Rev.R.Acad.Cien.Exact.Fis.Nat. (Esp)
Vol. 90, N.º 3, pp 157-170, 1996
Matemáticas

APLICACIONES BIVARIANTES QUE REPRESENTAN SEMIGRUPOS ORDENADOS

(orden/utilidad/semigrupos/arquimedianidad/ecuaciones funcionales)

JUAN C. CANDEAL HARO*, ESTEBAN INDURÁIN ERASO** y ESTEBAN OLÓRIZ URRIZA**

Departamento de Análisis Económico. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad de Zaragoza. C/ Doctor Cerrada, 1-3. E-50005. Zaragoza, Spain*. *Departamento de Matemática e Informática.* Universidad Pública de Navarra. Campus Arrosadía, s/n. E-31006. Pamplona, Spain**.

Presentado por José Javier Etayo Miqueo, 10 de Abril de 1996

RESUMEN

Analizamos distintas estructuras ordenadas $(X,\precsim)$ que queremos contemplar como subestructuras de la recta real con su orden natural, y, para ello, introducimos aplicaciones bivariantes $F: X \times X \to \mathbb{R}$ cuyas propiedades nos dan valiosa información sobre la estructura ordenada. Aplicamos nuestro estudio a situaciones en las que además de la ordenación hay algún tipo de estructura adicional de índole algebraica, centrando nuestro interés en la representabilidad de semigrupos ordenados en la recta real aditiva $(\mathbb{R},+,\leq)$.

A.M.S. Subject Class. (1991): 06 F 05

ABSTRACT

In order to consider some ordered structures $(X,\precsim)$ as being isotonic to subsets of the real line $(\mathbb{R},\leq)$ we introduce bivariate functions $F: X \times X \to \mathbb{R}$ and study which properties of the ordered structure can be reflected by properties of the functions F. We apply this idea to the study of the representability of ordered semigroups as subsets of the additive real line $(\mathbb{R},+,\leq)$.

1. INTRODUCCIÓN

Siendo $(X,\precsim)$ un conjunto ordenado, un problema clásico consiste en encontrar unà función $u: X \to \mathbb{R}$ tal que se verifique que $x \precsim y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$. Naturalmente, la existencia de una tal función, llamada habitualmente "función de utilidad" conlleva el que la ordenación sea de cierto tipo, a saber, un preorden completo.

Existen otros tipos de ordenaciones para los que se buscan representaciones a través no de una, sino de dos funciones con valores reales $u,v: X \to \mathbb{R}$ en la forma $x \precsim y \Leftrightarrow u(x) \leq v(y)$. Una tal representación podría interpretarse también a partir de la existencia de una aplicación bivariante $F: X \times X \to \mathbb{R}$ que satisfaga la ecuación funcional $F(x,y) = u(x) - v(y)$ para determinadas funciones $u,v: X \to \mathbb{R}$ y de forma que se tenga $x \precsim y \Leftrightarrow F(x,y) \leq 0$. Esta observación nos lleva de manera natural a la consideración de aplicaciones bivariantes $F: X \times X \to \mathbb{R}$ que nos sirvan para representar ordenaciones.

Más aún, sin partir siquiera de la existencia de una determinada ordenación, una aplicación bivariante $F: X \times X \to \mathbb{R}$ puede servir bajo ciertas condiciones para definirla, mediante, pongamos por caso, $x \precsim y \Leftrightarrow F(x,y) \leq 0$.

Partiendo así de un conjunto X estudiamos posibles aplicaciones bivariantes que puedan definirse en él, y, analizando las mismas, vemos qué condiciones hacen que X acabe dotado de una ordenación con determinadas propiedades adicionales.

Un nuevo estudio hace que no nos detengamos únicamente en la consideración de ordenaciones, sino en la posibilidad de reflejar mediante aplicaciones bivariantes la existencia de determinada estructura algebraica adicional sobre el conjunto X.

Nos centramos así en el estudio de semigrupos ordenados. Obtendremos resultados acerca de representabilidad, en condiciones más generales que las clásicas, en las que, usualmente, se exige que la ordenación sea invariante por traslaciones. En nuestro estudio, tal restricción no se exige a priori.

2. CONCEPTOS Y RESULTADOS PREVIOS

Sea $\precsim$ un preorden completo definido en un conjunto X (i.e.: $\precsim$ es una relación binaria reflexiva, transitiva, y total definida sobre X). Si además $\precsim$ es antisimétrica, decimos que $\precsim$ constituye un orden total y que $(X, \precsim)$ es un conjunto totalmente ordenado.

La notación $x \prec y$ significará la negación de $y \precsim x$. Diremos que $(X, \precsim)$ es representable (respectivamente: pseudo-representable) si existe una función u: $X \to \mathbb{R}$ tal que $x \precsim y$ si y sólo si $u(x) \leq u(y)$ (respectivamente: $x \precsim y \Rightarrow u(y)$), para cualesquiera $x, y \in X$. La función u se denomina función de utilidad (respectivamente: de pseudo-utilidad) para $\precsim$.

Un semigrupo $(S,+)$ es un conjunto S dotado de una operación binaria asociativa, que denotaremos "+".

Un semigrupo S que tenga un elemento neutro e tal que $x+e=x=e+x$ para todo $x \in S$ se denomina monoide. Si cada elemento x de un monoide S tiene un opuesto $-x$ tal que $x+(-x)=(-x)+x=e$ entonces se dice que S es un grupo.

Un semigrupo se dice S conmutativo (o abeliano en el caso de grupos) cuando $x+y=y+x$ para cualesquiera $x, y \in S$.

Un semigrupo $(S,+)$ dotado de un orden total $\precsim$ se dirá semigrupo totalmente ordenado.

Un semigrupo totalmente ordenado se dirá invariante por traslaciones si la relación $\precsim$ verifica que $x \precsim y \Leftrightarrow x+z \precsim y+z \Leftrightarrow z+x \precsim z+y$ para todo $x,y,z \in S$. (En particular, un semigrupo totalmente ordenado invariante por traslaciones S es siempre cancelativo o regular, esto es: $x+z=y+z \Leftrightarrow x=y \Leftrightarrow z+x=z+y$ para cualesquiera $x,y,z \in S$).

