tiene que $n_{0,2}(\mathcal{A}) = \det(A)$, de manera que $n_{0,2}(\mathcal{P}\mathcal{A}) = \det A' = \det A = n_{0,2}(\mathcal{A})$, y el automorfismo lineal es invariante para la forma nórmica $n_{0,2}$. Puesto que al producto de dos matrices P le corresponde el producto de las matrices asociadas $\mathcal{P}$ en orden inverso, la asignación $P \mapsto \mathcal{P}$ define un antimorfismo de grupos $\Gamma(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathbf{O}^+(n_{0,2})$. Y, claramente, el núcleo de este antimorfismo está formado por las matrices $\pm 1 \in \Gamma(\mathcal{O})$. □

Así, pues, dado un suborden cualquiera $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Z})$, la clasificación de las inmersiones $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ por el grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ equivale a la clasificación por el grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ del conjunto de las formas cuadráticas binarias enteras $aX^2 + bXY + cY^2$ de discriminante Δ tales que $\begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$; equivalentemente, de las formas cuadráticas binarias enteras de discriminante Δ asociadas a una representación de $-\Delta$ por la forma cuadrática ternaria entera $n_{0,2}$.

Observación 4.13. *En general, si $\mathcal{O} \subseteq \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ es un orden cualquiera, la clasificación de las inmersiones $\lambda : K \longrightarrow \mathbf{M}(2, \mathbb{Q})$ enteras para una pareja $(\mathcal{O}, \mathcal{O}_\Delta)$ por el grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ equivale a la clasificación por el grupo $\Gamma(\mathcal{O})$ de las formas cuadráticas binarias $aX^2 + bXY + cY^2$ de discriminante Δ tales que $\begin{bmatrix} -b & -2c \\ 2a & b \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, aunque éstas formas no son necesariamente de coeficientes enteros.*

REFERENCIAS

1. **[Ba-Tr 00-1]** Bayer, P.; & Travesa, A. (2000), Órdenes matriciales generados por grupos de congruencia, *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fis. Nat., Esp.* **94**, p. 339-346.
2. **[Ja 89]** Jacobson, N. (1989), *Basic Algebra II,* W. H. Freeman and Co., New York. Second printing, 1995; ISBN: 0-7167-1933-9.
3. **[Po 1887]** Poincaré, H. (1887), Les fonctions Fuchsiennes et l'Arithmétique, *Journal de Mathématiques* **3**, 4ème série, 405-464. Œuvres, t. II, p. 463-511.