Rev.R.Acad.Cien.Exact.Fis.Nat. (Esp)
Vol. 92, N.º 4, pp 415-421, 1998
Monográfico: Problemas complejos de decisión

CARACTERIZACIÓN DE EQUILIBRIOS DE NASH PERFECTOS NO SUAVES EN UNA CLASE DE JUEGOS DIFERENCIALES

(juego diferencial/equilibrio de Nash perfecto/ecuación cuasilineal/recurso no renovable)

JUAN PABLO RINCÓN ZAPATERO

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas). Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Avda. Valle de Esgueva, 6. 47011 Valladolid

RESUMEN

En este trabajo presentamos una generalización del nuevo método desarrollado en [1] para la caracterización de equilibrios de Nash perfectos en el marco de los juegos diferenciales. Los resultados aquí presentados caracterizan equilibrios de Nash perfectos formados por estrategias *feedback* continuas, de clase C^1 a trozos, como soluciones, en sentido generalizado, de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuasilineales. Estudiamos también los equilibrios simétricos en un juego de explotación, en un horizonte limitado, de un recurso no renovable de propiedad común y determinamos la forma analítica de la solución, así como ciertas de sus propiedades cualitativas. Comparamos el equilibrio de Nash con la solución cooperativa, demostrando que la gestión descoordinada da lugar a una sobreexplotación del recurso.

ABSTRACT

This paper is devoted to provide an extension to the results developed in [1]. We characterize continuous and piecewise smooth subgame perfect Nash equilibria in differential games as solutions, in a generalized sense, of a quasilinear system of partial differential equations. We also study a symmetric nonrenewable resource game of common property on a bounded horizon, being able to determine its analytic solution as well as some qualitative properties. We compare the non cooperative solution with the cooperative one, arriving to the well known tragedy of the commons, that is to say, the resource is overexploited with the noncooperative management.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la teoría de juegos ha sido espectacular en los últimos años. Una de las ramas más prometedoras de esta disciplina es la de juegos dinámicos y, en particular, la de juegos diferenciales. Esta materia ha encontrado aplicaciones en campos tan dispares como la Biología, la Economía o la Ingeniería [2], [3], [4]. Si en problemas de control óptimo es deseable disponer de una solución *feedback,* es decir, basada en el valor actual de la variable de estado, en los problemas de decisión interactiva, como son los juegos diferenciales, es fundamental no restringir las reglas de decisión de los agentes a controles dependientes únicamente de la variable temporal, dado que, en general, esto daría lugar a decisiones suboptimales en etapas intermedias del juego. Sin embargo, la mera utilización de estrategias *feedback* no implica que las decisiones tomadas a lo largo del juego sean óptimas cualquiera que sea el valor de las variables temporal y de estado. Esta última propiedad es conocida en la literatura como perfección en los subjuegos.

Tradicionalmente, el estudio de los equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos se ha basado en el sistema de ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman, que debe verificar el vector de funciones de valor óptimo de los jugadores, si son suficientemente suaves. Una vez determinada una solución del sistema, las condiciones de optimalidad proporcionan, al menos de forma implícita, las estrategias óptimas. Sin embargo, como se muestra en [1], bajo ciertas condiciones es posible establecer una ecuación en derivadas parciales que caracteriza directamente al equilibrio de Nash. El objetivo principal de este trabajo es establecer condiciones suficientes para la determinación de equilibrios perfectos, continuos y de clase C^1 a trozos, como soluciones, en sentido generalizado, de un sistema cuasilineal de ecuaciones en derivadas parciales.

Aplicamos los resultados teóricos al estudio de un modelo de explotación de un recurso no renovable en un horizonte temporal acotado. A pesar de su estructura analítica sencilla, su estudio riguroso no puede tildarse de elemental, sino que aparecen ciertas peculiaridades que deben tenerse en cuenta. Por otra parte, el modelo es suficientemente ilustrativo del tipo de interacciones que surgen en juegos de propiedad común.

En la Sección 2 planteamos de modo general un juego diferencial no cooperativo de N jugadores y definimos la estructura de la información de que disponen los jugadores. En la Sección 3 exponemos el enfoque propuesto en [1] y establecemos una nueva condición suficiente con hipótesis más débiles que las allí planteadas. Posteriormente analizamos un juego diferencial simétrico de explotación de un recurso no renovable, cuando el valor residual de las existencias del recurso es proporcional a dichas existencias. Dada la simetría del juego, el sistema de ecuaciones se reduce a una única ecuación. Con hipótesis adecuadas, probamos que existe una única solución, continua y de clase C^1 a trozos, que se identifica con un equilibrio de Nash perfecto del juego. Hallamos también la solución cooperativa y la comparamos con la no cooperativa, resaltando las diferencias estructurales. En particular, la solución eficiente es más conservacionista que la no cooperativa.

