Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fis.Nat. (Esp)
Vol. 93, N.º 4, pp 499-505, 1999
Monográfico: Problemas complejos de decisión. II

DECISIÓN MULTICRITERIO A TRAVÉS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CUADRÁTICO-FRACCIONALES

(Programación cuadrática/programación multiobjetivo/programación fraccional/decisión multicriterio)

A. BEATO MORENO[1], R. INFANTE MACÍAS[1] y P. RUIZ CANALES[1]

Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Sevilla, c/ Tarfia s/n-41012 Sevilla.

Clasificación AMS: 90C, 90C20, 90C31, 90C32.

RESUMEN

En este trabajo abordamos problemas de toma de decisiones que aparecen cuando se tienen en cuenta varios criterios simultáneamente. Estudiaremos los problemas donde existe un número elevado de alternativas factibles, descritas a través del uso de variables de decisión y tanto los objetivos como las restricciones están funcionalmente relacionadas con las variables de decisión. Centraremos la atención en los casos en los que las funciones que cuantifican los objetivos son cociente de funciones cuadráticas y lineales.

1. INTRODUCCIÓN

La actividad humana está guiada, en general, por la necesidad de elegir en cada situación la mejor opción de entre todas las posibles. Esto implica realmente la resolución (consciente o inconscientemente) de un problema de decisión. Cuando la toma de decisiones no está guiada por un solo propósito, sino que existen varias finalidades simultáneas, que pueden entrar en conflicto, aparecen los problemas de decisión multicriterio.

Algunos ejemplos sencillos de estos problemas son:

— Una persona desea comprar un coche nuevo. Deberá tener en cuenta varios objetivos entre la amplia gama disponible en el mercado, como precio, seguridad, aspecto, motor, etc.
— En un proceso de producción se suelen tener varios objetivos simultáneamente como reducir los costos de producción, diversificar la producción, obtener capital a corto y a largo plazo, satisfacer a los empleados, etc.
— Se dispone de un capital C para realizar inversiones en diversas compañías que cotizan en bolsa. Para cada inversión se conoce la distribución de probabilidad de la ganancia producida por cada unidad invertida. Deben tenerse en cuenta objetivos tales como aumentar la ganancia esperada y reducir el riesgo de la inversión.

Las posibles acciones que podemos tomar ante un problema de decisión se conocen con el nombre de decisiones factibles. Supondremos que estas posibles acciones son conocidas de antemano y controladas por un único decisor. Además, consideraremos un ambiente de certidumbre, es decir, un único resultado $u(x)$ para cada decisión x factible. El conjunto de posibles resultados lo denotaremos por X.

Otra hipótesis que utilizaremos es la existencia entre los elementos de X, por parte del decisor, de una relación de preferencia transitiva, con una función de valor que la represente:

$$u_1 > u_2 \quad \text{si y sólo si} \quad v(u_1) > v(u_2)$$

Estos valores no deben ser necesariamente escalares. De hecho, en este trabajo vamos a suponer que la función de valoración es vectorial.

Con este planteamiento, podemos establecer que un problema de decisión multicriterio puede escribirse de la siguiente forma:

$$\underset{x \in X}{DR}\ v(x) = \left(f_1(x), \ldots, f_n(x)\right)$$

donde

1. X es el conjunto de alternativas, el cual es un conjunto de vectores de variables de decisión x de dimensión N. Supondremos una alternativa completamente especificada por el valor de x.
2. $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ son el conjunto de reglas mediante las cuales el valor de cada atributo $f_1, \ldots, f_n$ se evalúa en la alternativa x.

3. DR debe ser interpretado como: *«Aplicar la regla de decisión que elige la mejor alternativa de X de acuerdo con los valores de f_1, ..., f_n»*.