Dado un semigrupo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$, un elemento $x \in S$ se dirá positivo (respectivamente: negativo) cuando $x \prec x+x$ (respectivamente: cuando $x+x \prec x$). (Obsérvese que en el caso de darse la propiedad de invariancia por traslaciones, un elemento $x \in S$ es positivo (respectivamente: negativo) si y solamente si $y \prec x+y$ (respectivamente: $x+y \prec y$) para todo $y \in S$).

El conjunto de los elementos positivos (respectivamente: negativos) de S constituye el cono positivo (respectivamente: el cono negativo) de S, que denotaremos S^+ (respectivamente: S^-). En el caso de tener invariancia por traslaciones, los conos positivo y negativo son semigrupos ya que si $x, y \in S^+$ (respectivamente: S^-) entonces $x+y$, $y+x \in S^+$ (respectivamente: S^-). (Obsérvese también que, bajo la hipótesis de invariancia por traslaciones, S únicamente puede tener un elemento e que no sea ni positivo ni negativo. En tal caso e debe ser, a fortiori, el elemento neutro de la operación +, y en consecuencia S es un monoide. Además, resulta claro que en este caso x es positivo (respectivamente: negativo) si y sólo si $e \prec x$ (respectivamente: $x \prec e$)).

Un semigrupo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$ se dice:

(i) positivo (respectivamente: negativo) si consiste únicamente de elementos positivos (respectivamente: negativos),

(ii) aditivamente representable (respectivamente: pseudo-representable) cuando haya una función de utilidad (respectivamente: de pseudo-utilidad) u para $\precsim$ que sea además homomorfismo (i.e.: $u(x+y)=u(x)+u(y)$, para cualesquiera $x, y \in S$). La función u se dice entonces utilidad aditiva (respectivamente: pseudo-utilidad aditiva).

Un semigrupo positivo $(S,+,\precsim)$ se dice:

(i) arquimediano si para todo $x, y \in S$ con $x \prec y$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y \prec n.x$, $\left(n.x = x + \overset{n \text{ veces}}{\cdots} + x\right)$.

(ii) superarquimediano si para todo $x, y \in S$ tales que $x \prec y$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1).x \prec n.y$.

Un semigrupo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$ se dice arquimediano (respectivamente: superarquimediano) si su cono positivo S^+ es arquimediano (respectivamente: superarquimediano) y su cono negativo S^- es también arquimediano (respectivamente: superarquimediano) cuando se le dota del orden opuesto $\precsim_{op}$, definido mediante $x \precsim_{op} y \Leftrightarrow y \precsim x$ $(x, y \in S)$.

OBSERVACIÓN 1: Nótese que para un grupo totalmente ordenado invariante para traslaciones $(G,+,\precsim)$ es suficiente definir estas propiedades de arquimedianidad únicamente para elementos positivos, debido a la existencia del opuesto $-x$ de cada elemento x. Este hecho deja de ser válido para un semigrupo, al no ser cierto en general que la arquimedianidad o superarquimedianidad de un cono implique la del otro. Como ejemplo, considérese $([0,+\infty) \times \mathbb{R},+,\precsim_L)$ con la suma "+" definida coordenada a coordenada, y el orden lexicográfico $\precsim_L$ definido como $(a,c) \precsim_L (b,d)$ si $a<b$ o $a=b$, $c \leq d$. En este semigrupo el cono S^- es arquimediano pero S^+ no lo es.

Para el caso de grupos totalmente ordenados invariantes por traslaciones, la existencia de una función de utilidad aditiva fue caracterizada por Hölder, ya en 1901. Este resultado clave puede enunciarse como sigue:

TEOREMA 1. *(Hölder, 1901): Un grupo totalmente ordenado invariante por traslaciones $(G,+,\precsim)$ es aditivamente representable si y solamente si es arquimediano.*

DEMOSTRACIÓN: Véase (1), p. 300. ■

OBSERVACIÓN 2: El teorema anterior deja de ser válido si en lugar de grupos consideramos semigrupos, puesto que la propiedad arquimediana no garantiza ya la existencia de una representación aditiva: Considérese, por ejemplo, el semiplano lexicográfico $((0,+\infty) \times \mathbb{R},+,\precsim_L)$ donde la suma "+" se define coordenada a coordenada y

$\precsim_L$ es el orden lexicográfico. Es un hecho bien conocido (véase por ejemplo (2) o (3)) que la estructura anterior no admite ninguna representación mediante función de utilidad, ni siquiera no aditiva.

Así, para caracterizar la representabilidad aditiva de semigrupos totalmente ordenados invariantes por traslaciones es necesario exigir alguna nueva condición, más restrictiva todavía que la propiedad arquimediana. Una condición de ese tipo fue introducida en (4). Alguna condición equivalente apareció más tarde en la literatura (véase (5)). Un resultado clave queda recogido en el siguiente teorema.

TEOREMA 2:

a) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para un semigrupo positivo* $(S,+,\precsim)$ *totalmente ordenado e invariante por traslaciones:*

   (i) $(S,+,\precsim)$ *es aditivamente representable,*

   (ii) $(S,+,\precsim)$ *es superarquimediano.*

b) *En el caso de grupos totalmente ordenados invariantes por traslaciones podemos añadir la verificación de la propiedad arquimediana a las equivalencias anteriores de a).*

c) *Un semigrupo totalmente ordenado e invariante por traslaciones* $(S,+,\precsim)$ *es aditivamente representable si y sólo si sus conos positivo y negativo son aditivamente representables.*

DEMOSTRACIÓN: La equivalencia del apartado a) está probada, esencialmente, en (4), (Véase por ejemplo, (6), pp 230 y ss., (7), pp 88 y ss, o (8), Ex. 12 en 3.2). Una prueba completa aparece en (5). ■

OBSERVACIÓN 3. Es interesante hacer notar que alguna de las demostraciones del teorema de Hölder (véase, por ejemplo, (1)) se basa en la construcción de una pseudo-representación con núcleo cero que, en consecuencia, resulta inyectiva y por tanto, función de utilidad. (Esta idea no funciona ya para semigrupos). La demostración que se da en (5) para semigrupos totalmente ordenados invariantes por traslaciones se desarrolla en dos fases: En primer lugar se obtienen adecuadas pseudo-representaciones aditivas, y después se demuestra que entre ellas hay alguna que es además inyectiva.

