Rev.R.Acad.Cien.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 93, N.º 2, pp 241-250, 1999
Matemáticas

ESTIMACIÓN DE LA CURVA MEDIANA DE UNA CÓPULA $C(x_1,...,x_m)$

(cópula, función cuantil, curva cuantil, curva mediana de una cópula, mediana de una muestra)

L. Imlahi, M. Ezzerg and A. Chakak

Facultad de Ciencias C.P. 2121. Tetuán-Marruecos

Presentado por F. J. Girón el 25 de noviembre de 1998. Aceptado el 14 de abril de 1999.

SUMMARY

The objective of this work is to approach the quantile curves of a random vector $(X_1, ..., X_m)$, by making a convenient selection among the elements of the sample of this vector. This approach is based on $K_n(v)$ of Genest and Rivest (1993).

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es aproximar las curvas cuantiles de un vector aleatorio $(X_1, ..., X_m)$, haciendo una selección conveniente entre los elementos de la muestra de este vector. Esta aproximación está basada sobre $K_n(v)$ de Genest y Rivest (1993).

INTRODUCCIÓN

Sean X e Y dos variables aleatorias de funciones de distribución marginales $F(x)$ y $G(y)$ respectivamente, y de función de distribución conjunta $H(x, y)$.

Podemos siempre escribir $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ siempre que $F(x)$ y $G(y)$ sean continuas. Alternativamente, se tiene que: $C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$, $0 \le u, v \le 1$, donde $F^{-1}(u) = \inf \{x : F(x) \ge u\}$ y $G^{-1}(v) = \inf \{y : G(y) \ge v\}$.

La función $C(u, v)$, llamada frecuentemente cópula, es entonces una función de distribución de un vector aleatorio cuyas marginales son uniformes sobre [0, 1].

Sea (X, Y) un vector aleatorio de función de distribución la cópula $C(x, y)$ y sea $K(v) = P[C(X, Y) \le v]$.

Si $C(x, y)$ es arquimediana de expresión: $C(x, y) = \phi^{-1} [\phi(x) + \phi(y)]$, donde ϕ es una función convexa decreciente sobre [0, 1] con $\phi(1) = 0$ ([3]), entonces $K(v) = v - \phi(v)/\phi'(v)$, ([4]). En este caso, $K(v)$ caracteriza la cópula $C(x, y)$.

En [1], hemos definido la función cuantil $\psi(x, u)$ asociada a una cópula $C(x, y)$ cualquiera.

$$\psi(x, u) = \inf \{y : C(x, y) \ge u\}$$

$$= \inf \{y : C(x, y) = u\}.$$

La función $\psi(x, u)$ caracteriza la cópula $C(x, y)$, sea arquimediana o no.

En este artículo damos la definición de la función cuantil asociada a $C(x_1, ..., x_m)$, $m \ge 2$ y algunas de sus propiedades estructurales.

Después de haber expresado $K(v)$ a partir de esta función cuantil, damos la generalización del procedimiento de estimación dado por Genest et Rivest [4], para aproximar $K(v)$. Como $K(v)$ no caracteriza forzosamente la cópula $C(x_1, ..., x_m)$ no arquimediana, utilizamos este procedimiento para estimar la curva cuantil $C^{-1} (K^{-1}(v))$ de la función $(x_1, ..., x_{m-1}) \to \psi(x_1, ..., x_{m-1}, K^{-1}(v))$.

Las demostraciones se hacen para la curva mediana $C^{-1}\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, ya que $K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y $K^{-1}(v)$ juegan papeles similares. Siendo $K^{-1}(v)$ la función cuantil de $K(v) = P[C(X_1, ..., X_m) \le v]$.

Damos dos ejemplos como aplicación numérica, uno es arquimediano y el otro no arquimediano.

DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN CUANTIL ASOCIADA A $C(x_1, ..., x_m)$

Sea $X = (X_1, ..., X_m)$ un vector aleatorio de función de distribución $C(x_1, ..., x_m)$, siendo C una cópula. Se designa $C^{-1}(u) = \{(x_1, ..., x_m) : C(x_1, ..., x_m) = u\}$.

Como en el caso bidimensional, se puede definir la función quantil que describe la curva cuantil $C^{-1}(u)$.

Definición 1. Sea $C(x_1, ..., x_m)$ una cópula, se define la función cuantil asociada a C por:

$$\psi(x_1,...,x_{m-1},v)=\begin{cases}\inf\{x_m : C(x_1,...,x_m)\geq v\} & si\ C(x_1,...,x_{m-1},1)\geq v\\ 1 & si\ C(x_1,...,x_{m-1},1)< v.\end{cases}$$

$C^{-1}(u)$ es la curva de la función $(x_1, ..., x_{m-1}) \to \psi(x_1, ..., x_{m-1}, u)$.

La función $\psi(x_1, ..., x_{m-1}, v)$ tiene las propiedades siguientes:

Propiedades:

1) $\psi(x_1, ..., x_{m-1}, v)$ es decreciente en x_i $(i = 1, ..., m-1)$. Es continua en x_i si C es estrictamente creciente.

2) $\psi(x_1, ..., x_{m-1}, v)$ es creciente y continua en v.

3) $\psi(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, v) = \psi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, v)$
donde $\psi(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, v)$ es la función cuantil asociada a la cópula $C(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_m)$.

4) $\psi(x_1, ..., x_{m-2}, \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v),v) = 1$ si C es estrictamente creciente.

5) $\lim\limits_{x_{i_0}\to v} \psi(x_1, ..., x_{i_0}, ..., x_{m-1}, v) = 1$ si C es estrictamente creciente.

Demostración:

1) y 2) provienen directamente del crecimiento y de la continuidad de $C(x_1, ..., x_m)$ en x_i $(i = 1, ..., m)$.

3) $v = C(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, \psi(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, v))$

$= G(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, \psi(x_1, ..., x_{i-1}, 1, x_{i+1}, ..., x_{m-1}, v))$

donde G es la cópula del vector $(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_m)$.

4) Por definición se tiene:

$v = C(x_1, ..., x_{m-2}, \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v), \psi(x_1, ..., x_{m-2}, \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v), v))$

y

$v = C_{m-1}(x_1, ..., x_{m-2}, \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v))$

$= C(x_1, ..., x_{m-2}, \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v), 1)$

y puesto que C es estrictamente creciente, se tiene que:

$\psi(x_1, ..., x_{m-2}, \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v), v) = 1.$

C_{m-1} es la cópula del vector $(X_1, ..., X_{m-1})$.

5) Para fijar las ideas, se toma $i_0 = 1$. Si $C(x_1, ..., x_{m-1}, 1) < v$ se tiene por definición:

$\psi(x_1, ..., x_{m-1}, v) = 1.$

Si $C(x_1, ..., x_{m-1}, 1) \geq v$ y por consiguiente $x_1 \geq v$, se tendrá:

$x_{m-1} \geq \psi(x_1, ..., x_{m-2}, v)$

$x_{m-2} \geq \psi(x_1, ..., x_{m-3}, v)$

.
.
.

$x_3 \geq \psi(x_1, x_2, v)$

$x_2 \geq \psi(x_1, v)$

ahora bien, $\lim\limits_{x_1\to v} \psi(x_1, v) = 1$, así pues x_2 tiende a 1 cuando x_1 tiende a v y $v = C(x_1, x_2, \psi(x_1, x_2, v))$ tiende a $C(v, 1, \lim\limits_{x_1\to v} \psi(x_1, x_2, v))$, lo que implica que $\lim\limits_{x_1\to v} \psi(x_1, x_2, v) = 1$, ya que C es estrictamente creciente, y por consiguiente x_3 tiende a 1. Sucesivamente se demuestra que $x_2, ..., x_{m-1}$ tienden a 1 cuando x_1 tiende a v. Así pues:

$v = C(v, 1, ..., 1, \lim\limits_{x_1\to v} \psi(x_1, ..., x_{m-1}, v)) \Rightarrow \lim\limits_{x_1\to v} \psi(x_1, ..., x_{m-1}, v) = 1.$

Proposición 1. Sea $C(x_1, ..., x_m)$ una cópula absolutamente continua de densidad estrictamente positiva y $K_m(v) = P[C(X_1, ..., X_m) \leq v]$, entonces:

$K_m(v) = K_{m-1}(v) +$

$$\int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 \cdots \int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 dx_{m-1} \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m$$

y la densidad es

$$k_m(v)=\int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 \cdots \int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 c(x_1,...,x_{m-1},\psi(x_1,...,x_{m-1},v))\times$$
$$\times \frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-1},v)dx_{m-1}$$

Demostración. Designamos por $C(x_1, ..., x_i)$ la cópula del vector $(X_1, ..., X_i)$, $c(x_1, ..., x_i)$ su densidad y $\psi(x_1, ..., x_{i-1}, v)$ su función cuantil, $i = 2, ..., m$.

$K_m(v) = P[C(X_1, ..., X_m) \leq v]$

$= P[C(X_1, ..., X_m) \leq v, C(X_1, ..., X_{m-1}) \leq v] +$

$+ P[C(X_1, ..., X_m) \leq v, C(X_1, ..., X_{m-1}) \geq v].$

Y puesto que $C(x_1, ..., x_{m-1}) \leq v$ implica $C(x_1, ..., x_m) \leq v$, se tiene:

$K_m(v) = K_{m-1}(v) + P\,[C(X_1, ..., X_m) \le v,\ C(X_1, ..., X_{m-1}) \ge v]$

ahora bien,

$$P\,[C(X_1, ..., X_m) \le v,\ C(X_1, ..., X_{m-1}) \ge v] =$$

$$= \int 1_{[C(x_1,...,x_{m-1})\ge v]}(x_1,...,x_{m-1}) P[C(x_1,...,x_{m-1},X_m) \le v / X_i = x_i, i = 1,...,m-1] =$$

$$= \int 1_{[C(x_1,...,x_{m-1})\ge v]}(x_1,...,x_{m-1}) \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m dx_{m-1}...dx_1.$$

Y

$$1_{[C(x_1,...,x_{m-1})\ge v]}(x_1,...,x_{m-1}) = 1_{[v,1]}(x_1)\times 1_{[\psi(x_1,v),1]}(x_2)\times$$
$$\times 1_{[\psi(x_1,x_2;v),1]}(x_3)$$
$$\times 1_{[\psi(x_1,x_2,x_3,v),1]}(x_4)...$$
$$\times 1_{[\psi(x_1,...,x_{m-2},v),1]}(x_{m-1}).$$

Por tanto:

$$K_m(v) = K_{m-1}(v) +$$
$$\int_v^1 dx_1 ... \int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 dx_{m-1} \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m.$$

• Cálculo de la densidad $k_m(v)$.

$$k_m(v) = k_{m-1}(v) + \frac{d}{dv}\int_v^1 g_1(x_1,v)dx_1.$$

donde

$$g_1(x_1,v) = \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 ... \int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 dx_{m-1} \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m$$

y

$$\frac{d}{dv}\int_v^1 g_1(x_1,v)dx_1 = -g_1(v,v) + \int_v^1 \frac{d}{dv} g_1(x_1,v)dx_1.$$

Ahora bien,

$$g_1(v, v) = 0, \text{ ya que } \psi(v, v) = 1,$$

Así pues

$$\frac{d}{dv}\int_v^1 g_1(x_1,v)dx_1 = \int_v^1 \frac{d}{dv} g_1(x_1,v)dx_1.$$

Ponemos:

$$g_2(x_2,v) = \int_{\psi(x_1,x_2,v)}^1 dx_3 ... \int_{\psi(x_1,x_{m-2},v)}^1 dx_{m-1} \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m$$

se tiene

$$g_1(x_1,v) = \int_{\psi(x_1,v)}^1 g_2(x_2,v)dx_2.$$

Por consiguiente:

$$\frac{d}{dv} g_1(x_1,v) = -\frac{d}{dv}\psi(x_1,v)\cdot g_2(\psi(x_1,v),v)$$
$$+\int_{\psi(x_1,v)}^1 \frac{d}{dv} g_2(x_2,v)dx_2$$

También se tiene:

$$g_2(\psi(x_1,v),v) = 0 \text{ ya que } \psi(x_1,\psi(x_1,v),v) = 1$$

y por tanto:

$$\frac{d}{dv}\int_v^1 g_1(x_1,v)dx_1 = \int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 \frac{d}{dv} g_2(x_2,v)dx_2$$

Se continúa así hasta el orden $m - 3$, es decir:

$$\frac{d}{dv}\int_v^1 g_1(x_1,v)dx_1 =$$
$$= \int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 ... \int_{\psi(x_1,...,x_{m-3},v)}^1 dx_{m-2} \frac{d}{dv}\int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 dx_{m-1}\times$$
$$\times \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m.$$

y

$$\frac{d}{dv}\int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 c(x_1,...,x_{m-1},\psi(x_1,...,x_{m-2},v))\,dx_{m-1}\int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-1},v)} c(x_1,...,x_m)dx_m =$$
$$= -\frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-2},v)\cdot \int_0^{\psi(x_1,...,x_{m-2},\psi(x_1,...,x_{m-2},v),v)} c(x_1,...,\psi(x_1,...,x_{m-2},v),x_m)dx_m$$
$$+\int_{\psi}^1 \psi(x_1,...,x_{m-2},v) c(x_1,...,x_{m-1},\psi(x_1,...,x_{m-1},v))\frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-1},v)dx_{m-1}$$
$$= -\frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-2},v) c(x_1,...,x_{m-2},\psi(x_1,...,x_{m-2},v)) +$$
$$\int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 c(x_1,...,x_{m-1},\psi(x_1,...,x_{m-1},v))\frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-1},v)dx_{m-1}$$

Conclusión:

$$k_m(v) = k_{m-1}(v) -$$
$$\int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 ... \int_{\psi(x_1,...,x_{m-3},v)}^1 c(x_1,...,x_{m-2},\psi(x_1,...,x_{m-2},v))\times$$
$$\times \frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-2},v)dx_{m-2}$$
$$+\int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 ... \int_{\psi(x_1,...,x_{m-2},v)}^1 c(x_1,...,x_{m-1},\psi(x_1,-x_{m-1},v))\times$$
$$\times \frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-1},v)dx_{m-1}.$$

Y por recurrencia, se demuestra que:

$$k_{m-1}(v) = \int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 ... \int_{\psi(x_1,...,x_{m-3},v)}^1 c(x_1,...,x_{m-2},\psi(x_1,...,x_{m-2},v))\times$$
$$\times \frac{d}{dv}\psi(x_1,...,x_{m-2},v)dx_{m-2}$$

así,

$$k_m(v) =$$
$$\int_v^1 dx_1 \int_{\psi(x_1,v)}^1 dx_2 \ldots \int_{\psi(x_1,\ldots,x_{m-2},v)}^1 c(x_1,\ldots,x_{m-1},\psi(x_1,\ldots,x_{m-1},v)) \times$$
$$\times \frac{d}{dv}\psi(x_1,\ldots,x_{m-1},v)dx_{m-1}.$$

Podemos ahora enunciar la generalización del procedimiento de estimación dada por Genest et Rivest (1993), a una cópula $C(x_1, \ldots, x_m)$.

Sea $X^1, X^2, \ldots, X^n$ una muestra de tamaño n procedente de C, donde $X^j = (X_1^j, X_2^j, \ldots, X_m^j)$.

Denotamos por:

$$X^j \leq X^k \Leftrightarrow X_i^j \leq X_i^k, i = 1,\ldots,m$$
$$I_{ij} = \begin{cases} 1 & si\, X^j \leq X^i \\ 0 & sino \end{cases}$$
$$V_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i}^{n} I_{ij}$$
$$K_n(v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[V_i \leq v]}.$$

Proposición 2. Sea $C(x_1, \ldots, x_m)$ una cópula. Bajo ciertas condiciones de regularidad (*ver* [8]) tenemos:

a) $P[V_i \leq v] \underset{n\to\infty}{\to} K(v)$ donde $K(v) = P[C(X_1, \ldots, X_m) \leq v]$.

b) $K_n(v) \overset{P}{\to} K(v)$

$$VarK_n = \left(\frac{K(v)(1-K(v))}{n}\right) + \left(\frac{k(v)\left\{k(v)\left(R(v) - 2v(1-K(v))^{\ldots - K(v)}\right)\right\}}{n}\right) + \theta\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$v^2 + R(v) = E\left(C\left(min\left(X^1, X^2\right)\right) / C\left(X^i\right) = v,\ i = 1,2\right)$$
$$= \frac{1}{k^2(v)}\int C\left(min\left(x^1, x^2\right)\right)h\left(x_1^1,\ldots,x_{m-1}^1,v\right) \times h\left(x_1^2,\ldots,x_{m-1}^2,v\right)dx^1dx^2,$$
$$h(x_1,\ldots,x_{m-1},v) = c(x_1,\ldots,x_{m-1},\psi(x_1,\ldots,x_{m-1},v)) \times$$
$$\frac{d}{dv}\psi(x_1,\ldots,x_{m-1},v) \times 1_{\left[C_{(x_1,\ldots,x_{m-1})\geq v}\right]}(x_1,\ldots,x_{m-1})$$

Y $\min(X^1, X^2) = \left(min\left(X_1^1, X_1^2\right), \ldots, min\left(X_m^1, X_m^2\right)\right)$.

c) $\dfrac{(K_n(v) - K(v))}{\sqrt{\sigma_n}} \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} \mathcal{N}(0,1)$ donde

$$\sigma_n = VarK_n - \theta\left(\frac{1}{n}\right).$$

d) $\sqrt{n}(K_n(v) - K(v)) \overset{p}{\to} 0$ en el caso unidimensional.

Demostración:

a) Para simplificar la escritura se considera un vector aleatorio (X, Y) y se tiene:

$$V_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} I_{ij}.$$

Las variables aleatorias V_i, $i = 1, \ldots, n$ siguen la misma distribución y son dependientes.

Vamos a demostrar que V_i converge en ley hacia $C(X, Y)$ cuando n tiende hacia el infinito. Para ello, se considera la función característica $\varphi_1(t)$ de V_1.

$$\varphi_1(t) = E\left(e^{itV_1}\right) = E\left(exp\frac{it}{n-1}\sum_{j=2}^{n} I_{1j}\right) \text{ y si se pone:}$$

$$M_1(t) = E\left[exp\frac{it}{n-1}\sum_{j=2}^{n} I_{1j} / (X_1, Y_1) = (x_1, y_1)\right]$$

entonces $\varphi_1(t) = E(M_1(t))$.

- Cálculo de $M_1(t)$

$$M_1(t) = E\left(exp\frac{it}{n-1}\sum_{j=2}^{n} I_{1j} / (X_1, Y_1) = (x_1, y_1)\right)$$
$$= \left[E\left(exp\frac{it}{n-1} I_{12} / (X_1, Y_1) = (x_1, y_1)\right)\right]^{n-1}$$

ya que, para (x_1, y_1) fijo, las variables aleatorias I_{1j}, $j = 2, \ldots, n$ son independientes y siguen la misma distribución de Bernoulli de parámetro $P_{1+} = C(x_1, y_1)$; así pues

$M_1(t) = \left(P_{1+}\left(exp\frac{it}{n-1} - 1\right) + 1\right)^{n-1}$ y utilizando el desarrollo limitado hasta el orden dos de $\log(1 + x)$ y e^x, se obtiene:

$$M_1(t) = \left[1 - \frac{t^2}{2(n-1)}P_{1+}(1 - P_{1+})\right]\exp itP_{1+} + \theta\left(\frac{1}{n-1}\right).$$

Y entonces: $M_1(t) \underset{n\to\infty}{\to} \exp itP_{1+}$ para casi todo (x_1, y_1). Además,

$|M_1(t)| \leq 1$, $\forall n$. Por tanto, el teorema de la convergencia dominada asegura la convergencia de

$$\varphi_1(t) = E(M_1(t)) \underset{n\to\infty}{\to} E(exp\ itP_{1+}) = E(\exp\,(C(X,Y)it)),$$

es decir:

$$V_i \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\to}} C(X,Y).$$

Por consiguiente: $P\ [V_i \leq v] \underset{n\to\infty}{\to} P\ [C(X, Y) \leq v] = K(v)$.

b) Utilizando las funciones características de (V_1, V_2) y de V_1, así como la fórmula de inversión, se demuestra, después de un cálculo muy largo, que:

$$Var\, K_n = \left(\frac{K(v)(1-K(v))}{n}\right) + \left(\frac{k(v)\{k(v)(R(v)-2v(1-K(v))-K(v))\}}{n}\right) + \theta\left(\frac{1}{n}\right).$$

Entonces:

$$P[|K_n(v)-K(v)|>\varepsilon] \leq$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left((Var\, K_n)+(P[V_1 \leq v])-(K(v)^2)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La expresión de $R(v)$ se basa sobre la distribución de $(X_1, ..., X_{m-1})$ condicionada por $C(X_1, ..., X_m) = v$.

c) (ver, P. BARBE [8]).

d) En el caso unidimensional $var\ (K_n) = 0$.

$$var(K_n(v)) = \left(\frac{P[V_1 \leq v]}{n}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right) \times$$

$$(P[V_1 \leq v, V_2 \leq v]) - (P[V_1 \leq v])^2,$$

$$P[V_1 \leq v] = \left(\frac{[(n-1)v]+1}{n}\right) \text{ y}$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) P[V_1 \leq v, V_2 \leq v] = \left(\frac{([(n-1)v]+1)[(n-1)v]}{n^2}\right)$$

de donde

$$P[|\sqrt{n}(K_n(v)-K(v))|>\varepsilon] \leq \frac{n}{\varepsilon^2}\left\{var\ (K_n(v)) + (P[V_1 \leq v]-v)^2\right\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

MEDIANA MULTIDIMENSIONAL

Varias definiciones de la mediana de una muestra de IR^p han sido revisadas por Small (1990) [6]; tales como la L_1-mediana, Oja-simplex mediana, la semi-espacio mediana, la simplicial-depth mediana y la mediana de la ley direccional, etc...