2. MATERIAL Y MÉTODOS

Consideramos un juego diferencial no cooperativo de N jugadores, en un horizonte temporal fijo y acotado. Es decir,

$$\max_{u^i}\left\{J^i\left(t_0,x_0,u^1,\dots,u^N\right)=\int_{t_0}^{T}L^i\left(t,x,u^1,\dots,u^N\right)dt+S^i\left(T,x(T)\right)\right\} \quad (1)$$

$$\text{s. a.: } \dot{x}=f\left(t,x,u^1,\dots,u^N\right), \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$u^i(t) \in U^i$, $\forall t \in [t_0, T]$, U^i un conjunto abierto de IR, (4)

para $i = 1, 2, \dots, N$. Suponemos que las funciones L^i, f y S^i son de clase C^2. Mediante x denotamos la variable de estado, mientras que u^i representa la variable de control del i-ésimo jugador. Asociamos a cada u^i una función continua y de clase C^1 a trozos ϕ^i: $[t_0, T] \times \mathrm{IR} \to U^i$ tal que $u^i(t) = \phi^i(t, x(t))$ y (2) admite una única solución en $[t_0, T]$. Mediante $\mathcal{U}^i$ denotamos el conjunto de funciones ϕ^i y $\mathcal{U} = \mathcal{U}^1 \times \dots \times \mathcal{U}^N$.

La ecuación

$$\dot{x} = f(t, x, \phi^1(t, x), \dots, \phi^N(t, x)),$$

$$x(t_0) = x_0,$$

está asociada a la N-upla de estrategias *feedback* $(\phi^1, \dots, \phi^N) \in \mathcal{U}$. Consideramos únicamente el caso unidimensional, aunque los resultados son válidos en el caso de n variables de estado y n variables de control para cada jugador.

Una N-upla de estrategias $\hat{\phi} \in \mathcal{U}$ es un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos, si para todo $i = 1, \dots, N$,

$$J^i\left(t,x,\left(\phi^i|\hat{\phi}_{-i}\right)\right)\le J^i\left(t,x,\hat{\phi}\right), \quad \forall\phi^i\in\mathcal{U}^i, t\in\left[t_0,T\right], x\in\mathrm{IR},$$

donde

$$\hat{\phi}_{-i}=\left(\hat{\phi}^1,\dots,\hat{\phi}^{i-1},\hat{\phi}^{i+1},\dots,\hat{\phi}^N\right) \text{ y } \left(\phi^i|\hat{\phi}_{-i}\right)=\left(\hat{\phi}^1,\dots,\hat{\phi}^{i-1},\phi^i,\hat{\phi}^{i+1},\dots,\hat{\phi}^N\right).$$

Un equilibrio de Nash perfecto en los subjuegos es un equilibrio de Nash del juego, cualquiera que sea la condición inicial que se considere. Si todos los jugadores emplean la estrategia correspondiente de un equilibrio de Nash perfecto, entonces ninguno tiene incentivos para desviarse unilateralmente de tal recomendación, cualquiera que sea la situación que se produzca a lo largo del juego. En contraposición al equilibrio de Nash programado, es decir, basado en controles dependientes únicamente de la variable temporal, el equilibrio basado en estrategias *feedback* permite la actualización continua de las decisiones de los agentes, puesto que se tiene en cuenta el valor que toma la variable de estado. Esta circunstancia hace posible que el equilibrio sea robusto. Como hemos notado en la Introducción, no todo equilibrio basado en estrategias *feedback* es equilibrio perfecto; pudiera ocurrir que tales reglas no fueran óptimas para algunas condiciones iniciales.

El enfoque habitual utilizado en la literatura para la determinación de equilibrios de Nash perfectos en los subjuegos se basa en la programación dinámica y en la resolución del sistema de ecuaciones en derivadas parciales de Hamilton-Jacobi-Bellman. En general, este sistema es no lineal, por lo que aparecen dificultades en su estudio y resolución analítica. En [1] propusimos otro método para la caracterización de equilibrios de Nash en estrategias *feedback*, estableciendo condiciones necesarias y suficientes en términos de un sistema cuasilineal de ecuaciones en derivadas parciales. Este tipo de ecuaciones son, en general, más asequibles en su análisis.

Para conveniencia del lector, exponemos a continuación el método seguido en [1] en la determinación de equilibrios de Nash perfectos. La aplicación del principio del máximo de Pontryagin al juego diferencial (1)-(4) permite la eliminación del vector de variables de coestado y la obtención del siguiente sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\hat{H}^i_{u^it}+\hat{H}^i_{u^ix}f+\sum_{j=1}^{N}\hat{H}^i_{u^iu^j}\left(\hat{\phi}^j_t+\hat{\phi}^j_xf\right)+\hat{H}^i_{u^ix^i}\left(-\hat{H}^i_x-\sum_{j=1}^{N}\hat{H}^i_{u^j}\hat{\phi}^j_x\right)=0,$$

$$i,j=1,\dots,N, \quad (5)$$

donde $\hat{H}^i_{\{\cdot\}}(t,x,u)$ denota $H^i_{\{\cdot\}}$ evaluado en $(t, x, \hat{\phi}, (L^i_{ui} / f_{ui}) (t, x, \hat{\phi}))$ y H^i es el hamiltoniano del jugador i-ésimo:

$$H^i(t,\ x,\ u^1\ ,...,\ u^N,\ \lambda^i) =$$
$$= L^i(t,\ x,\ u^1\ ,...,\ u^N) + \lambda^i f(t,\ x,\ u^1\ ,...,\ u^N),$$

con λ^i su variable de coestado. Las variables en subíndices indican derivación parcial.