3. APLICACIONES BIVARIANTES Y ORDENACIONES

Estudiamos a continuación propiedades de ordenaciones que quedan reflejadas por propiedades de aplicaciones bivariantes asociadas. (En un contexto bastante más abstracto, esta idea genérica aparece también en (9).

Sea X un conjunto no vacío y sea $F: X\times X \to \mathbb{R}$ una aplicación bivariante. A título de ejemplo, y para fijar ideas, definimos una relación binaria $\mathcal{R}$ en el conjunto X mediante $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow F(x,y)=0$. Con esta simple definición aparecen ya determinadas propiedades que recogemos más adelante en el Lema 1, cuya sencilla prueba omitiremos. Recordemos antes que un preorden es, por definición, una relación binaria reflexiva y transitiva, mientras que un orden parcial es una relación binaria reflexiva, antisimétrica, y transitiva.

OBSERVACIÓN 4: Recalcamos que la definición $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow F(x,y)=0$ es sólo una posibilidad entre muchas otras. Obviamente, estudiar otras opciones de definir relaciones $\mathcal{R}$ a partir de aplicaciones bivariantes F daría lugar a otros resultados, más o menos análogos al Lema 1 que se presenta a continuación. Hemos de remarcar también que a lo largo del presente trabajo no necesariamente definiremos una F a partir de una $\mathcal{R}$, y viceversa, como $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow F(x,y)=0$. De hecho, ocurrirá que en ciertos contextos las aplicaciones bivariantes que se manejen tomarán siempre valores estrictamente positivos.

LEMA 1: Sea X *un conjunto no vacío y sea* $F: X\times X \to \mathbb{R}$ *una aplicación bivariante. Definimos una relación binaria* $\mathcal{R}$ *en el conjunto* X *mediante* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow F(x,y)=0$. *Se tienen así las siguientes propiedades:*

i) $\mathcal{R}$ *es total o completa si* $F(x,y).F(y,x)=0$, *para todo* $x,y\in X$ *tales que* $x\neq y$.

ii) $\mathcal{R}$ *es reflexiva si* $F(x,x)=0$, *para todo* $x\in X$.

iii) $\mathcal{R}$ *es asimétrica si* $|F(x,y)|+|F(y,x)|>0$, *para todo* $x,y\in X$.

iv) $\mathcal{R}$ *es antisimétrica si* $|F(x,y)|+|F(y,x)|>0$, *para todo* $x,y\in X$ *tales que* $x\neq y$.

v) $\mathcal{R}$ *es transitiva si* $|F(x,y)|+|F(y,z)|=0\Rightarrow |F(x,z)|$, *para todo* $x,y,z\in X$.

vi) $\mathcal{R}$ *es negativamente transitiva si* $min\{|F(x,y)|, |F(y,z)|\}\neq 0 \Rightarrow |F(x,z)|\neq 0$, para todo $x,y,z\in X$.

Resulta así, fácilmente, la siguiente Proposición.

PROPOSICIÓN 1: Sea X un conjunto no vacío. Entonces, se tiene:

a) *X estará dotado de un orden total* $\precsim$ *si y sólo si se define una aplicación bivariante* $F: X\times X \to \mathbb{R}$ *cumpliendo las condiciones de i), ii), iv) y v) del Lema 1.*

b) *X estará dotado de un preorden completo* $\precsim$ *si y sólo si se define una aplicación bivariante* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ *cumpliendo las condiciones de i), ii) y v) del Lema 1.*

c) *X estará dotado de un preorden* $\precsim$ *si y sólo si se define una aplicación bivariante* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ *cumpliendo las condiciones de ii) y v) del Lema 1.*

d) *X estará dotado de un orden parcial* $\precsim$ *si y sólo si se define una aplicación bivariante* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ *cumpliendo las condiciones de ii), iv) y v) del Lema 1.*

Dada F, el orden de a), c) o el preorden de b), d) viene dado por $x \precsim y \Leftrightarrow F(x,y) = 0$.

Dado $\precsim$ *orden o preorden correspondiente a los casos a) - d), puede definirse la correspondiente F mediante* $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \precsim y, F(x,y) = 1$ *en otro caso.*

e) *X estará dotado de un orden total* $\precsim$ *si y sólo si se define una aplicación bivariante* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ *cumpliendo las condiciones de i), iii) y vi) del Lema 1.*

Dado F correspondiente al caso e), se define ahora el orden total mediante $x \precsim y \Leftrightarrow F(x,y) \neq 0$).

Dado $\precsim$ *orden total correspondiente al caso e) se puede definir F como* $F(x,y) = 1 \Leftrightarrow y \precsim x, F(x,y) = 0$ *en otro caso.*

A continuación podemos plantearnos qué habrá de cumplirse para que bien un preorden completo bien una ordenación total, sean representables a través de una función de utilidad. Obsérvese que si tenemos ya un preorden ya un orden parcial $\precsim$, definido sobre un conjunto vacío X, la mera existencia de una "función de utilidad" que represente a $\precsim$, esto es, de una aplicación $u: X \to \mathbb{R}$ tal que $x \precsim y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$, impone de entrada fuertes restricciones a $\precsim$, obligando a que sea ya un preorden completo ya un orden total.

OBSERVACIÓN 5: Sea $\precsim$ un preorden completo sobre un conjunto no vacío X, representable por una función de utilidad $u: X \to \mathbb{R}$. Definamos una aplicación bivariante $F: X \times X \to \mathbb{R}$ mediante $F(x,y) = u(y) - u(x)$. Con esta definición resulta que $x \precsim y \Leftrightarrow F(x,y) \geq 0$. Obsérvese además que F verifica así una determinada ecuación funcional, a saber $F(x,y) = u(y) - u(x)$ para cierta función $u: X \to \mathbb{R}$. La ecuación funcional anterior se denomina ecuación de Sincov, y equivale al hecho $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z)$, ecuación intrínseca en el sentido de que sólo depende de F. (Véase (10), p. 95). Es también fácil recuperar una función de utilidad u que represente $\precsim$, a partir de una aplicación bivariante F que satisfaga la ecuación de Sincov: Basta para ello fijar un elemento $x_0 \in X$ y tomar $u(x) = F(x_0,x)$.

Llegamos así al siguiente resultado, cuya demostración omitimos.

PROPOSICIÓN 2: *Sea X un conjunto no vacío. Entonces, se tiene:*

a) *Puede definirse sobre X un preorden completo* $\precsim$ *representable por una función de utilidad si y sólo si existe alguna aplicación bivariante* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ *que es solución de la ecuación funcional de Sincov.*

b) *Puede definirse sobre X un orden total* $\precsim$ *representable por una función de utilidad si y sólo si existe alguna aplicación bivariante* $F: X \times X \to \mathbb{R}$ *que es solución de la ecuación funcional de Sincov, y tal que* $F(x,y) \neq 0$ si $x \neq y$.

En el caso de querer representar órdenes parciales o preórdenes que no sean, en principio, completos, no podemos utilizar funciones de utilidad. Y nos vemos por ello obligados a utilizar algún otro tipo de representación o pseudo-representación. Es frecuente (véase por ejemplo (11)) buscar pseudo-representaciones para preórdenes $\precsim$ definidos en un conjunto no vacío X, que vengan dadas, a través de una función $u\, X \to \mathbb{R}$ en la forma $x \precsim y \Rightarrow u(x) \leq u(y)$. Claro está que una tal pseudo-representación no aporta toda la información posible sobre el preorden $\precsim$, y, por ello, es necesaria la búsqueda de otros tipos de representaciones que caractericen al preorden u orden parcial que se maneje. Una posibilidad significativa consiste en el empleo de dos funciones $u,v: X \to \mathbb{R}$, debiendo estudiar qué deben cumplir para que $x \precsim y \Leftrightarrow u(x) \leq v(y), (x,y \in X)$. Esta idea ha sido frecuentemente utilizada en la literatura. (Véase (12), (13), (14), (15), (16), (17), o (18)). Un caso particular interesante lo constituyen las ordenaciones conocidas como "órdenes intervalo". Se llama así una relación binaria reflexiva $\mathcal{R}$ sobre un conjunto no vacío X que verifica que para cualesquiera $x,y,z,t \in X$ se tiene "$x \mathcal{R}\, y\, , z \mathcal{R}\, t \Rightarrow x \mathcal{R}\, t$ *o* $z \mathcal{R}\, y$". Como puede verse en (17) o en el capítulo 6 de (18), un orden-intervalo $\mathcal{R}$ sobre un conjunto contable X se caracteriza por la existencia de dos funciones $u,v: X \to \mathbb{R}$ tales que $u(x) \leq v(x)$, $x \mathcal{R}\, y \Leftrightarrow u(x) \leq v(y)$, $(x,y \in X)$. Este caso de representabilidad nos conduce de manera natural al empleo de una aplicación bivariante $F: X \times X \to \mathbb{R}$, definida mediante $F(x,y) = v(y) - u(x)$. Además, esta idea generaliza la vista antes para órdenes totales y preórdenes completos que correspondería al caso particular en que u y v coinciden. Nótese que nos aparece también una ecuación funcional, a saber, "$F(x,y)$ se descompone como $F(x,y) = v(y) - u(x)$, $(x,y \in X)$, para ciertas funciones u y v con valores reales". Claramente esto es una "ecuación funcional de la descomponibilidad", ecuación que trataría de representar las funciones de dos variables que pueden expresarse como suma (o diferencia) de funciones de una variable. Algunos autores la denominan "ecuación funcional de la aditividad". (Véase (19)), y también hay quien la denomina "ecuación de la separabilidad". (Véase (20), p. 122). Se tiene así el siguiente resultado, que generaliza el obtenido para preórdenes completos usando la ecuación de Sincov.

PROPOSICIÓN 3: *Sea X un conjunto numerable. Entonces puede definirse sobre X una ordenación, de tipo orden-intervalo,* $\mathcal{R}$, *si y sólo si existe alguna aplicación bivariante* $F : X \times X \to \mathbb{R}$, *que es solución de la ecuación funcional* $F(x,z)+F(z,y)=F(x,y)+F(z,z)$, $F(t,t)\geq 0$, $(x,y,z,t \in X)$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{R}$ es un orden-intervalo, sabemos que existen dos funciones $u,v : X \to \mathbb{R}$ tales que $u(x)\leq v(x)$, $xRy \Leftrightarrow u(x)\leq v(y)$, $(x,y\in X)$. Tomemos ahora $F(x,y)=v(y)-u(x)$. Observamos así que $F(t,t)=v(t)-u(t)\geq 0, (t\in X)$, y además $F(x,z)+F(z,y)=v(z)-u(x)+v(y)-u(z)=v(z)-u(z)+v(y)-u(x)=F(z,z)+F(x,y), (x,y,z\in X)$.

Recíprocamente, si F es una solución de la ecuación funcional $F(x,z)+F(z,y)=F(x,y)+F(z,z)$, $F(t,t)\geq 0$, $(x,y,z,t\in X)$, fijamos un elemento $x_0\in X$ y tomamos $v(y)=F(x_0,y); u(x)=F(x_0,x_0)-F(x,x_0)$. Obtenemos así que $F(x,y)=v(y)-u(x)$ y que $v(x)-u(x)=F(x,x)\geq 0$, $(x,y\in X)$. Basta, por tanto, definir la relación $\mathcal{R}$ como $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow F(x,y)\geq 0$. ■

OBSERVACIÓN 6:

a) La ecuación funcional $F(x,z)+F(z,y)=F(x,y)+F(z,z)$, $F(x,x)\geq 0$, que aparece en el enunciado de la Proposición 3 anterior, es a su vez equivalente a la ecuación funcional $F(x,y)+F(z,t)=F(x,t)+F(z,y)$, $F(x,x)\geq 0$, $(x,y,z,t\in X)$, $F : X\times X\to\mathbb{R}$. Al interpretar $x\mathcal{R}y$ como $F(x,y)\geq 0$, esta ecuación es más acorde con la definición orden-intervalo como una relación $\mathcal{R}$ verificando que para cualesquiera $x,y,z,t\in X$ se tiene "$x\mathcal{R}y, z\mathcal{R}t \Rightarrow x\mathcal{R}t$ *o* $z\mathcal{R}y$".

b) En el caso de ser el conjunto X no numerable, no es suficiente que la relación $\mathcal{R}$ sea un orden-intervalo para que exista una representación a través de dos funciones $u(x)\leq v(x)$, $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow u(x)\leq v(y)$, $(x,y\in X)$. Un contraejemplo (véase (17), p. 42) es la relación $\mathcal{R}$ definida en $\mathbb{R}$ mediante $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow x<y+1, (x,y\in\mathbb{R})$.

c) En la ecuación funcional de la Proposición 3 anterior, hay una situación intermedia entre los preórdenes completos representables, que corresponderían a $F(x,x)=0, (x\in X)$ y el caso general en el que se tiene simplemente $F(x,x)\geq 0$. Tal situación intermedia corresponde a que $F(x,x)=k>0$ para todo $x\in X$, siendo $k\in\mathbb{R}$ cierta constante positiva. Se corresponde con la ecuación funcional $F(x,w)+F(w,y)=F(x,z)+F(z,y)$, con su equivalente $F(x,y)+k=F(x,z)+F(z,y)$ así como con el hecho $v(x)=u(x)+k, (x,y,z,w\in X)$. Cuando X es contable, esta ecuación funcional caracteriza un tipo de ordenaciones que se denominan semiórdenes, definidas como aquellos órdenes-intervalo, $\mathcal{R}$, con la propiedad adicional de que "para todo $x,y,z\in X$ se tiene que $x\mathcal{R}y$, $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}w$, o $w\mathcal{R}z$, para todo $w\in X$". Para más detalles puede consultarse (21), (17), p. 53 o (22).

Terminamos esta sección haciendo mención a ciertos trabajos sobre aplicaciones bivariantes F, en un conjunto no vacío X, que satisfacen la ecuación funcional $F(x,y)+F(y,x)=0, (x,y\in X)$. Este tipo de aplicaciones bivariantes se denominan hemisimétricas y la ecuación anterior puede denominarse "ecuación funcional de la hemisimetría". (Véase, por ejemplo, (23) o (17), p. 58). Sirven para caracterizar ciertos tipos de preferencias definidas sobre conjuntos convexos del espacio euclídeo, así como para el tratamiento de la intransitividad de la indiferencia asociada a ciertas relaciones de preferencia. Nótese que si definimos una ordenación $\precsim$ sobre X mediante x $\precsim$ $y\Leftrightarrow F(x,y)\leq 0$, con F satisfaciendo la ecuación de hemisimetría obtenemos que la relación de indiferencia asociada "~", dada por x ~ y $\Leftrightarrow F(x,y)=0\Leftrightarrow$ "$x\precsim y$, $y\precsim x$", puede no ser transitiva. Por último, dejamos constancia de que todo orden total da lugar a una aplicación bivariante que es solución de la ecuación de hemisimetría. (Ello puede verse con una construcción que se asemeja a las de la Proposición 1). Evidentemente, el recíproco no es cierto: Basta considerar una aplicación bivariante $F\colon X\times X\to\mathbb{R}$ que sea idénticamente nula.

4. APLICACIONES BIVARIANTES PARA SEMIGRUPOS TOTALMENTE ORDENADOS

Nos planteamos ahora el estudio, mediante aplicaciones bivariantes, de semigrupos totalmente ordenados. Como puede desprenderse de los resultados mencionados en la sección 2, la mayoría de los resultados clásicos acerca de la representabilidad se obtienen bajo la hipótesis de invariancia por traslaciones. Como veremos, el empleo de aplicaciones bivariantes nos permite generalizar el estudio a familias más amplias de semigrupos totalmente ordenados, donde a priori no se exige una invariancia por traslaciones en el sentido restrictivo de la definición que dimos en la sección 2.

Comenzaremos estudiando semigrupos totalmente ordenados positivos, esto es, aquellos $(S,+,\precsim)$ tales que $x\prec x+x$ para todo $x\in S$. Nos preguntamos cuándo estos semigrupos son representables a través de una función de utilidad aditiva u: $(S,+,\precsim) \rightarrow (\mathbb{R},+,\leq)$. Dado que S es positivo, obviamente una tal función de utilidad aditiva habrá de tomar valores en $(0,+\infty)$.

Vimos ya en la sección 2 que, si S fuese invariante por traslaciones, la positividad de sus elementos se traduce en que $x \prec x+y$ para cualesquiera $x, y \in S$. Si no exigimos tal invariancia por traslaciones, este hecho puede dejar de ser cierto. Es más, lo único que podemos garantizar es que $2^p.x \prec 2^q.x$ si $p<q,(p,q \in \mathbb{N}, x \in S)$. Ni siquiera tiene por qué verificarse que $m.x \prec n.x$ si $m<n$, $(m,n \in \mathbb{N}, x \in S)$.

Ello nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN: Un semigrupo positivo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$ se dice coherente si para cada $x \in S$ se tiene que el semigrupo $<x>=\{p.x\,;\, p \in \mathbb{N}\}$ es isótono al semigrupo ordenado $(\mathbb{N},+,\leq)$. Esto equivale a que, para todo $x \in S$ y para cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ con $m<n$ se tenga $m.x \prec n.x$.

Ilustramos ahora la definición anterior con algún ejemplo.

EJEMPLO 1: Dotamos a $S=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ de la suma "+" coordenada a coordenada (esto es: $(a,b)+(c,d)=(a+c,\ b+d)$) y del orden total "$\precsim$" dado por $(a,b)\precsim(c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ó $ad=bc, a\leq c$. Claramente $a<2a \Rightarrow (a,b)\prec(a,b)+(a,b)=(2a,2b)$, luego S es semigrupo positivo. Además, es claro que si $m,n \in \mathbb{N}$, $m<n$ se tiene que $ma<na \Rightarrow (ma,mb)\prec(na,nb)$, luego se trata de un semigrupo coherente. Sin embargo, no es invariante por traslaciones ya que $(1,10)\prec(10,100)$ pero $(20,101)=(10,1)+(10,100)\prec(11,11)=(10,1)+(1,10)$.

EJEMPLO 2: Dotamos a $S=\mathbb{N}$ de la suma usual, y de un orden dado por $2^m.(2n+1)\precsim 2^p.(2q+1) \Leftrightarrow m<p$ ó $m=p, n\leq q$. (Nótese aquí que todo número natural $i \in \mathbb{N}$ puede escribirse en la forma $2^a.(2b+1)$ para determinados $a,b \in N\cup\{0\}$). Como puede observarse en esta ordenación tomamos primero los impares en su orden natural, después los múltiplos de 2 pero no de 4 en su orden natural, después los múltiplos de 4 pero no de 8 en su orden natural, etc. (Esto es, al cabo de $k+1$ pasos se toman los múltiplos de 2^k pero no de 2^{k+1}, en su orden natural). Tenemos así un orden total sobre S. Resulta sencillo ver que se trata de un semigrupo positivo. Sin embargo, no es un semigrupo coherente, ya que $3.2=6\prec 4=2.2$.

Se obtiene ahora fácilmente la siguiente proposición, cuya demostración se omite.

PROPOSICIÓN 4: *Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado. Se tiene entonces:*

a) *S es positivo si y sólo si se puede definir una aplicación bivariante $F: S\times S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y)<1,(x,y \in S)$, y además $F(x,2x)<1$ para todo $x \in S$.*

b) *S es positivo coherente si y sólo si se puede definir una aplicación bivariante $F: S\times S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y)<1,(x,y \in S)$ y además $F(m.x,n.x)<1$ para todo $x \in S$ y cualesquiera $m,n \in \mathbb{N}$ con $m<n$.*

c) *S es invariante por traslaciones si y sólo si se puede definir una aplicación bivariante $F: S\times S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y)<1$, $(x,y \in S)$, y además $F(x,y)<1 \Leftrightarrow F(x+z,y+z)<1$, $(x,y,z \in S)$.*

OBSERVACIÓN 7: La obtención de una aplicación bivariante F para los apartados a)- c) de la Proposición 4 anterior, una vez que disponemos de la ordenación "$\precsim$", resulta muy sencilla, sin más que definir $F(x,y)=0 \Leftrightarrow x \prec y$, $F(x,y)=1 \Leftrightarrow y \precsim x (x,y \in S)$, al estilo de la Proposición 1. Supongamos que, ahora, queremos estudiar aplicaciones bivariantes cuyas propiedades reflejen, por ejemplo, el hecho de que $(S,+,\precsim)$ es una estructura representable por una función de utilidad aditiva $u: S \rightarrow (0,+\infty)$. Nos encontramos aquí con la dificultad de que ya no va a ser posible definir la aplicación bivariante F como $F(x,y)=0 \Leftrightarrow x \prec y$. Ocurre que, con toda probabilidad, F habrá de tener alguna propiedad adicional en relación con la operación binaria "+" de la estructura de semigrupo. Así que ahora nuestra labor consistirá en, una vez que se tenga una función de utilidad u, saber diseñar una adecuada aplicación bivariante F que la interprete. Y viceversa, disponiendo de una aplicación bivariante F con buenas propiedades, saber encontrar una función de utilidad u adecuada que se corresponda con F de manera natural. El siguiente lema nos resuelve la cuestión.

LEMA 2: *Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo. Entonces S es representable a través de una función de utilidad aditiva $u: S \rightarrow (0,+\infty)$ si y solamente si existe una aplicación bivariante $F: S\times S \rightarrow (0,+\infty)$ cumpliendo las siguientes condiciones:*

i) $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y)<1,(x,y \in S)$,

ii) $F(x,y)=F(x,z).F(z,y),(x,y,z \in S)$, *("ecuación multiplicativa de Sincov",* véase (10), p. 183),

iii) $F(y+z,x)=F(y,x)+F(z,x),(x,y,z \in S)$. *(Esta es una de las "ecuaciones funcionales del interés", y de las "ecuaciones de presupuesto",* véase (24), p. 54 y p. 215).

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que S es representable a través de una función de utilidad aditiva $u: S \to (0,+\infty)$. Definamos $F(x,y) = \frac{u(x)}{u(y)}$, $(x,y \in S)$. Observamos que $x \prec y \Leftrightarrow u(x) < u(y) \Leftrightarrow \frac{u(x)}{u(y)} < 1 \Leftrightarrow$ $F(x,y) < 1, (x,y \in S)$. Luego F cumple i). Además $F(x,y) = \frac{u(x)}{u(y)} = \left(\frac{u(x)}{u(z)}\right) \cdot \left(\frac{u(z)}{u(y)}\right) = F(x,z).F(z,y), (x,y,z \in S)$. Luego F cumple ii). Por último $F(y+z,x) = \frac{u(y+z)}{u(x)} =$ $\frac{u(y)+u(z)}{u(x)} = \frac{u(y)}{u(x)} + \frac{u(z)}{u(x)} = F(y,x) + F(z,x), (x,y,z \in S)$. Luego F cumple iii).

Recíprocamente, supongamos que $F: S \times S \to \mathbb{R}$ es una aplicación bivariante que satisface las condiciones i)-iii). Fijemos $x_0 \in S$ y definamos $u(x) = F(x,x_0), (x \in S)$. Así $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y) < 1 \Leftrightarrow F(x,x_0).F(x_0,y) < 1 \Leftrightarrow u(x).$ $F(x_0,y) < 1$. Notemos ahora que para cualquier $z \in S$ se tiene $F(z,z) = F(z,z).F(z,z)$, por ii), luego necesariamente $F(z,z) = 1$. De aquí se sigue que $1 = F(y,y) = F(y,x_0).$ $F(x_0,y) \Rightarrow F(y,x_0) = \frac{1}{F(x_0,y)}$. En definitiva, $F(x,y) < 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u(x) < u(y)$. Por último, de iii) se sigue que u es aditiva. ■

OBSERVACIÓN 8: Nótese que aquí ya no cabe eliminar la condición del Lema 2 en la que se exige que F tome valores estrictamente positivos, de manera que, como apuntamos en la Observación 7, la definición de F como $x \prec y \Leftrightarrow F(x,y) = 0$ deja de funcionar. Ello es así ya que si hubiera una pareja $x,y \in S$ con $F(x,y) = 0$ y F cumpliendo las condiciones del Lema 2, se tendría fácilmente que $F(t,z) = 0$ para todo $t,z \in S$, de donde se llega claramente a una contradicción con el hecho de ser $\precsim$ un orden total.

El siguiente lema resulta ser de una importancia clave, pues determina la unicidad de las aplicaciones bivariantes que aparecen según el Lema 2, asociadas con un semigrupo positivo totalmente ordenado y aditivamente representable.

LEMA 3: *Sea $(S,+\precsim)$ un semigrupo positivo totalmente ordenado y aditivamente representable. Entonces, cualesquiera dos funciones de utilidad aditivas $u,v: S \to (0,+\infty)$ que representen a $(S,+,\precsim)$ han de ser una múltiplo de la otra, es decir debe existir $k \in (0,+\infty)$ tal que $u(x) = k.v(x)$ para todo $x \in S$. Por consiguiente, la aplicación bivariante F que aparece en el enunciado del Lema 2, es única.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $u,v: S \to (0,+\infty)$ funciones de utilidad aditivas. Fijemos $x_0 \in S$, y llamemos $k = \frac{v(x_0)}{u(x_0)}$.

Veamos que $v(x) = k.u(x)$, para todo $x \in S$. En efecto: Llamemos $\alpha = \frac{u(x)}{u(x_0)}$. Aproximemos α por una sucesión estrictamente creciente $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de números racionales $(p_n, q_n \in \mathbb{N})$. Se sigue que $p_n . u(x_0) < q_n . u(x) \Rightarrow p_n . x_0 \prec$ $q_n . x \Rightarrow p_n .v(x_0) \leq q_n .v(x)(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow v(x) \geq lim_{n \to +\infty}$ $\left\{\left(\frac{p_n}{q_n}\right).v(x_0)\right\} = \frac{u(x)}{u(x_0)}.v(x_0) = k.u(x)$. Cambiando los papeles de u y v se llega de manera análoga a que $u(x) \geq \left(\frac{1}{k}\right).v(x)$. Luego en definitiva resulta $v(x) = k.u(x)$.

Con respecto a la unicidad de las aplicaciones bivariantes, obsérvese que si F,G son dos aplicaciones bivariantes en las condiciones del Lema 2 se sigue que, una vez fijado $x_0 \in S$, las expresiones $F(x,x_0), G(x,x_0) (x \in S)$ definen sendas funciones de utilidad, luego existe $k \in (0,+\infty)$ tal que $G(x,x_0) = k.F(x,x_0)(x \in S)$. Ahora, razonando como en la prueba del Lema 2, para todo $x,y \in S$ obtenemos que $G(x,y) = G(x,x_0).G(x_0,y) = \frac{G(x,x_0)}{G(y,x_0)} = \frac{k.F(x,x_0)}{k.F(y,x_0)} =$ $\frac{F(x,x_0)}{F(y,x_0)} = F(x,x_0).F(x_0,y) = F(x,y)$. ■

OBSERVACIÓN 9:

i) Con una prueba similar se generaliza el resultado del Lema 3 para pseudo-utilidades aditivas con llegada en $(0,+\infty)$, esto es: *"Cualesquiera dos funciones de pseudo-utilidad aditiva $u,v: S \to (0,+\infty)$ que sean pseudo-representaciones de un semigrupo positivo totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$ han de ser una múltiplo de la otra"*. Esto tiene una consecuencia destacable: Si sabemos que $(S.+,\precsim)$ es aditivamente representable ocurrirá que cualquier pseudo-utilidad aditiva u, definida sobre S, o bien es inyectiva y con ello utilidad, o bien es trivial $(u(x) = 0, (x \in S))$.

ii) La unicidad de las aplicaciones bivariantes vista en el Lema 3 hace que podamos dar un elegante enunciado alternativo para el Lema 2, haciendo uso de ecuaciones funcionales. Quedaría así:

"Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo positivo totalmente ordenado, entonces S es aditivamente representable si y sólo si el sistema de ecuaciones funcionales

$$F(x,y) = F(x,z).F(z,y), (x,y,z \in S),$$
$$F(y+z,x) = F(y,x) + F(z,x) \ (x,y,z \in S)$$

tiene una solución única tal que

$$x \prec y \Leftrightarrow F(x,y) < 1 \, (x,y \in S),$$

entre las aplicaciones bivariantes $F: S \times S \to (0,+\infty)$".

Como corolario, nótese que toda aplicación bivariante F que sea solución del sistema de ecuaciones anterior define sobre S un preorden completo aditivamente representable, que es un orden total si además ocurre que $x \neq y \Rightarrow F(x,y) \neq 1 \; (x,y \in S)$.

El Lema 2 anterior simplemente nos traduce funciones de utilidad en aplicaciones bivariantes, pero no nos dice cómo obtener ni unas ni otras a partir del conocimiento de la estructura $(S,+,\precsim)$. Ahí está el problema clave. Hasta ahora se conocen técnicas de construcción de funciones de utilidad para semigrupos totalmente ordenados invariantes por traslaciones.

Tratamos en lo que sigue, y como razón de ser del presente trabajo, de obtener nuevas construcciones, bien de funciones de utilidad, bien de aplicaciones bivariantes, en contextos más generales.

En el contexto de invariancia por traslaciones, la clave de la representabilidad aditiva estaba en propiedades de arquimedianidad. Al quitar la hipótesis de invariancia por traslaciones, las propiedades de arquimedianidad no serán suficientes para la representabilidad aditiva. Ciertamente, la invariancia por traslaciones es una condición necesaria, así que no se puede prescindir de ella. Pero aún podemos preguntarnos si tal propiedad es redundante de alguna condición de arquimedianidad, o si alguna condición de arquimedianidad junto con alguna versión más débil de la invariancia por traslaciones, lleva consigo la representabilidad aditiva.

Otro hecho notable es que, si no se exige la propiedad de invariancia por traslaciones, no se tiene garantía de que ciertas propiedades de arquimedianidad sean equivalentes. Ello nos obliga a introducir una nueva definición.

DEFINICIÓN: Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo positivo y totalmente ordenado. Se dice que S es arquimediano fuerte si para todo $x,y \in S$, $x \prec y$, existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x \precsim y \prec (n+1).x$.

OBSERVACIÓN 10:

i) Como se desprende del Teorema 2, en el contexto de semigrupos positivos totalmente ordenados e invariantes por traslaciones, superarquimediano implica arquimediano, que a su vez equivale a arquimediano fuerte. Estas implicaciones dejan de ser válidas en el contexto general.

ii) También se desprende del Teorema 2 que en el contexto de semigrupos positivos totalmente ordenados e invariantes por traslaciones, superarquimediano implica conmutativo. Y también esto pasa a ser falso en el contexto general.

iii) Si no se exige invariancia por traslaciones, no es cierto tampoco que superarquimediano equivalga a arquimediano en grupos totalmente ordenados.

iv) Si en la definición de arquimediano fuerte no hubiésemos exigido la unicidad de los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n.x \precsim y \prec (n+1).x$ obtendríamos una propiedad equivalente a la arquimediana. Esto es: *"Un semigrupo positivo y totalmente ordenado $(S,+,\precsim)$ es arquimediano si y sólo si para todo $x,y \in S$ con $x \prec y$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x \precsim y \prec (n+1).x$"*. Para probar este hecho la única dificultad está en ver que si S es arquimediano, y $x \prec y$, existe el correspondiente $n \in \mathbb{N}$ tal que $n.x \precsim y \prec (n+1).x$. De no existir tal n se sigue fácilmente por inducción que $k.x \precsim y$, para todo $k \in \mathbb{N}$, en contradicción con la arquimedianidad.

Ilustramos la Observación 10 anterior con adecuados ejemplos.

EJEMPLOS 3:

i) Sea $S = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$ dotado con la operación "+" dada por $(a,b)+(c,d) = (a,b+d)$, $a,b,c,d \in (0,+\infty)$ y el orden lexicográfico "$\precsim_L$". Se tiene así un semigrupo totalmente ordenado, positivo y coherente que no es conmutativo: $(1,2)+(2,1) = (1,3) \neq (2,3) = (2,1)+(1,2)$. No es arquimediano: $(1,1) \prec_L (2,1)$, pero $n.(1,1) = (1,n) \prec_L (2,1), (n \in \mathbb{N})$. Es superarquimediano: Para ello, nótese que si $a < c$, entonces $2.(a,b) = (a,2.b) \prec_L (c,d) = 1.(c,d)$, mientras que si $b < d$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n+1).b < n.d \Rightarrow (n+1).(a,b) = (a,(n+1).b) \prec_L (a,n.d) = n.(a,d)$.

ii) El semigrupo introducido en el Ejemplo 2 es arquimediano, pero no es arquimediano fuerte ya que no hay unicidad en los $n \in \mathbb{N}$ tales que $n.1 \precsim 2 \prec (n+1).1$. En concreto, aquí n puede ser cualquier impar.

iii) Sea $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dotado con la operación de producto usual "$\times$" y el orden natural "$\leq$". $(G,\times,\leq)$ es un grupo totalmente ordenado, no invariante por traslaciones ya que $-2 \leq 1$, pero $(-2)\times(-2) = 4 > (-2)\times 1 = -2$. *Su cono positivo* G^+ es $(-\infty,0) \cup (1,\infty)$ mientras que su cono negativo G^- es $(0,1)$. Aprovechando que $((0,+\infty),\times)$ es grupo totalmente ordenado aditivamente representable en $(\mathbb{R},+,\leq)$, a través de la función *"log"* y que si $x < 0, y \in G$ con $x < y$ entonces $x^{2n+1} < y^{2n}$ se obtiene que G es un grupo superarquimediano.

Sin embargo, no es arquimediano pues $(-1/2)<2$ y también $(-1/2)^n<2$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

LEMA 4: *Un semigrupo totalmente ordenado positivo es arquimediano fuerte si y sólo si es arquimediano y coherente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo coherente y arquimediano. Sean $x,y\in S$ con $x\prec y$. Supongamos, por reducción al absurdo, que existen $m\in\mathbb{N}, m<n$ tales que $n.x\precsim y\prec(n+1).x$; $m.x \precsim y\prec(m+1).x$. Como $m<n\Rightarrow(m+1)\leq n$, debemos tener, por ser S coherente, que $m.x\precsim y\prec(m+1).x\precsim n.x\prec y \precsim (n+1).x$. Llegamos así a la contradicción $y\prec y$. Luego, en definitiva, S es arquimediano fuerte.

Recíprocamente, supongamos que S es arquimediano fuerte. Si S no es coherente, existirá $x\in S$ y un $n\in\mathbb{N}$ mínimo tal que $(n+1).x\precsim n.x$. Sea ahora $n+k\in\{n+1,n+2,\dots 2n-1\}$ máximo tal que $(n+k).x\prec n.x$. Si $(n+k).x\prec(n-1).x$ entonces S deja de ser arquimediano fuerte ya que tanto para $p=n-1$ como para $p=n+k$, y llamando $y=(n-1).x$ ocurre que $p.x\precsim y\prec(p+1).x$. Por último, si $(n-1).x\precsim(n+k).x$ S también deja de ser arquimediano fuerte pues tanto para $p=n-1$ como para $p=n+k$, y llamando $y=p.x$ ocurre que $p.x\precsim y\prec(p+1).x$. ■

En el caso arquimediano fuerte, podemos definir de manera natural una aplicación bivariante que nos dará útil información sobre la estructura.

PROPOSICIÓN 5: *Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo. Entonces son equivalentes:*

i) S es arquimediano fuerte,

ii) Existe una aplicación bivariante $F:S\times S\to[0,+\infty)$ cumpliendo:

a) $F(x,y)>F(x,z)\Rightarrow y\prec z,(x,y,z\in S)$, esto es, para todo $x_0\in S$ la función $u_{x_0}:S\to\mathbb{R}$ dada por $u_{x_0}(x)=F(x_0,x)$ es función de pseudo-utilidad,

b) $F(x,p.x)=p$, $(x\in S, p\in\mathbb{N})$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $(S,+,\precsim)$ es un semigrupo totalmente ordenado positivo arquimediano fuerte. Dados $x,y\in S$ con $x\prec y$, existe un único $n\in\mathbb{N}$ tal que $n.x\precsim y\prec(n+1).x$. Definimos entonces $F(x,y)=n$. También impondremos que $F(x,x)=1$ para todo $x\in S$, y que $F(x,y)=0$ si $y\prec x$. Con esta definición, es fácil ver que F verifica las condiciones a) y b).

Recíprocamente, dada F verificando a) y b) se sigue que S es coherente, ya que por b) $p.x\prec(p+1).x$ para todo $x\in S$, $p\in\mathbb{N}$. Finalmente, S es arquimediano, ya que si $x\prec y$, tomando $p\in\mathbb{N}$ con $F(x,y)<p$ se deduce de a) y b) que $y\prec p.x$. