Rev.R.Acad.Cienc.Exact.Fís.Nat. (Esp)
Vol. 91, N.º 1, pp 13-16, 1997
Matemáticas

UNA INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL EQUILIBRIO PARA VARIABLES ALEATORIAS USUALES

(caracterización/función característica/transformada de Fourier)

Mariano Ruiz Espejo

Departamento de Economía Aplicada Cuantitativa. Universidad Nacional de Educación a Distancia, 28040 Madrid

Presentado por Fco. Javier Girón, 8 de mayo de 1996

RESUMEN

Caracterizamos las variables aleatorias usuales con esperanza matemática finita por una curva en $\mathbb{R}^3$ con ciertas propiedades. Esta caracterización completa la ya hecha por Ruiz Espejo (1993) de cualidades similares a la caracterización de una variable aleatoria usual por la función característica o transformada de Fourier, o por la función de distribución.

ABSTRACT

We characterize the usual random variables with finite mathematical expectation for a curve in $\mathbb{R}^3$ with certain properties. This characterization completes the one already given by Ruiz Espejo (1993) with similar properties to the characterization of a usual random variable given by the characteristic function or Fourier's transformed function, or by the distribution function.

MATERIAL Y MÉTODOS

En recientes trabajos, Ruiz Espejo (1990, 1992, 1993) definió y estudió el concepto de equilibrio para variables aleatorias usuales, viendo algunas aplicaciones del mismo. En particular, se vió en el Teorema 1 de Ruiz Espejo (1993) que dada una variable aleatoria usual X con esperanza finita y función de densidad f, las soluciones de equilibrio de orden p para X *son* $(x, (p), y\ (p))$, que son a su vez diferenciables con derivadas

(1)

$$\begin{cases} \dfrac{dx(p)}{dp} = \dfrac{y(p)-\mu}{[y(p)-x(p)]f[x(p)]} \\ \dfrac{dy(p)}{dp} = \dfrac{x(p)-\mu}{[y(p)-x(p)]f[y(p)]} \end{cases}$$

además

(2)

$$x(p) < \mu < y(p)\ \forall p \in (0, 1),$$

por lo que $x(p) \neq y(p)\ \forall p \in (0,1)$,

$$\lim_{p\to 1} x(p) = \lim_{p\to 1} y(p) = \mu,$$

y extendiendo $x(p)$ e $y(p)$ al valor $x(1) = y(1) = \mu$, se verificaba que

$$x'(1) = -y'(1) = \frac{1}{2f(\mu)}.$$

Así el lugar geométrico de los puntos $\{p, x(p), y(p)): p \in (0,1]\}$ lo llamaremos curva o camino de equilibrio de la variable aleatoria X, cuyos extremos son:

Para $p = 1$, el punto $(1, \mu, \mu) \in \mathbb{R}^3$, y para $p = 0$, el punto $(0, a, b) \in \mathbb{R}^3$ que determinará una asíntota si uno de entre a ó b es finito y el otro infinito, o una rama infinita en general si $a = -\infty$, y $b = \infty$. Además de (1) y (2) se tiene que

$$x'(p) > 0 \text{ e } y'(p) < 0\ \forall p \in (0, 1].$$

También la curva o camino de equilibrio de la variable aleatoria X puede interpretarse como la variedad diferencial intersección de las dos superficies cilíndricas dadas por las ecuaciones de equilibrio

$$\int_x^y f(s)\, ds = 1$$

$$\int_x^y sf(s)\, ds = (1-p)\mu$$

donde las variables son $(p, x, y) \in \mathbb{R}^3$, aunque nos restringimos al intervalo de $p \in (0, 1]$ que geométricamente tiene sentido como parámetro, y puede ser extendido sin problema al intervalo (0, 2) guardando simetría la curva de equilibrio respecto al punto $(1, \mu, \mu)$.