En el sistema de ecuaciones en derivadas parciales (5) las variables dependientes son t, x y las independientes ($\hat{\phi}^1$,..., $\hat{\phi}^N$). Dicho sistema debe satisfacerse por cualquier equilibrio de Nash perfecto suficientemente suave.

Por otra parte, la condición de transversalidad que debe verificar la variable de coestado, tal y como determina el principio del máximo, junto a la condición de maximización del mismo, proporciona condiciones finales en $t = T$, dadas implícitamente por las ecuaciones:

$$L^i_{u^i}\left(T,x,\hat{\phi}\right)+f_{u^i}\left(T,x,\hat{\phi}\right)S^i_x(T,x)=0, \quad i=1,...,N. \tag{6}$$

En [1] mostramos que una solución suave del sistema (5) verificando la condición final (6) y que constituye un equilibrio de Nash del juego (estático) con los hamiltonianos como funciones de pago, proporciona un equilibrio perfecto en los subjuegos del juego diferencial. Por tanto (5)-(6) no sólo establece condiciones necesarias de optimalidad, sino también suficientes, las cuales se establecen en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Sea $\hat{\phi} \in \mathcal{U}$ una solución global de clase C^1 del sistema (5) con condición final (6), tal que $f_{u^i}\left(t,x,\hat{\phi}\right)\neq 0$ y*

$$H^i(t,\ x,\ (\phi^i|\hat{\phi}_{-i}),\ \Gamma^i(t,\ x)) \leq H^i(t,\ x,\ \hat{\phi},\ \Gamma^i(t,\ x)),$$
$$\forall t \in [t_0,\ T],\ x \in \mathbb{R},\ i = 1\ ,...,\ N, \tag{7}$$

para todo $\phi^i \in \mathcal{U}^i$, donde $\Gamma^i(t,\ x) = -\ f^{-1}_{u^i}(t,\ x,\ \hat{\phi})\ L^i_{u^i}(t,\ x,\ \hat{\phi})$. Entonces, $\Gamma^i(t,\ x) = V^i_x(t,\ x)$ y $\hat{\phi}$ es un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Aquí $V^i(t,\ x)$ denota la función valor óptimo del jugador i-ésimo:

$$V^i(t,x)=\max_{\phi^i}\left\{\int_t^T L^i\left(s,y,\left(\phi^i|\hat{\phi}_{-i}\right)\right)ds + S^i(T,x(T))\ \middle|\right.$$
$$\dot{y}=f\left(s,y,\left(\phi^i|\hat{\phi}_{-i}\right)\right),\ s\in(t,T);\ y(t)=x,$$
$$\left.\phi^i(s,y(s))\in U^i\ \ \forall s\in(t,T)\right\}.$$

3. RESULTADOS

El resultado principal de este trabajo es la debilitación de las hipótesis de suavidad impuestas en el Teorema 1 a las soluciones de (5)-(6).

Teorema 2. *Sea $\hat{\phi} \in \mathcal{U}$ una solución global, continua y de clase C^1 a trozos del sistema (5) con condición final (6) y tal que $f_{u^i}(t,\ x,\ \hat{\phi}) \neq 0$. Supongamos que la región en la que $\hat{\phi}^i$ no es suave es unión finita de curvas: $C^i_j=\left\{(t,x):\theta^i_j(t,x)=0\right\}$, donde θ^i_j es de clase C^1, para $i = 1\ ,...,\ N$, $j = 1\ ,...,\ i_m$ y se verifica:*

i) Para todo $i = 1\ ,...,\ N$, $j = 1\ ,...,\ i_m$ y para todo $(t,\ x) \in [t_0,\ T] \times \mathbb{R}$

$$\theta^i_{jt}(t,x)+\theta^i_{jx}(t,x)f\left(t,x,\hat{\phi}\right)\neq 0.$$

ii) Existe una única solución $\hat{y}(s;t,x)$ de (2) con $\phi = \hat{\phi}$ cualquiera que sea la condición inicial $(t,\ x)$; esta trayectoria tiene intersección con el conjunto

$$C=\cup^N_{i=1}\cup^{i_m}_{j=1}C^i_j$$

a lo sumo en un número finito de puntos.

Si para todo $i = 1\ ,...,\ N$ y todo $\phi^i \in \mathcal{U}^i$ se verifica (7), entonces ϕ es un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Demostración. La idea de la prueba es completamente análoga a la que aparece en [1] y consiste en demostrar que la variable de coestado del jugador i-ésimo es igual a la variación de su función valor óptimo respecto al valor inicial de la variable de estado. Una vez comprobado esto, el resto de la demostración es exactamente la contenida en el Teorema 3.1 de [1], por lo que remitimos a esta referencia al lector interesado.