Los fundamentos matemáticos de los procesos de Decisión con Criterios Múltiples tienen su origen en economía, con sus primeras aplicaciones en la Teoría del Bienestar y la Teoría de la Utilidad a finales del siglo XIX. En 1896, con el fin de estudiar la utilidad que un conjunto de bienes induce en una colectividad de individuos, Vilfredo Pareto realiza la siguiente hipótesis: *«Cada individuo siempre busca aumentar su bienestar y por lo tanto su utilidad»*, y tras definir la situación de Equilibrio Económico, deduce la siguiente propiedad de interés que una colectividad de consumidores poseen en una situación de máxima utilidad en Equilibrio Económico.

«Diremos que los miembros de una colectividad presentan máxima utilidad en cierta posición cuando es imposible encontrar una forma de movernos ligeramente de esta posición de forma que la utilidad de cada uno de los miembros de la colectividad aumente o disminuya.»

Posteriormente la definición de Pareto fue aplicada a la Teoría de Equilibrio Económico, la Teoría de Juegos y la Teoría de Producción. A partir de 1960 se produce un gran crecimiento de las áreas en las cuales se emplean los procesos de Decisión Multicriterio.

Si en un problema de decisión multicriterio el número de alternativas factibles es infinito, están descritas a través del uso de variables de decisión y tanto los objetivos como las restricciones están funcionalmente relacionadas con las variables de decisión, estamos ante el denominado problema de programación multiobjetivo.

En el apartado 2 introducimos varios conceptos relacionados con el problema multiobjetivo como es el de eficiencia. También se presenta una condición necesaria de eficiencia, la cual es generalizada en el apartado 3. En los apartados 4, 5 y 6 se estudia el problema multiobjetivo con funciones objetivo que son cocientes de funciones cuadráticas y lineales, sus propiedades y metodología para determinar puntos eficientes del mismo.

2. PROGRAMACIÓN CUADRÁTICA MULTIOBJETIVO

La toma de decisiones con varios objetivos da lugar a los **problemas de programación multiobjetivo**. Matemáticamente los podemos formular como:

$$\text{(PM)} \qquad \operatorname*{Min}_{x \in S} f(x) = \big(f_i(x), \ldots, f_m(x)\big),$$

donde f_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$.

Si el conjunto de decisiones posibles S coincide con $\mathbb{R}^n$, se obtiene el problema de programación múltiple sin restricciones.

Cuando no disponemos de información adicional sobre la importancia cuantitativa o cualitativa de los objetivos, no es posible definir la solución de este problema sin tener en cuenta todos los objetivos. Para su elección, suele emplearse alguna de las siguientes definiciones.

Definición 2.1. *Diremos que un punto x^0 es (localmente) eficiente para el problema (PM) si no existe $x \in S$ $\big(x \in S \cap U(x^0)$, siendo $U(x^0)$ un entorno de $x^0\big)$ tal que $f(x) \leqslant f(x^0)$, $f(x) \neq f(x^0)$.*

Definición 2.2. *Diremos que un punto x^0 es (localmente) débilmente eficiente para el problema (PM) si no existe $x \in S$ $\big(x \in S \cap U(x^0)$, siendo $U(x^0)$ un entorno de $x^0\big)$ tal que $f(x) < f(x^0)$.*

Definición 2.3. *Diremos que un punto $x^0 \in S$ es un punto (localmente) propiamente eficiente para (PM) si existe un escalar $M > 0$ tal que para cada $r \in \{1, ..., m\}$ y para cada $x \in S\big(x \in S \cap U(x^0)$, siendo $U(x^0)$ un entorno de $x^0\big)$, cumpliendo que $f_r(x) < f_r(x^0)$ existe $j \in \{1, ..., m\}$ tal que $f_j(x^0)$ y*

$$f_r(x^0) - f_r(x) \leqslant M\big(f_j(x) - f_j(x^0)\big).$$

Bajo la hipótesis de diferenciabilidad de las funciones del problema, una condición necesaria de primer orden es la siguiente (CKTE):

«Si $x^0 \in \mathbb{R}^n$ es eficiente para el problema (PM) sin restricciones, donde todas las funciones son diferenciables, entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_m \geqslant 0$ no todos nulos tales que

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x^0) = 0.\text{»}$$

Lema 2.1 (Chankong, 1983). *Consideremos el problema (PM) sin restricciones con todas las funciones diferenciables. Sea x^0 eficiente. Entonces x^0 verifica la condición CKTE.*

En algunos problemas la condición CKTE es suficiente, pero en otros es sólo necesaria, como puede observarse a continuación.