Si la curva de equilibrio la denotamos

$$\mathbf{c}\,(p) = (p,\, x\,(p),\, y\,(p)) \text{ siendo } p \in (0, 2),$$

su vector tangente será localmente

$$\mathbf{c}'\,(p) = \left(1,\ \frac{y\,(p)-\mu}{[y\,(p)-x\,(p)]f[x\,(p)]},\ \frac{x\,(p)-\mu}{[y\,(p)-x\,(p)]f[y\,(p)]}\right),$$

pudiéndose calcular rutinariamente la curvatura y la torsión de la curva de equilibrio por las fórmulas de Frénet (Abellanas, 1965). Veamos a continuación un teorema recíproco.

RESULTADOS

Teorema 1. Para cada parametrización en p de una curva en $\mathbb{R}^3$ del tipo $(p, x\,(p), y\,(p))$, con las propiedades:

a) $\forall p \in (0,1]$, $x'\,(p) > 0$ e $y'\,(p) < 0$ con

$$x'\,(1) = -y'\,(1) = \frac{1}{2f(\mu)}.$$

b) $a = x\,(0) < x\,(1) = \mu = y\,(1) < y\,(0) = b$.

Entonces, las ecuaciones simultáneas

$$1-p = \int_{x(p)}^{y(p)} f(s)\, ds$$

$$(1-p)\,\mu = \int_{x(p)}^{y(p)} sf\,(s)\, ds,$$

determinan una función f continua, positiva no nula, función de densidad de una variable aleatoria usual X sobre (a, b) única, con $E\,(X) = \mu$ (salvo casos particulares en que no exista tal esperanza matemática). ■

Demostración. Consiste en ver la biyección existente entre las funciones f positivas no nulas con recorrido (a, b) y las parametrizaciones en p de curvas del tipo $(p, x\,(p), y\,(p))$ en $\mathbb{R}^3$ indicadas en el enunciado.

Aplicación. Dada la curva $(p, x\,(p), y\,(p))$ variando p en [0, 1] y cumpliendo a) y b), existe una función estrictamente positiva f sobre el rango (a, b).

Sea
(3)

$$f(\mu) = \lim_{p\to 1} \frac{1-p}{y\,(p)-x\,(p)} = \lim_{p\to 1} \frac{-1}{y'\,(p)-x'\,(p)} > 0$$

aplicando la regla de l'Hôpital.

Obligando a que $f\,(\bullet)$ verifique simultáneamente

$$1-p = \int_{x(p)}^{y(p)} f\,(s)\, ds$$

$$(1-p)\,\mu = \int_{x(p)}^{y(p)} sf\,(s)\, ds,$$

y derivando ambas ecuaciones respecto a p, tenemos

$$-1 = f\,(y)\, y' - f\,(x)\, x'$$

$$-\mu = yf\,(y)\, y' - xf\,(x)\, x',$$

que son dos ecuaciones lineales no homogéneas con dos incógnitas, $x'\,f\,(x)$ e $y'\,f\,(y)$.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius, tiene solución única pues el determinante de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & -x \end{vmatrix} = -x + y > 0\ \forall p \in (0, 1), \text{ por b).}$$

Para $p = 1$ existirían infinitas soluciones, pero tomamos como valor de f en μ el calculado $f\,(\mu)$ en (3) por la continuidad de f en $x = \mu$. Resolviendo por la regla de Cramer

$$x'\,f(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ y & -\mu \end{vmatrix}}{-x+y} = \frac{-\mu+y}{-x+y} > 0, \text{ que implica}$$

$$f(x) = \frac{1}{x'}\,\frac{-\mu+y}{-x+y} > 0\ \forall x \in (a, \mu).$$

$$y'\,f(y) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -\mu & -x \end{vmatrix}}{-x+y} = \frac{x-\mu}{-x+y} < 0, \text{ que implica}$$

$$f(y) = \frac{1}{y'}\,\frac{-\mu+x}{-x+y} > 0\ \forall y \in (\mu, b),$$

y por tanto f es continua en $(a, \mu) \cup (\mu, b)$. Queda ver que efectivamente

$$\lim_{x\to\mu} f\,(x) = f\,(\mu);$$

$$\lim_{x\to\mu-} f(x) = \lim_{p\to 1-} \frac{-\mu + y(p)}{-x(p) + y(p)} \frac{1}{x'(p)} =$$

$$= \frac{1}{x'(1)} \cdot \lim_{p\to 1-} \frac{y'(p)}{-x'(p) + y'(p)} = \frac{y'(1)}{x'(1)\left[y'(1) - x'(1)\right]} > 0,$$

$$\lim_{y\to\mu+} f(y) = \lim_{p\to 1-} \frac{-\mu + x(p)}{-x(p) + y(p)} \frac{1}{y'(p)} =$$

$$= \frac{1}{y'(1)} \cdot \lim_{p\to 1-} \frac{x'(p)}{-x'(p) + y'(p)} = \frac{x'(1)}{y'(1)\left[y'(1) - x'(1)\right]} > 0,$$

empleando en las segundas igualdades de ambas cadenas la regla de l'Hôpital. Así f es continua en μ si y solo si ambos límites coinciden, es decir si y solo si

$$\frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{x'(1)}{y'(1)},$$

o bien

$$[x'(1)]^2 = [y'(1)]^2,$$

y como por a)

$$sig\,[x'(1)] \neq sig\,[y'(1)],$$

entonces equivale a que

$$x'(1) + y'(1) = 0,$$

cosa cierta por a).

Inyectiva. Sean dos funciones positivas no nulas sobre (a, b), f y g, con la misma curva del tipo a) y b). Debe de verificarse que, denotando $y = y(p)$ y $x = x(p)$,

$$\begin{cases} 1-p = \int_x^y f(s)\,ds \\ (1-p)\,\mu = \int_x^y sf(s)\,ds \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-p = \int_x^y g(s)\,ds \\ (1-p)\,\mu = \int_x^y sg(s)\,ds. \end{cases}$$

Luego restando respectivamente los miembros de las primeras y segundas ecuaciones de ambos sistemas, se tiene

$$\int_x^y \left[f(s) - g(s)\right] ds = 0$$

$$\int_x^y s\left[f(s) - g(s)\right] ds = 0$$

y derivando ambas expresiones respecto a p tenemos

(4)
$$[f(y) - g(y)]\,y' = [f(x) - g(x)]\,x'$$

(5)
$$y\,[f(y) - g(y)]\,y' = x\,[f(x) - g(x)]\,x'.$$

Sustituyendo (4) en (5) queda

$$y\,[f(x) - g(x)]\,x' = x\,[f(x) - g(x)]\,x' \;\forall p \in (0,1).$$

Como $x' > 0$ por a) e $y(p) \neq x(p)$ $\forall p \in (0, 1)$ por b), necesariamente $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (a, \mu)$ y puede extenderse la igualdad a (μ, b) sustituyendo de modo alternativo (4) en (5), y a μ por continuidad de f y g. Es decir, dada la curva $(p, x(p), y(p))$ verificando a) y b), existe una función estrictamente positiva no nula f sobre (a, b), única.

Suprayección. Consiste en ver que toda función de densidad de una variable aleatoria usual tiene asociada su curva de equilibrio, y esto está justificado en el Teorema 1 y Corolarios 1 y 2 de Ruiz Espejo (1993).

Con esto queda probado que es una biyección, siendo f una función de densidad de una variable aleatoria usual X sobre (a, b) con $E(X) = \mu$, por cumplirse para $p \to 0+$

$$\mu = \int_{a+}^{b-} sf(s)\,ds.$$

Si $p = 0$,

$$1 = \int_a^b f(s)\,ds,$$

con lo que queda definitivamente probado que f es función de densidad sobre el intervalo (a, b). ■

Corolario 1. Cualquier variable aleatoria usual puede definirse por su curva de equilibrio, o bien cualquier curva cumpliendo las condiciones dichas en el teorema 1, determina una variable aleatoria usual. ■

DISCUSIÓN

El último resultado caracteriza a tal variable aleatoria así como la función característica o transformada de Fourier, o de la función de distribución de cualquier variable aleatoria usual X.

Observar que para ser curva de equilibrio, ha de existir esperanza matemática de X, y ser finita. Así por ejemplo, para la variable aleatoria usual de Cauchy con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi c\left[1-(x-M)^2/c^2\right]}, \text{ si } x \in \mathbb{R},$$

que no tiene esperanza matemática, hace sus veces en la curva de equilibrio la mediana M. Esta particularidad es solo posible si $a = -\infty$ y $b = \infty$; pues cuando un extremo es infinito, si el otro fuera finito y no existiera la esperanza matemática $E(X)$ entonces no existiría tal curva de equilibrio, por ejemplo en el caso de la distribución de Cauchy truncada en el intervalo $(0, \infty)$.

Si la función de densidad $f(x)$ fuera 0 en cierto punto del interior del recorrido (a, b) y $x = x(p)$ entonces $x'(p) = \infty$ y la curva o camino de equilibrio tendría en la segunda componente del vector tangente un valor infinito.

Es importante señalar que la forma geométrica de la curva de equilibrio clasifica las funciones de densidad usuales sobre (a, b), pero no determina una única variable aleatoria usual. La importancia de la parametrización de la curva de equilibrio es capital. Toda la información sobre la variable aleatoria usual X viene suministrada por el vector tangente en un punto genérico $\mathbf{c}'(p)$ de dicha curva. Así por ejemplo, la clase de funciones de densidad con curva de equilibrio una semirrecta o segmento viene caracterizado por la siguiente proposición.

Proposición 1. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) La curva de equilibrio es convexa en $\mathbb{R}^3$.

b) La función de densidad asociada a la curva de equilibrio es simétrica.

c) La longitud del arco entre dos puntos cualesquiera de la curva de equilibrio, es la distancia usual en $\mathbb{R}^3$ entre dichos puntos. ■

Una consecuencia es que la función de densidad es simétrica si y solo si el coeficiente de curvatura es 0 en todo punto de la curva de equilibrio, y por tanto el coeficiente de torsión se anula, es decir es una curva plana situada en el plano osculador.

También la unicidad de función f continua (con función de distribución F derivable) puede sustituirse más generalmente por unicidad casi segura en F, *c.s. (F)* al ser F caracterizadora de una medida de Stieltges-Lebesgue.

Quedan abiertos problemas acerca de cómo medir la asimetría positiva o negativa usual en términos estadísticos, a ser medida por coeficientes locales geométricos de la curva de equilibrio.

Nota 1. Aunque en nuestro estudio hemos tomado el parámetro p como variable independiente, también habría sido posible parametrizar la curva de equilibrio en función de x ó y. La teoría del cálculo en variedades lo admite pues la matriz Jacobiana es

$$\begin{pmatrix} 1 & -f(x) & f(y) \\ \mu & -xf(x) & yf(y) \end{pmatrix}.$$

Hemos visto que el determinante correspondiente al menor

$$\begin{vmatrix} -f(x) & f(y) \\ -xf(x) & yf(y) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall p \in [0, 1)$$

que determinaba la parametrización explícita

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p). \end{cases}$$

Pero podríamos haberlo hecho también así: De

$$\begin{vmatrix} 1 & f(y) \\ \mu & yf(y) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall p \in [0, 1),$$

permite expresar la curva del modo

$$\forall x \in [a, \mu), \begin{cases} p = p(x) \\ y = y(x), \end{cases}$$

o bien, como

$$\begin{vmatrix} 1 & -f(x) \\ \mu & -xf(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ \forall p \in [0, 1),$$

implica que se puede expresar del modo

$$\forall y \in (\mu, b], \begin{cases} p = p(y) \\ x = x(y). \end{cases}$$

BIBLIOGRAFÍA

1. Abellanas, P. (1965) *Elementos de Matemática.* Viuda de C. Bermejo, Madrid.

2. Ruiz Espejo, M. (1990) Una clase de estimadores de la media poblacional robustos e invariantes lineales. *Metron* **48,** 55-66.

3. Ruiz Espejo, M. & Ruiz Espejo, M.M. (1992) Equilibrated strategy for population variance estimation. *Test* **1,** 79-91.

4. Ruiz Espejo, M. (1993) Un sistema de ecuaciones diferenciales caracterizador del equilibrio para variables aleatorias usuales. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat. Madrid* **87,** 307-318.