Dada la condición inicial $(t,\ x) \in ([0,\ T] \times X) - C$, sea $\tau^i_j(t,\ x)$ uno de los instantes de corte con C^i_j de la trayectoria $\hat{y}(s;t,x)$, solución de (2). Es claro que $\hat{y}(s;t,x)$ es de clase C^1 respecto a $(s,\ t,\ x)$; esto puede probarse con un argumento de inducción sobre i, j. Por definición, $\theta^i_j\left(\tau^i_j(t,x),\ \hat{y}\left(\tau^i_j(t,x);t,x\right)\right)=0$ y se verifican las hipótesis del Teorema de la Función Implícita para la ecuación:

$$\theta^i_j(s,\ \hat{y}(s;\ t,\ x)) = 0, \tag{8}$$

debido a que *i)* implica

$$(\partial/\partial s)\theta^i_j(s,\hat{y}(s;t,x))=\theta^i_{js}+\theta^i_{jx}d\hat{y}/ds=\theta^i_{js}+\theta^i_{jx}f\neq 0.$$

En consecuencia, la solución $s=\tau^i_j(t,x)$ de (8) es de clase C^1 y, por tanto, la composición: $\hat{y}\left(\tau^i_j(t,x);(t,x)\right)$, también lo es.

Procedemos a continuación a renombrar los instantes de corte de la trayectoria $\hat{y}$ con el conjunto C: $t = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_q < \tau_{q+1} = T$. De esta forma,

$$J^i(t,x,\hat{\phi}) = \int_t^T L^i(s,\hat{y}(s;t,x),\hat{\phi}(s,\hat{y}(s;t,x)))ds + S^i(T,\hat{y}(T;t,x))$$

$$= \sum_{n=0}^{q} \left\{ \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} L^i(s,\hat{y}(s;t,x),\hat{\phi}(s,\hat{y}(s;t,x)))ds \right\} + S^i(T,\hat{y}(T;t,x)).$$

Aplicando la regla de Leibniz de derivación bajo signo integral y dado que $\hat{\phi}$ es continuo, tenemos:

$$\begin{aligned}(\partial/\partial x)J^i(t,x,\hat{\phi}) = \sum_{n=0}^{q} \Big\{ &\int_{\tau_n}^{\tau_n+1} (\partial/\partial x)L^i(s,\hat{y}(s;t,x),\hat{\phi}(s,\hat{y}(s;t,x)))ds \\ &+ L^i(\tau_{n+1},\hat{y}(\tau_{n+1};t,x),\hat{\phi}(\tau_{n+1},\hat{y}(\tau_{n+1};t,x)))(\partial/\partial x)\tau_{n+1} \\ &- L^i(\tau_n,\hat{y}(\tau_n;t,x),\hat{\phi}(\tau_n,\hat{y}(\tau_n;t,x)))(\partial/\partial x)\tau_n \Big\} \\ &+ (\partial/\partial x)S^i(T,\hat{y}(T;t,x))\end{aligned}$$

$$= \int_t^T (\partial/\partial x)L^i(s,\hat{y}(s;t,x),\hat{\phi}(s,\hat{y}(s;t,x)))ds + (\partial/\partial x)S^i(T,\hat{y}(T;t,x)).$$

Se ha utilizado el hecho de que $(\partial/\partial x)\tau_0 = (\partial/\partial x)\tau_{q+1} = 0$. La demostración se concluye como en [1], probando que el término de la derecha en la última igualdad coincide con $\Gamma^i(t, x)$. Sustituyendo Γ^i por $(\partial/\partial x)J^i$ en la condición de maximización (7) e integrando respecto a t se obtiene el resultado.

Por otra parte, si $(t, x) \in C$, entonces consideramos una sucesión de puntos $(t_n, x_n) \to (t, x)$ tales que $(t_n, x_n) \notin C$. Tomando límite en $(\partial/\partial x)J^i$ $(t_n, x_n, \hat{\phi})$ se aplican los comentarios anteriores.

Nota 1. La condición *ii)* del Teorema 2 se cumple imponiendo condiciones bien conocidas que garantizan existencia y unicidad de soluciones de (2). En cuanto a condiciones suficientes que aseguran número finito de intersecciones de la trayectoria solución de (2) con C, puede consultarse [5].

Nota 2. La demostración del Teorema 2 nos muestra que $\hat{\phi}$ es equilibrio de Nash aún cuando consideremos la clase más amplia $\mathcal{D}$ de reglas *feedback* posiblemente discontinuas tales que existe una única solución de (2). Es decir, si el sistema (5)-(6) admite una solución continua de clase C^1 a trozos, entonces la condición (7) asegura que dicha solución es óptima en la clase $\mathcal{D}$.