Ejemplo 2.1. Consideremos el problema múltiple

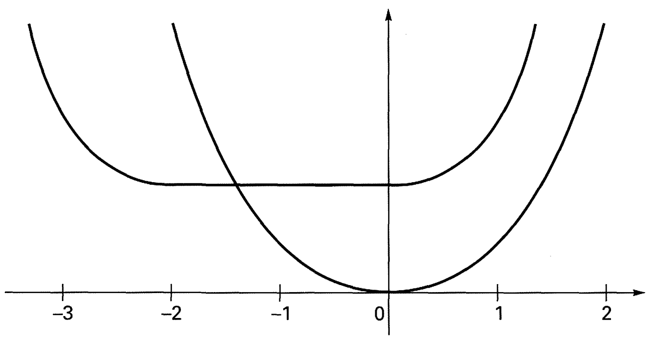
$$\operatorname*{Min}_{x \in \mathbb{R}} \big(f_1(x), f_2(x)\big),$$

donde

$$f_1(x) = \frac{1}{2.25}x^2$$

$$f_2(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + 1 & \text{si } x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Gráficamente:



Cualquier punto $x \in [-2, 2]$ verifica CKTE, pues en esos puntos es $\nabla f_2(x) = 0$. Sin embargo sólo el punto $x^0 = -1.5$ es eficiente, pues es el único mínimo de la función $f_1(x)$. Como conclusión obtenemos que la CKTE no es suficiente para que un punto sea eficiente, aún a pesar de que las dos funciones que aparecen en el ejemplo son convexas.

3. GENERALIZACIÓN DE LA CONDICIÓN CKTE

Recientemente se ha propuesto una caracterización de puntos eficientes en el problema cuadrático multiobjetivo basada en un procedimiento interactivo con condiciones de primer orden (Beato y otros, 1998) que generaliza las dadas anteriormente.

El problema cuadrático multiobjetivo considerado en dicho trabajo es el siguiente:

$$\text{(PCM)} \qquad \underset{s.a: \quad x \in S.}{\text{Min}} \left(f_1(x), \ldots, f_m(x)\right)$$

donde $f_i(x) = 1/2x^tA_ix + b_i^tx$, A_i es una matriz $n \times n$, $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, m$, $S = \mathbb{R}^n$ y además las funciones objetivo son convexas, o sea, las matrices A_i deben ser semidefinidas positivas.

Los problemas multiobjetivos con funciones cuadráticas han sido estudiados por varios autores, como Go y Yang (1996), Guerra (1981) y Helbig (1990). Aparecen en áreas tales como Localización, Estadística o Finanzas. Por ejemplo, Powell y Premachandra (1998) estudian la selección de inversiones mediante problemas multiobjetivos con dos funciones cuadráticas y el resto lineales. También Korhonen y Yu (1997, 1998) y Rhode (1981) utilizan un problema multiobjetivo cuadrático-lineal para la selección de carteras.

Presentamos a continuación un método para detectar si un punto débilmente eficiente, que cumple las condiciones CKTE, es también un punto eficiente.

Prueba de eficiencia en (PCM)

Sea x^0 un punto débilmente eficiente, $k = 1$, $\nabla f_i^1(x^0) = \nabla f_i^1(x^0)$. $L^1(x^0) = \mathbb{R}^n$, $I \equiv \{1, \ldots, m\}$ e $I_1 = I$.

1. Calcular $\lambda_i^k \geqslant 0$, $i \in I_k$, no todos nulos tales que $\sum_{i \in I_{k_0}} \lambda_i^k \nabla f_i^k(x^0) = 0$. Si no existen, se concluye que x^0 no es un punto eficiente.
2. Sea $I_{k+1} = I_k \setminus \{i \mid \lambda_i^k > 0\}$, $J_k = \cup_{i=1}^k \bar{I}_k$ y $L^{k+1}(x^0) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla f_i^k(x^0)^t d = 0, i \in I \setminus J_k,\} \cap \{d \in N_i, \forall i \in I \setminus J_k\}$, donde N_i es el subespacio generado por los autovectores nulos de A_i.
3. Calcular la proyección de $\nabla f_i^k(x^0)$ en $L^{k+1}(x^0)$, $\nabla f_i^{k+1}(x^0)$. Sea $k := k + 1$ y volver al paso 1.

   Parar cuando $I_{k+1} = \emptyset$ en el paso 2: el punto x_0 es eficiente.

Observación. Es posible extender la prueba anterior a problemas con restricciones sin más que considerar los multiplicadores de Lagrange asociados a ellas y la cualificación de restricciones correspondiente.

4. EL PROBLEMA FRACCIONAL CUADRÁTICO-LINEAL MULTIOBJETIVO

El objetivo de este trabajo es la extensión de la prueba de eficiencia anterior a problemas multiobjetivos con funciones cociente de funciones cuadráticas y lineales.

El problema fraccional multiobjetivo es el siguiente:

$$\text{(PFM)} \qquad \begin{array}{l} \text{Min} \left(\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}, \ldots, \dfrac{f_m(x)}{g_m(x)}\right) \\ s.a: \quad x \in S. \end{array}$$

El caso que estudiaremos es cuando

$$f_i(x) = 1/2\ x^t A_i x + b_i^t x \quad \text{y} \quad g_i(x) = c_i^t x,$$

donde $A_i \in \mathcal{M}_{n \times n}$ son semidefinidas positivas, b_i, $c_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Mx \leqslant q,\ x \geqslant 0\}$, y supondremos que $c_i^t x > 0$, $\forall x \in S$. *Lo llamaremos* **problema fraccional cuadrático-lineal multiobjetivo** y lo denotaremos por **PCFLM.**

Problemas con este tipo de funciones objetivos han sido tratados por ejemplo por Arévalo y Zapata (1997) donde se estudia un problema de selección de carteras teniendo en cuenta factores como la rentabilidad de cada una de ellas, el riesgo asociado y la liquidez. También Konno e Inori (1989) estudian problemas de selección de inversiones institucionales donde se proponen varias funciones objetivo a optimizar de este tipo.

Por simplicidad, supondremos que se verifica la siguiente cualificación de restricciones:

«Sea x^0 un punto eficiente para (PFCLM). Entonces existe $x \in S$ para cada $i = 1, ..., m$ tal que $Mx < q$ y $f_j(x)/g_i(x) < f_j(x^0)/g_i(x^0)$ para $j \neq i$.»

Sobre las propiedades de convexidad de las funciones objetivos del problema se tienen los siguientes resultados.

Lema 4.1. *Sea A es una matriz $n \times n$ semidefinida positiva y $b, c \in \mathbb{R}^n$. Bajo la hipótesis $c^t x > 0$, $\forall x \in S$, la función*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/2\ x^t\ Ax + b^t x}{c^t x}$$

es explícitamente cuasiconvexa en S.

Demostración. Se deriva del teorema 3.52 de Martos (1975) ya que la función $x^t Ax + b^t x$ es convexa en S.

Teorema 4.1. *Sea A es una matriz $n \times n$ semidefinida positiva y $b, c \in \mathbb{R}^n$. Bajo la hipótesis $c^t x > 0$, $\forall x \in S$, la función*

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/2x^t\ Ax + b^t x}{c^t x}$$

es pseudoconvexa en S.

Demostración. Recordemos que una función $f(x)$ definida en S pseudoconvexa en $x^0 \in S$ si

$$\nabla f(x^0)^t (x - x^0) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) \geqslant f(x^0), \forall x \in S.$$

Por ser $f(x)$ convexa,

$$f(x) - f(x^0) \geqslant \nabla f(x^0)^t (x - x^0).$$

Por ser $g(x)$ lineal,

$$g(x) - g(x^0) = \nabla g(x^0)^t (x - x^0).$$

El gradiente de la función $h(x)$ en x^0 viene dado por

$$\nabla h(x) = \frac{\nabla f(x) \cdot g(x) - \nabla g(x) \cdot f(x)}{g(x)^2}.$$

Luego

$$\nabla h(x^0)^t (x-x^0) = \frac{\nabla f(x^0)^t (x-x^0) \cdot g(x^0) - \nabla g(x^0)^t (x-x^0) \cdot f(x^0)}{g(x^0)^2}$$

$$\leqslant \frac{g(x^0) \cdot \left(f(x)-f(x^0)\right) - f(x^0) \cdot \left(g(x)-g(x^0)\right)}{g(x^0)^2}$$

$$= \frac{f(x)-f(x^0)}{g(x^0)} - \frac{f(x^0)}{g(x^0)} \cdot \left(\frac{g(x)-g(x^0)}{g(x^0)}\right)$$

$$= \frac{g(x)f(x)}{g(x)g(x^0)} - \frac{f(x^0)g(x)}{g(x^0)g(x^0)} =$$

$$= \frac{g(x)}{g(x^0)} \cdot \left(h(x) - h(x^0)\right).$$

Se llega a que

$$\nabla h(x^0)^t (x - x^0) \leqslant \frac{g(x)}{g(x^0)} \cdot \left(h(x) - h(x^0)\right) \Rightarrow$$

$$h(x) - h(x^0) \geqslant \frac{\nabla h(x^0)^t (x - x^0)}{g(x)/g(x^0)}.$$

En resumen,

$$\nabla h(x^0)^t (x - x^0) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) - h(x^0) \geqslant 0,$$

ya que por hipótesis $g(x) = c^t d > 0$, $\forall x \in S$. Esto demuestra el teorema. □

Corolario 4.1.1. *En las condiciones del teorema 4.1, h(x) es invex respecto a*

$$\eta(x, x^0) = \frac{c^t x^0 (x - x^0)}{c^t x}.$$

Demostración. Se desprende de la demostración del teorema 4.1. □

5. EFICIENCIA EN EL PROBLEMA PFCLM

Los dos resultados vistos anteriormente permiten caracterizar los puntos (débilmente) eficientes para el problema (PFCLM).

Lema 5.1. *Sea x^0 un punto localmente eficiente para el problema (PFCLM). Supongamos que cada matriz A_i es semidefinida positiva y $c_i^t x > 0$, $\forall x \in S$, $\forall i \in I$. Entonces x^0 es un punto (globalmente) eficiente para el problema (PFCLM).*

Demostración. Es consecuencia del lema 4.1 y del teorema 3.1 de Ruiz-Canales, 1995. □

Un resultado análogo se verifica para los puntos débilmente eficientes (véase Luc y Schaible, 1997).

Como consecuencia de lo anterior, podemos limitarnos a buscar sólo puntos (débilmente) localmente eficientes en el problema (PFCLM).

Lema 5.2. *El punto $x^0 \in S$ es eficiente para el problema (PFCLM) si y sólo si es eficiente para el problema*

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \left(x'\nabla h_1(x^0), \ \ldots, \ x'\nabla h_m(x^0)\right) \\ s.a: & x \in S. \end{array}$$

Demostración. Es consecuencia del teorema 4.1 y de los lemas 3.1 y 3.2 de Bector y otros, 1993.

El lema 5.2 proporciona una prueba para comprobar si un punto x^0 es eficiente para el problema (PFCLM). Consiste en comprobar que el punto x^0 es un punto eficiente para un problema lineal multiobjetivo, que puede ser diferente para cada punto x^0.

También en Bector y otros, 1993, se propone una alternativa utilizando dualidad, que conduce a un problema lineal multiobjetivo, pero con restricciones muy difíciles de tratar. En ambos casos, determinar si un punto es eficiente para el problema (PFCLM) es bastante costoso computacionalmente.

6. ALTERNATIVAS PARA DETERMINAR PUNTOS EFICIENTES

Proponemos dos alternativas que usan la prueba de eficiencia descrita en la sección 2 para determinar los puntos eficientes para el problema (PFCLM).

La primera consiste en estudiar la eficiencia en los problemas (PFCLM) a través del siguiente problema cuadrático múltiple asociado.

(PCMA)

$$\begin{array}{l} \text{Min } \left(1/2 \ x^tA_1x+b_1^tx, \ldots, 1/2 \ x^t \ A_mx+b_m^tx, \ -c_1^tx, \ldots, -c_m^tx\right) \\ s.a: \ x\in S. \end{array}$$

Se verifica la siguiente relación entre los puntos eficientes del problema (PFCLM) y los de (PCMA).

Lema 6.1. *Si x^0 es un punto eficiente para el problema (PFCLM), entonces x^0 es un punto eficiente para el problema (PCMA).*

Demostración. Por reducción al absurdo. Sea $x^0 \in S$ un punto eficiente para (PFCLM). Si x^0 no es eficiente para (*PCMA*), existe otro punto $y \in$ S y un índice $j \in I = \{1, \ldots, m\}$ tal que

a) $f_i(y) \leqslant f_i(x^0), \forall i \in I \setminus \{j\}, g_i(y) \geqslant g_i(x^0), \forall i \in I \setminus \{j\}$ y $f_j(y) < f_j(x^0)$. O bien

b) $f_i(y) \leqslant f_i(x^0), \forall i \in I \setminus \{j\}, g_i(y) \geqslant g_i(x^0), \forall i \in I \setminus \{j\}$ y $g_j(y) > g_j(x^0)$.

En ambos casos, como $g_i(x) > 0$, $\forall x \in S$, se llega a que $f_i(y)/g_i(y) \leqslant f_i(x^0)/g_i(x^0)$, $\forall i \in I \setminus \{j\}$ y $f_j(y)/g_j(y) < f_j(x^0)/g_j(x^0)$ con lo cual x^0 no puede ser eficiente para (PFCLM). □

Como consecuencia, podemos utilizar la prueba de eficiencia descrita en la sección 2 de este trabajo para generar todos los puntos eficientes de (PCMA) y luego determinar qué puntos son eficientes para (PFCLM). El inconveniente de esta aproximación es la posible generación de un número de puntos eficientes mucho mayor de lo necesario.

La segunda alternativa es la utilización de condiciones de primer orden directamente sobre el problema original.

Lema 6.2. *Consideremos el problema (PFCLM) y $x^0 \in S$. Sea $A(x^0) = \{i \mid M_ix^0 = q\}$ el conjunto de índices de restricciones activas en x^0. Supongamos que existen $\mu \geqslant 0$, $\mu \neq 0$, $v \geqslant 0$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^0) + \sum_{j \in A(x^0)} v_j M_j = 0.$$

Entonces x^0 es un punto débilmente eficiente para el problema (PFCLM).

Demostración. Supongamos que el punto $x^0 \in S$ no es débilmente eficiente y verifica las condiciones anteriores.

Entonces existe $x^1 \in S$ tal que

$$h_i(x^1) - h_i(x^0) < 0, \quad i \in I.$$

Como cada $h_i(x)$ es pseudoconvexa, debe ser

$$\left(\nabla h_i(x^0)\right)^t(x^1 - x^0) < 0, \quad i \in I.$$

Al ser x^0, $x^1 \in S$, debe ser

$$M_i(x^1) \leqslant M_i(x^0) = q \Rightarrow M_i(x^1 - x^0) \leqslant 0, \quad i \in A(x^0).$$

Como por hipótesis $\mu \geqslant 0$, $\mu \neq 0$, $v \geqslant 0$, se llega a que

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^0)^t(x^1 - x^0) + \sum_{j \in A(x^0)} v_j M_j^t(x^1 - x^0) < 0.$$

Y esto es una contradicción con la hipótesis

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \nabla h_i(x) + \sum_{j \in A(x^0)} v_j M_j = 0.$$

Lema 6.3. *Consideremos el problema (PFCLM) y $x^0 \in S$. Sea $A(x^0) = \{i \ / \ M_i x^0 = q\}$ el conjunto de índices de restricciones activas en x^0. Supongamos que existen $\mu > 0$, $v \geqslant 0$ tales que*

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla h_i(x^0) + \sum_{j \in A(x^0)} v_j M_j = 0.$$

Entonces x^0 es un punto eficiente para el problema (PFCLM).

La demostración de este lema es similar al anterior y no se presenta.

Observaciones. Entre los lemas 6.2 y 6.3 podemos establecer varios matices:

1. De las condiciones del lema 6.2 no podemos deducir que el punto x^0 sea eficiente, como demuestra el ejemplo dado al principio del trabajo.
2. Si todas las funciones objetivos son estrictamente pseudoconvexas, entonces la condición del lema 6.2 es suficiente para asegurar que un punto es eficiente.
3. Si **una** de las funciones objetivos $h_{i_0}(x)$ con valor $\mu_{i_0} > 0$ es estrictamente pseudoconvexa, el punto x^0 es eficiente, como puede observarse en la demostración.
4. Los puntos eficientes no tienen que verificar, en principio, la condición del lema 6.3. Por lo tanto, si estamos interesados en identificar todos los puntos eficientes, además de los que cumplen la condición del lema 6.3, es necesario chequear qué puntos de los que verifican la condición 6.2 son eficientes.

Presentamos la adaptación de la prueba de eficiencia de la sección 2 al problema (PFCLM).

Prueba de eficiencia en (PFCLM)

Sea $x^0 \in S$, $A(x^0) = \{i \ / \ M_i x^0 = q\}$, $k = 1$, $\nabla h_i^1(x^0) = \nabla h_i(x^0)$, $L^1(x^0) = \mathbb{R}^n$, $I \equiv \{1, ..., m\}$ e $I_1 = I$.

1. Calcular $\lambda_i^k \geqslant 0$, $i \in I_k$, no todos nulos tales que

$$\sum_{i \in I_k} \lambda_i \nabla h_i^k(x^0) + \sum_{j \in A(x^0)} v_j M_j = 0.$$

   Si no existen, paramos y diremos que el punto x^0 no ha pasado la prueba de eficiencia.

2. Sea $I_{k+1} = I_k \setminus \{i \mid \lambda_i^k > 0\}$, $J_k = \cup_{i=1}^{k} \bar{I}_k$ y $L^{k+1}(x^0) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n / \nabla h_i^k(x^0)^t d = 0, \ i \in I \setminus J_k, \}$.
3. Calcular la proyección de $\nabla h_i^k(x^0)$ en $L^{k+1}(x^0)$, $\nabla h_i^{k+1}(x^0)$. Sea $k := k + 1$ volver al paso 1.

   Parar cuando $I_{k+1} = \emptyset$ en el paso 2: el punto x_0 es eficiente.

Teorema 6.1. *Si x^0 verifica la prueba de eficiencia anterior, entonces es un punto eficiente para el problema (PFCLM).*

Demostración. El resultado ha sido demostrado en Beato y otros, 1998 para un problema múltiple sin restricciones y funciones objetivos invex. Ya hemos visto que las funciones objetivos tratadas en el problema (PFCLM) son pseudoconvexas. La adaptación de la demostración a la existencia de restricciones lineales es directa. □

Observación. El recíproco del teorema no está demostrado. Si en la prueba anterior paramos en el paso 1, podemos aplicar el lema 5.2 para concluir si el punto x^0 es eficiente o no.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado un problema de decisión multicriterio: el problema fraccional con funciones cuadráticas convexas en el numerador y funciones lineales en el denominador.

Se han revisado diversas técnicas propuestas para la generación de puntos eficientes, así como la caracterización y propiedades de éstos. Se ha concluido que los puntos localmente eficientes son eficientes y se han estudiado las condiciones suficientes de primer orden de eficiencia y de eficiencia débil.

Como consecuencia de éstas, se ha propuesto una prueba iterativa para identificar puntos eficientes como extensión de otra prueba iterativa propuesta para problemas cuadráticos.

REFERENCIAS

1. Arévalo, M. T. y Zapata, A. (1997). *Selección de carteras mediante Programación Fraccionada Multiobjetivo.* XXIII Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa, Valencia, España.
2. Beato, A., Ruiz, P., Luque, P. L. y Blanquero, R. (1998). Multiobjective Quadratic Problem: Characterization of the Efficient Points; in *Generalizaed Convexity, Generalizad Monotonicity* (J.P. Crouzeix Ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecth, pp. 425-438.

3. Bector, C. R., Chandra, S. y Singh, C. (1993). *A linearization approach to multiobjective programming duality.* Journal of Mathematical Analysis and Applications, 175, pp. 268-279.
4. Chankong, V. and Haimes, Y. Y. (1983). *Multiobjective Decision Making: Theory and Methdology* Elsevier Science Publishing Co. Inc., North-Holland.
5. Goh, C. J. and Yang, X. Q. (1996). *Analytic Efficient Solution Set ofr Multi-criteria Quadratic Programs.* European Journal of Operational Research, 92, pp. 166-181.
6. Guerra, F. (1981). *Algunas posibilidades de utilización de la optimización paramétrica en la optimización vectorial cuadrática.* Revista de Investigación Operacional, Vol. II, n. 2-3, pp. 7-45.
7. Helbig, S. (1990). *An Algorithm for Quadratic Vector Otimization Problems.* Z. Angew. Math. Mech., 70, pp. 751-753.
8. Konno, H. and Inori, M. (1989). *Bond portfolio optimization by bilinear fractional programming.* Journal of the Operational Research of Japan, Vol. 32, n. 2, pp. 143-158.
9. Korhonen, P. K. y Yu, G. Y. (1997). *A reference direction approach to multiple objective quadratic-linear programming* European Journal of Operational Research, 102, pp. 601-610.
10. Korhonen, P. K. y Yu, G. Y. (1998). *On Computing Objective Function Values in Multiobjective Quadratic-Linear Programming.* European Journal of Operational Research, 106, pp. 184-190.
11. Luc, D. T. y Schaible, S. (1997). *Efficiency and Generalized Concavity.* Journal of Optimization Theory and Applications, 94 (1), pp. 147-153.
12. Martos, B. *Non Linear Programming: Theory and Methods.* North Holland Publishing Company. 1975.
13. Powell, J. G. y Premachandra, I. M. (1998). *Accomodating Diverse Institutional Investment Objective and Constraints Using Non-Linear Goal Programming.* European Journal of Operational Research, 105, pp. 447-456.
14. Rhode, R. and Weber, R. (1981). Multiple objective quadratic-linear programming; in *Operational Research* (J. P. Brans Ed.), North-Holland Publishing Company, pp. 405-420.
15. Ruiz-Canales, P. y Rufián Lizana, A. (1995). *A characterization of weakly efficient points.* Mathematical Programming, 68, pp. 205-212.