Todas estas diferentes definiciones generalizan la definición usual de la mediana unidimensional.

Damos una definición de la curva mediana multidimensional basada sobre aquella de la semi-espacio mediana dada por ([6] *p.* 270).

Definición 2. La semi-espacio mediana de los puntos $X_1, ..., X_n \in IR^p$ es el conjunto de los puntos $\mu \in IR^p$ que maximiza $D(\mu)$, donde

$$D(\mu) = \inf_{H \supset \mu}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[X_i \in H]}\right]$$

el inf se toma sobre todos los semi-espacios coteniendo μ.

En el caso unidimensional

$$D(\mu) = \inf_{H \supset \mu}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[X_i \in H]}\right]$$

$$= min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[-\infty,\mu]}(X_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[\mu,\infty[}(X_i)\right\}$$

ya que $\mu \in H$ implica $[\mu, \infty[\subset H$ ó $]-\infty, \mu] \subset H$, por consiguiente:

$$min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[-\infty,\mu]}(X_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[\mu,\infty[}(X_i)\right\} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[X_i \in H]}$$

y puesto que $H_0 = [-\infty, \mu]]$, $H_1 = [\mu, \infty[$ son dos semi-espacios conteniendo μ, se tiene:

$$D(\mu) = min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[-\infty,\mu]}(X_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[\mu,\infty[}(X_i)\right\}.$$

La mediana de una v.a. X, según la definición 2, es el conjunto de puntos $\hat{\mu}$ que maximizan:

$$\inf_{H \supset \mu} P[X \in H] = min\{F(\mu), 1-F(\mu^-)\}$$

el inf se toma sobre todos los semi-espacios conteniendo μ. Cuando F es continua, $\hat{\mu}$ es solución de $F(\mu) = \frac{1}{2}$.

En el caso de las cópulas multidimensionales $C(x_1, ..., x_p)$, definimos la mediana de C de la misma manera, cambiando μ por $C^{-1}(v)$, $v \in [0, 1]$, donde

$$C^{-1}(v) = \{(x_1, ..., x_p) : C(x_1, ..., x_p) = v\}$$

Definición 3. La curva mediana de una cópula $C(x_1, ..., x_p)$ es el conjunto de los puntos $(x_1, ..., x_p)$ maximizando

$$D(v) = \inf_{H \supset C^{-1}(v)}\{P[X \in H]\}, v = C(x_1, ..., x_p)$$

el inf se toma sobre todos los semi-espacios conteniendo $C^{-1}(v)$.

Observación. Si $C^{-1}(v) \subset H$ con H un semi-espacio, se tiene:

$$K(v) \leq P\ [X \in H] \text{ o bien } 1 - K(v) \leq P\ [X \in H]$$

así pues:

$$\min \{K(v),\ 1 - K(v)\} \leq D(v)$$

además $H_0 = \{(x_1, ..., x_p) \leq C^{-1}(v)\}$ y $H_1 = \{(x_1, ..., x_p) \geq C^{-1}(v)\}$ son dos semi-espacios conteniendo $C^{-1}(v)$, por consiguiente:

$$D(v) = \min \{K(v),\ 1 - K(v^-)\}$$

Proposición 3. La curva mediana de C es:

$$\left\{\left(x_1,...,x_{p-1},\psi\left(x_1,...,x_{p-1},K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right),\ si\ C(x_1,...,x_{p-1},1) \geq K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} \cup$$
$$\left\{(x_1,...,x_{p-1},1),\ si\ C(x_1,...,x_{p-1},1) < K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Ésta es exactamente la curva de la función $(x_1,...,x_{p-1}) \to \psi\left(x_1,...,x_{p-1},K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

Demostración. Teniendo en cuenta la observación precedente, el $\max_v D(v)$ es alcanzado para $\hat{v}$ solución de $K(v)=\frac{1}{2}$ y $C^{-1}(\hat{v})=C^{-1}\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

MEDIANA DE UNA MUESTRA DE UNA CÓPULA C

Sin pérdida de generalidad, consideramos una cópula $C(x, y)$.

Sea $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ una muestra aleatoria procedente de $C(x, y)$ y $V_i = C(X_i, Y_i)$, $i = 1, ..., n$, la muestra aleatoria de $V = C(X, Y)$.

Observemos primero que:

$D(v) = \min \{K(v),\ 1 - K(v^-)\} = \inf_{H \supset v} P[V \in H]$ donde $V = C(X, Y)$.

La mediana de $V_1, ..., V_n$, según la definición 2 es también el conjunto de puntos $v \in [0, 1]$ que maximizan:

$$\inf_{H\supset v} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[V_i \in H]} = min\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[0,v]}(V_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[v,1]}(V_i)\right\}(*)$$

el inf se toma sobre todos los semi-espacios conteniendo v. Sea $\hat{v}$ maximizando la cantidad (*).

Definición 4. Se llama mediana de $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ el conjunto

$$M = \{(X_i, Y_i) : \hat{v} = C(X_i, Y_i)\}.$$

En el caso donde C es desconocida y $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ una muestra de C, se considera la seudo-muestra

$$V_i = \frac{1}{n-1}\sum_{j \neq i}^{n} 1_{[X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i]}$$

y el estimador $K_n(v)$ de $K(v) = P[C(X, Y) \leq v]$ donde $K_n(v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[V_i \leq v]}$.

Sea $K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \inf\left\{v : K_n(v) \geq \frac{1}{2}\right\}$, entonces el conjunto

$M = \left\{(X_i, Y_i) : V_i = K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ es un estimador de la mediana de la muestra $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$.

Proposición 4:

a) $K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y $T_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ son dos estimadores consistentes de $K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$.

b)

$$K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - T_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ donde } T_n(v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{[C(X_i, X_i) \leq v]}.$$

c) $\sqrt{n}\left[K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \xrightarrow{P} 0$ en el caso unidimensional.

Demostración. Observemos primero que: $K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > v \Leftrightarrow \frac{1}{2} > K_n(v)$

Y $K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \leq v \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq K_n(v)$.

Se tiene:

a)

$$P\left[\left|K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| > \varepsilon\right] \leq$$
$$P\left[K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > \varepsilon\right] + P\left[K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) < -\varepsilon\right] =$$
$$= P\left[K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) > K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \varepsilon\right] + P\left[K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) < K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \varepsilon\right] \leq$$
$$\leq P\left[\frac{1}{2} > K_n\left(\varepsilon + K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] + P\left[\frac{1}{2} \leq K_n\left(-\varepsilon + K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right] =$$
$$= P\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{2} - K\left(\varepsilon + K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) > \sqrt{n}\left(K_n\left(\varepsilon + K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) - K\left(\varepsilon + K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right] +$$
$$+ P\left[\sqrt{n}\left(\frac{1}{2} - K\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \varepsilon\right)\right) \leq \sqrt{n}\left(K_n\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \varepsilon\right) - K\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \varepsilon\right)\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ya que

$\sqrt{n}(K_n(v) - K(v))$ es asintóticamente normal

b) De la misma manera se demuestra que

$$K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-T_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\xrightarrow{P}0.$$

MEDIANA DE UNA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Sea (X, Y) un vector aleatorio de función de distribución $H(x, y)$, de distribuciones marginales F y G respectivamente.

Como para las cópulas, definimos la función cuantil asociada a H por:

Definición 5. La función cuantil asociada a H es:

$$\psi_H(x,v)=\begin{cases}\inf\{y: H(x,y)\geq v\}, si\ x\geq F^{-1}(v)\\ G^{-1}(1),\ si\ x<F^{-1}(v)\end{cases}$$

donde G^{-1} (1) es la cota esencial superior de Y.

La cota esencial inferior de Y es sup $\{y : G(y) = 0\} = G^{-1}(0)$.

Propiedades:

1) $\psi_H(x, v)$ es decreciente en x, creciente en v.

2) $\lim_{x\to\infty} \psi_H(x,v)=G^{-1}(v)$.

3) Si $G(G^{-1}(0)) < v$, entonces, $\psi_H(x, v) > G^{-1}(0)$.

4) Si $v \leq G(G^{-1}(0))$, entonces:

$[\psi_H(x_0, v) = G^{-1}(0) \Leftrightarrow x_0 \geq \inf\{x : H(x, G^{-1}(0)) \geq v\}]$

Demostración:

3) Observemos que se verifica siempre: $\psi_H(x, v) \geq G^{-1}(0)$.

Por tanto: $\psi_H(x, v) = G^{-1}(0) \Leftrightarrow v \leq H(x, G^{-1}(0)) \leq G(G^{-1}(0)) < v$, contradicción.

4) Por definición de $\psi_H(x, v)$ se tiene: $\psi_H(x_0, v) > G^{-1}(0) \Leftrightarrow H(x_0, G^{-1}(0)) < v \Leftrightarrow x_0 < \inf\{x : H(x, G^{-1}(0)) \geq v\}$.

Utilizando la función $\psi_H(x, v)$, podemos definir la mediana de la ley H de la misma manera que aquélla definida para las cópulas.

La mediana de H es una curva que divide el espacio en dos semi-espacios de probabilidad superior o igual a $\frac{1}{2}$.

Proposición 5. Sea (X, Y) un vector aleatorio de función de distribución $H(x, y)$, de distribuciones marginales F y G de X e Y, respectivamente.

La mediana de H es:

a)

$$\left\{\left(x,\psi_H\left(x,K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right), x\geq F^{-1}\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\}\cup$$
$$\left\{\left(x,G^{-1}(1)\right), x<F^{-1}\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\}.$$

donde $K(v) = P[H(X, Y) \leq v]$.

b) Si F y G son continuas, entonces $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ y en este caso, la mediana de H es la imagen recíproca de la mediana de la cópula C por la transformación $T(x, y) = (F(x), G(y))$.