En el resto de esta sección aplicamos los resultados anteriores al estudio del problema de la gestión óptima de un recurso natural. Este problema es clásico en la literatura económica, sea que el recurso es de naturaleza renovable o no y se consideren diferentes situaciones, como pueden ser su explotación en régimen de libre acceso, de monopolio o de competición. La gestión interactiva por varios agentes de un recurso natural en un horizonte temporal no acotado ha recibido mucha atención recientemente, *e.g.* [6], [7], [8], [9]. Sin embargo, se ha prestado poca atención al caso de horizonte finito, quizá debido a que la consideración de un horizonte temporal ilimitado permite, cuando el problema es autónomo, analizar únicamente equilibrios perfectos estacionarios, lo que facilita el análisis.

Suponemos que el recurso no renovable es de propiedad común y se explota por $N > 1$ agentes de forma descentralizada o no cooperativa en un horizonte temporal acotado. La evolución de las existencias del recurso está regida por la ecuación diferencial:

$$\dot{x} = -\sum_{i=1}^{N} u^i, \; x(0) = x_0 > 0, \tag{9}$$

donde x_0 es la cantidad inicial del recurso. Mediante $u^i \geq 0$ denotamos la tasa de explotación del i-ésimo jugador, mientras que su pago es:

$$J_i(0,x_0,u) = \int_0^T \exp(-r_i t)L_i(u^i)dt + \exp(-r_i T)S_i(x(t_f)), \quad 0 < T < \infty. \tag{10}$$

Consideramos $u^i(t) = \phi^i(t, x(t))$, con $\phi^i : [0, T] \times [0, x_0] \to [0, \infty]$ funciones continuas, de clase C^1 a trozos, tales que

$$\phi^i(t, 0) = 0. \tag{11}$$

La función de utilidad instantánea del i-ésimo jugador es L^i; $r_i \geq 0$ y S^i denotan el tanto de preferencia y el valor residual del recurso en el instante T, respectivamente.

Suponemos que L^i es de clase C^3 en el intervalo $(0, \infty)$, monótona creciente y estrictamente cóncava. La función S^i es de clase C^2 en el intervalo $(0, x_0)$.

Denotamos mediante ε^i, $i = 1, \ldots, N$, el inverso del índice de Arrow-Pratt de aversión al riesgo del i-ésimo jugador:

$$\varepsilon^i(u^i) = -L_i'(u^i)/L_i''(u^i).$$

Las hipótesis impuestas implican $\varepsilon^i(u^i) \geq 0$.

Consideraremos únicamente el caso simétrico, es decir: $L^i = L$, $S^i = S$, $r_i = r$, $\mathcal{U}^1 = \mathcal{U}$, $i = 1, \ldots, N$, de forma que el sistema (5) se reduce a una sola ecuación:

$$(\partial/\partial\tau)\hat{\phi} + E(\hat{\phi})(\partial/\partial x)\hat{\phi} = r\varepsilon(\hat{\phi}) \tag{12}$$

y la condición inicial es:

$$\hat{\phi}(0, x) = \varphi(x), \tag{13}$$

donde $E(u) = Nu - (N-1)\,\varepsilon(u)$, $\varphi(x) = (L')^{-1}(S'(x))$ y $\tau = T - t$.

En [1] los autores estudiaron cuestiones relacionadas con la existencia y unicidad del equilibrio de Nash, así como ciertas propiedades cualitativas, teniendo en cuenta funciones de utilidad y residuales bastante generales. Sin embargo, dichos resultados no se aplican cuando la función residual es lineal respecto a la variable de estado, es decir, $S(x) = \alpha x$ y el tanto de preferencia es nulo, $r = 0$. Esto es debido a que $\phi(\tau, x) = k = (L')^{-1}(\alpha)$ es solución de (12)-(13), pero no es admisible, dado que no verifica (11). Con estas observaciones surge de manera natural la cuestión de si es óptima o no la regla de decisión discontinua y estacionaria dada por

$$\tilde{\phi}(\tau,x)=\begin{cases}0, & \text{si } x=0,\\ k, & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Como veremos en el siguiente teorema, con ciertas hipótesis sobre el grado de aversión al riesgo de los jugadores, el equilibrio de Nash del juego simétrico es una estrategia *feedback* continua.

Teorema 3. *Sea $S(\alpha) = \alpha x$ y $r = 0$ en el juego simétrico* (9)-(11) *y supongamos que se verifica:*

i) $\varepsilon'(u) < N/(N-1)$ *en el intervalo* $(0, k)$.

ii) $\varepsilon(0) = 0$.

Entonces, la N-upla $(\hat{\phi},\ldots,\hat{\phi})$, *donde:*

$$\hat{\phi}(t,x)=\begin{cases}k, & si\, x/(T-t)>E(k),\\ E^{-1}(x/(T-t)), & si\, x/(T-t)\le E(k),\end{cases}\qquad (14)$$

es un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Demostración. Consideramos el problema (12) asociado al juego simétrico (9)-(11):

$$(\partial/\partial\tau)\hat{\phi}+E(\hat{\phi})(\partial/\partial x)\hat{\phi} = 0, \qquad (15)$$

$$\hat{\phi}(0,x)=k,\ \text{si}\ x>0, \qquad (16)$$

junto con la condición de admisibilidad

$$\hat{\phi}(\tau,0)=0,\ \text{si}\ \tau>0 \qquad (17)$$

donde $\tau = T - t$. Este es un problema mixto de valores en la frontera que, dada la hipótesis *ii)*, puede expresarse como uno puro de valores iniciales, definiendo $\hat{\phi}(0, x) = 0$, si $x < 0$. La condición *i)* implica que E es estrictamente creciente en $[0, k]$, luego $E(k) > 0$, ya que $E(0) = 0$ por *ii)*. En estas condiciones, la (única) solución continua de clase C^1 a trozos es (14), [10]. En el plano (x, τ), las características que emanan del semieje $x > 0$ tienen pendiente positiva $1/E(k)$, mientras que las que parten del semieje $x < 0$ son rectas verticales. En consecuencia, el cono con vértice en el origen de coordenadas y limitado por las rectas $x = 0$, $x = E(k)\tau$ se completa con la onda simple $E^{-1}(x/\tau)$. La condición *i)* asegura la existencia de E^{-1}. La solución decrece de forma continua desde k hasta $E^{-1}(0) = 0$ en este haz de rectas y es constante en cada una de ellas. Es inmediato que esta solución es continua (salvo en $(x, \tau) = (0, 0)$, lo cual puede solventarse dando un valor arbitrario a la solución) y de clase C^1 a trozos. En la notación del Teorema 2, $C = \{(\tau, x) : \theta(\tau, x) \equiv x - E(k)\tau = 0\}$. Probaremos que la trayectoria generada por $(\hat{\phi},\ldots,\hat{\phi})$ es un equilibrio perfecto, pues cumple los requerimientos del Teorema 2.

En primer lugar, la solución de (9) está bien definida en cualquier intervalo de la forma $[t, T]$, debido a que $\hat{\phi}$ es localmente lipschitziana respecto x y está acotada; además, $\hat{y}$ es convexa respecto a τ (Corolario 1), por lo que corta a la recta C a lo sumo en un punto interior al primer cuadrante del plano (x, τ); veamos que lo hace de manera transversal:

$$\begin{aligned}\theta_t+\theta_x f &= \theta_t+\theta_x\left(-N\hat{\phi}\right)\\ &= E(k)-N\hat{\phi}\\ &= E(k)-Nk\\ &= -(N-1)\varepsilon(k)\\ &\neq 0.\end{aligned}$$

En la tercera igualdad hemos utilizado el hecho de que $\hat{\phi}|_C \equiv k$..

En segundo lugar, dado que el hamiltoniano de cada uno de los jugadores es una función estrictamente cóncava respecto a u^i, (7) se satisface automáticamente. En consecuencia $(\hat{\phi},\ldots,\hat{\phi})$ es un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Nota 3. Las condiciones *i)* y *ii)* del Teorema 3 implican que la tasa de sustitución intertemporal, $\varepsilon(u)/u$, es menor que $N/(N-1)$. Por tanto, la continuidad de la solución depende del número de jugadores y de la tasa de sustitución intertemporal. Cuando no se verifica la anterior desigualdad, la solución de (15)-(17) es discontinua. El estudio de la optimalidad de esta solución es el objeto de un nuevo trabajo que estamos culminando en la actualidad. La lección es que si el coeficiente de aversión al riesgo de los agentes no es lo suficientemente elevado, entonces tiene lugar una dura competencia por la obtención del recurso, de manera que el afán por adaptarse instantáneamente de manera óptima a las estrategias del resto de agentes provoca la discontinuidad de la solución.

A continuación analizamos algunos aspectos cualitativos del equilibrio de Nash perfecto y de la trayectoria asociada. Consideramos los conjuntos:

$$X_1 = \{(t, x) : 0 \le t < T,\ x \le Nk(T-t)\},$$

$$X_2 = \{(t, x) : 0 \le t < T,\ x > Nk(T-t)\}.$$

Proposición 1. *Supongamos que se verifican las hipótesis del Teorema 3 y sea* $\hat{\phi}$ *la estrategia dada por* (14). *Se verifica:*

i) $\hat{\phi}$ *es creciente respecto a x.*

ii) La trayectoria solución de (9) *asociada a* $\hat{\phi}$, $\hat{y}(s;\ t, x)$, *es una función convexa respecto a s.*

iii) Si la condición inicial pertenece al conjunto X_1, *entonces el recurso se agota en el instante T, mientras que si pertenece al conjunto* X_2, *entonces no se agota en el instante T.*

Demostración. La afirmación *i)* es inmediata si tenemos en cuenta las hipótesis efectuadas sobre E. En cuanto a *ii)*, se verifica que $\hat{y}(s;\ t, x)$ es dos veces derivable en los intervalos $(t,\ \tau(t, x))$ y $(\tau(t, x),\ T)$, donde $\tau(t, x)$ es el instante de tiempo en el intervalo (t, T) de corte de la trayectoria con C, si existe. De hecho, $\hat{y}(s;\ t, x) = k$ en $[0,\ \tau(t, x)]$. En el intervalo $(\tau(t, x),\ T)$ se verifica:

$$
\begin{aligned}
\left(d^2/ds^2\right)\hat{y}(s) &= (d/ds)\left(-N\hat{\phi}(s,\hat{y}(s))\right)\\
&= -N\left(\hat{\phi}_t(s,\hat{y}(s)) + \hat{\phi}_x(s,\hat{y}(s))(d/ds)\hat{y}(s)\right)\\
&= -N\left(\hat{\phi}_t(s,\hat{y}(s)) + \hat{\phi}_x(s,\hat{y}(s))\left(-N\phi(s,\hat{y}(s))\right)\right)\\
&= -N\left(\hat{\phi}_t(s,\hat{y}(s)) - \hat{\phi}_x(s,\hat{y}(s))E\left(\hat{\phi}(s,\hat{y}(s))\right) - (N-1)/N\varepsilon\left(\hat{\phi}(s,\hat{y}(s))\right)\right)\\
&= (N-1)\varepsilon\left(\hat{\phi}(s,\hat{y}(s))\right) \geq 0.
\end{aligned}
$$

La cuarta igualdad se deduce ya que $\hat{\phi}$ verifica (15) y teniendo en cuenta $\tau = T - t$. Para probar *iii)* razonaremos sobre el plano (x, τ), teniendo en cuenta que hemos invertido el tiempo. El sistema característico asociado a (15)-(17) es:

$$(d/d\tau)x = E\left(\hat{\phi}\right), \tag{18}$$

$$(d/d\tau)\hat{\phi} = 0, \tag{19}$$

con condiciones iniciales

$$x(0,\beta) = \begin{cases} k, & \text{si } \beta > 0 \\ 0, & \text{si } \beta < 0 \end{cases}, \quad \hat{\phi}(0,\beta) = 0, \quad \forall \beta \in \mathrm{IR}.$$

En la región $x > E(k)\tau$ las características son rectas de pendiente $1/E(k)$; en la región $x < 0$ son rectas de pendiente infinito. Por (19), la solución es constante a lo largo de las características, tomando los valores k en la primera región y 0 en la segunda. Las trayectorias óptimas con condiciones iniciales (x, τ) pertenecientes a la región $x > E(k)\tau$, son rectas de pendiente $1/(Nk)$, menores que la pendiente de la recta C que delimita las dos regiones de suavidad de la solución: $1/E(k)$. En consecuencia, dichas trayectorias penetrarán en la región ocupada por la onda simple si la condición inicial pertenece a X_1. Una vez en la región ocupada por la onda simple, la trayectoria converge hacia $x = 0$, debido a la propiedad *ii)* y a que $\hat{\phi}(0) = 0$. Por otra parte, si la condición inicial pertenece a X_2, entonces la trayectoria corta al eje $x > 0$ cuando $t = T$, es decir, $\hat{y}(T;\ t, x) > 0$.

Si los agentes coordinan sus estrategias para alcanzar el mayor pago conjunto posible, entonces surge un juego de características diferentes. Dado que, en general, el resultado no será un equilibrio de Nash, la solución no será robusta, es decir, estable respecto a desviaciones unilaterales de los jugadores, de manera que supondremos que los acuerdos entre los agentes son vinculantes. La solución eficiente u óptimo de Pareto, ϕ^P, en el caso simétrico, se obtiene al resolver el problema de control óptimo:

$$\max_u \int_0^T L(u)dt + \alpha x(T) \tag{20}$$

$$s.a.:\quad \dot{x} = -Nu, \tag{21}$$

$$x(0) = x_0. \tag{22}$$

La ecuación en derivadas parciales asociada, junto con las condiciones inicial y frontera son:

$$(\partial/\partial\tau)\phi^P + N\phi^P(\partial/\partial x)\phi^P = 0, \tag{23}$$

$$\phi(0,x) = k_p, \tag{24}$$

$$\phi(\tau,0) = 0, \tag{25}$$

donde $k_p = (L')^{-1}\ (N\alpha)$.

El siguiente resultado se enuncia sin demostración, dado que es una mera repetición, incluso más elemental, de los argumentos establecidos en la demostración del Teorema 3.

Teorema 4. *La solución feedback del problema de control* (20)-(22) *es*

$$\phi^P(t,x) = \begin{cases} k_p, & si\ x/(T-t) > Nk_p, \\ x/(N\tau), & si\ x/(T-t) \leq Nk_p, \end{cases}$$

Una observación muy interesante es que la cuestión de la existencia de solución *feedback* del problema (20)-(22) es independiente del coeficiente de aversión al riesgo de los jugadores y de N. Esto es debido a que todos los agentes actúan de forma coordinada y no hay competencia por la obtención del recurso. Es inmediato que la trayectoria asociada a ϕ^P no corta a la recta $x = Nk_p\tau$ y que ϕ^P es constante a lo largo de dicha trayectoria, puesto que ésta coincide con las características de (23)-(25).

Dado que $k_p < k$, es evidente que el conjunto de condiciones iniciales que conducen al agotamiento del recurso de forma cooperativa está contenido en el de la explotación no cooperativa. Además, el esfuerzo de extracción del recurso es mayor en el caso descentralizado.

Corolario 1. *Con las hipótesis del Teorema 3, en el juego simétrico* (9)-(11) *la solución cooperativa es más conservacionista que el equilibrio de Nash perfecto.*

Demostración. El resultado es consecuencia de $k_p < k$ y de que tanto la solución cooperativa como la no cooperativa decrecen de forma continua a medida que disminuye x. Son posibles dos casos: 1. $E(k) < Nk_p$ y 2. $E(k) > Nk_p$.

1. Sean los conjuntos:

$$\Omega_1 = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, Nk_p(T - t) \leq x\},$$

$$\Omega_2 = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, E(k)(T - t) \leq x \leq Nk_p(T - t)\},$$

$$\Omega_3 = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq E(k)(T - t)\}.$$

En $\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\hat{\phi} = k > k_p = \phi^p$, mientras que en Ω_3, puesto que $\varepsilon(x/(N\tau)) > 0$, se verifica $x/\tau > E(x/(N\tau)$ y debido a la monotonía de E, $\hat{\phi}(\tau, x) = E^{-1}(x/\tau) > x/(N\tau) = \phi^p$.

2. Sean los conjuntos Ω_1 junto con:

$$\Omega'_2 = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, Nk_p(T - t) \leq x \leq E(k)(T - t)\},$$

$$\Omega'_3 = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq Nk_p(T - t)\}.$$

En Ω'_2 $\phi^p = k_p$ y el valor mínimo de $\hat{\phi}$ es $E^{-1}(Nk_p)$. Dado que $\varepsilon \geq 0$, se verifica $Nk_p > E(k_p)$ y debido a que E es creciente, se obtiene el resultado. En Ω'_3 el razonamiento es el mismo empleado en la región Ω_3.

4. DISCUSIÓN

La hipótesis de que las interacciones entre los agentes en un determinado entorno económico o social evolucionan de manera dinámica, es más realista que la modelización estática o repetida, situación esta última en la que los jugadores se encuentran en cada etapa ante el mismo problema de decisión interactiva. La consideración de la variable temporal en el campo continuo dificulta el análisis debido a las complicaciones técnicas que surgen. Si bien en problemas de control óptimo la elección de reglas de ciclo abierto o de ciclo cerrado es irrelevante desde el punto de vista de la optimización (pero posiblemente no desde un punto de vista práctico), en problemas planteados como un juego diferencial la propiedad de perfección en los subjuegos es inexcusable si se pretende dar un carácter normativo a la solución. Esta es una dificultad añadida a la anterior.

El enfoque propuesto en [1] y continuado en este trabajo proporciona un método alternativo al habitual, basado en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, para el análisis del equilibrio de Nash *feedback* perfecto en los subjuegos. La utilidad del método queda patente en el análisis efectuado sobre la aplicación contenida en este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Rincón-Zapatero, J.P., Martínez, J. & Martín-Herrán, G. (1998) New method to characterize subgame perfect Nash equilibria in differential games. *J. Optim. Theory Appl.* **96,** 377-395.

2. Friedman, A. (1971) *Differential Games.* Wiley, New York.

3. Melhmann, A. (1988) *Applied Differential Games.* Plenum Press, New York.

4. Baçar, T. & Olsder, G.J. (1995) *Dynamic Noncooperative Game Theory.* Academic Press, London.

5. Fleming, W.H. & Rishel, R.W. (1975) *Deterministic and Sthocastic Optimal Control.* Springer Verlag, New York.

6. Levhari, D. & Mirman, L.J. (1980) The great fish war: an example using the Cournot-Nash solution. *Bell J. Econ.* **11,** 322-334.

7. Clemhout, S. & Wan, Y.H. (1985) Dynamic common property resources and environmental problems. *J. Optim. Theory Appl.* **46,** 471-481.

8. Benhabib, J. & Radner, R. (1992) The joint exploitation of a productive asset: a game-theoretic approach. *Econ. Theory,* **2,** 155-190.

9. Sorger, G. (1998) Markov-perfect Nash equilibria in a class of resource games. *Econ. Theory,* **11,** 79-100.

10. Godlewski, E. & Raviart, P.A. (1991) *Hyperbolic Systems of Conservation Laws.* Mathématiques et Applications, Ellipses, Paris.

SERIE «GALERÍA PRESIDENTES»
REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

D. Alfonso Peña Boeuf

X Presidente

1958-1966

Nacido en Madrid el 23 de enero de 1888.
Elegido Académico el 22 de diciembre de 1933 tomó posesión el 6 de junio del año siguiente, leyendo su discurso sobre «La resonancia en las estructuras».
Fue Bibliotecario de la Academia desde 1939 a 1944, año en que fue nombrado Vicepresidente, cargo que ocupó hasta el 11 de junio de 1958 en que pasó a desempeñar la Presidencia hasta su fallecimiento el 1 de febrero de 1966.