Demostración:

a) Designamos pos ζ la curva

$$\left\{\left(x,\psi_H\left(x,K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right), x\geq F^{-1}\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\}\cup$$
$$\left\{\left(x,G^{-1}(1)\right), x<F^{-1}\left(K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right\}.$$

se tiene $:(X,Y)<\zeta \Leftrightarrow H(X,Y)<K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$, esto es por definición de $\psi_H\left(X,K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, por consiguiente:

$$P[(X,Y)<\zeta]=P\left[H(X,Y)<K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]\leq\frac{1}{2}$$

es decir, $P[(X,Y)\geq\zeta]\geq\frac{1}{2}$.

Por otra parte,

$$[(X,Y)>\zeta]=\begin{cases}\left\{(X,Y)>\zeta, H(X,Y)>K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\cup\\ \left\{(X,Y)>\zeta, H(X,Y)=K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\end{cases}$$

y

$$\left[H(X,Y)>K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right]=\begin{cases}\left\{(X,Y)>\zeta, H(X,Y)>K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\cup\\ \left\{(X,Y)\in\zeta, H(X,Y)>K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\end{cases}$$

Para tener

$$P[(X,Y) > \zeta] \leq P\left[H(X,Y) > K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{2}$$

es suficiente demostrar que

$$P\left\{(X,Y) > \zeta, H(X,Y) = K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} = 0$$

Ahora bien,

$$P\left\{(X,Y) > \zeta, H(X,Y) = K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} =$$

$$E\left(P\left[Y > \psi_H\left(x, K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right), H(x,Y) = K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) / X = x\right]\right) =$$

$$E\left(P\left[\psi_H\left(x, K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < Y < y_0 = \sup\left\{y : H(x,y) = K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} / X = x\right]\right)$$

$$y \quad P\left[\psi_H\left(x, K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < Y < y_0 / X = x\right] =$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P\left[x - \varepsilon < X \leq x, \psi_H\left(x, K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < Y < y_0\right]}{F(x) - F(x - \varepsilon)} = 0$$

ya que:

$$P\left[x - \varepsilon < X \leq x, \psi_H\left(x, K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) < Y < y_0\right] \leq$$

$$H\left(x, y_0^-\right) - H\left(x, \psi_H\left(x, K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right) =$$

$$K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - K^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Aplicación numérica. Dos ejemplos de aproximación de la curva mediana son tratados (ver gráficas).

Ejemplo 1:

Un caso no arquimediano

Sea (X, Y) un vector aleatorio de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & si\ y > x \geq 0 \\ 0 & sino \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$H(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - xe^{-y} & si\ y \geq x \geq 0 \\ 1 - e^{-y} - ye^{-y} & si\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

La cópula asociada a $H(x, y)$ es:

$$C(u,v) = \begin{cases} u + (\log(1-u))e^{-G^{-1}(v)} & si\ v \geq u + (1-u)\log(1-u) \\ v & si\ no \end{cases}$$

La distribución marginal de X es: $F(x) = 1 - e^{-x}$.

La distribución marginal de Y es: $G(y) = 1 - e^{-y} - ye^{-y}$.

Ejemplo 2:

Un caso arquimediano $C(x, y) = (x^{-1} + y^{-1} - 1)^{-1}$, $0 \leq x, y \leq 1$.

Para la aproximación de la mediana de estos dos ejemplos, utilizamos el algoritmo siguiente:

1) Generar u_i, v_i independientes e uniformes sobre [0, 1]

2) $y_i = H_i^{-1}(v_i) = \inf\left\{v : \frac{\partial}{\partial u} C(u_i, v) \geq v_i\right\}$

3) (u_i, y_i), $(i = 1, ..., n)$, es una muestra de C.

Primer método:

4) Calcular la mediana de $z_i = C(u_i, y_i)$. Sea M esta mediana.

5) Elegir (u_i, y_i) tal que $|z_i - M| \leq \varepsilon$ (ε es un error) y representar los puntos elegidos.

Segundo método que utiliza $K_n(v)$ de Genest y Rivest.

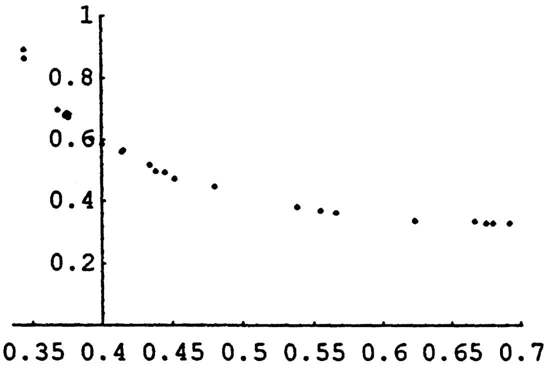
6) $r_i = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i}^{n} 1_{[U_j \leq U_i, Y_j \leq Y_i]}$

7) $K_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} 1_{[r_i \leq v]}$

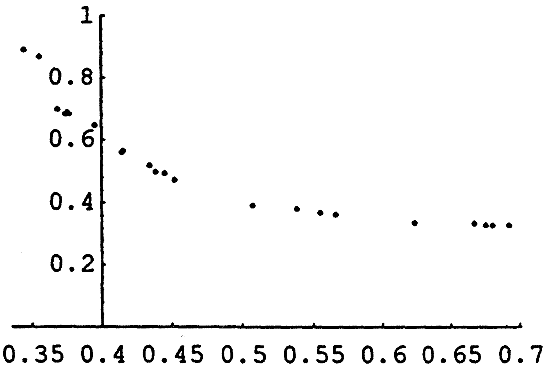
8) Calcular $K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y representar los puntos (u_i, y_i) tales que : $\left|r_i - K_n^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \varepsilon$ (ε un error).

Ejemplo 1. Aproximación de la mediana de C(u, v) asociada a H(x, y) para una muestra de tamaño 2000 y un error = 0.005.

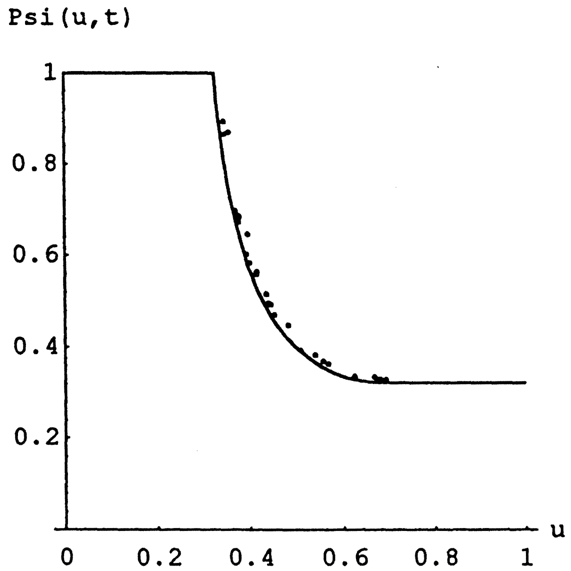
Primer método



Segundo método

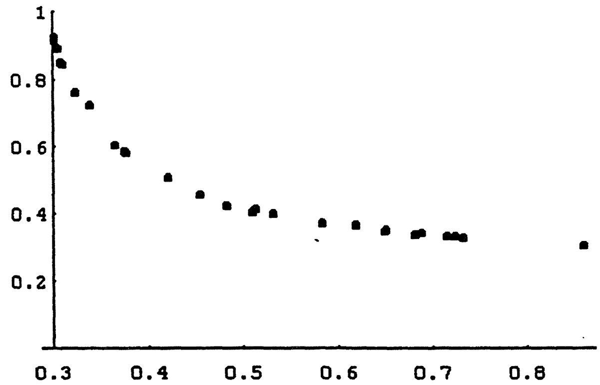


La curva mediana y las dos aproximaciones sobre la misma gráfica.

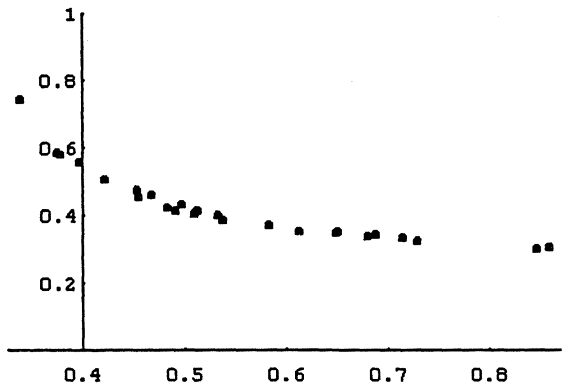


Ejemplo 2. Aproximación de la mediana de la cópula arquimediana, C(u, v), de parámetro 1 para una muestra de tamaño 1500 y un error = 0.005.

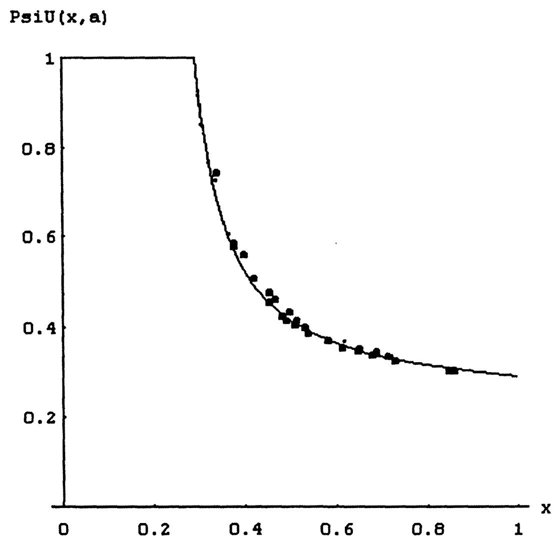
Primer método



Segundo método



La curva mediana y las dos aproximaciones sobre la misma gráfica.



AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado mediante un proyecto marroquí-andaluz financiado por la Junta de Andalucía.

REFERENCIAS

1. Chakak, A. & Ezzerg, M. (1996) Quantil fonctions for bivariate distributions with given margins, *Journal de Mathématiques du Maroc* **4,** 39-50.

2. Conway, D.A. (1979) Multivariate distributions with specified marginals, Stanford University technical report. Stanford, CA: Stanford University.

3. Genest, C. & Mackay, R.J. (1986) Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données, *The canadian Journal of statistics* **14,** 145-159.

4. Genest, C. & Rivest, L.P. (1993) Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas, *J. Amer. Statist. Assoc.* **88,** 1034-1043.

5. Serfling, R.J. (1980) Approximation theorems of Mathematical statistics. John Wiley & Sons, Inc. New York.

6. Small, C.G. (1990) A Survey of Multidimensional Medians. *International Statistical Review* **58,3**, pp. 263-277. Printed in Great Britain.

7. Reuven Y. Rubinstein (1981) Simulation and Monte Carlo Method. John Wiley & Sons.

8. Barbe, P. (1996) On Kendall's Process, vol. 58, **2,** August 1996. Printed in Belgium, Reprinted from Journal of multivariate analysis by Academic Press, New York and London.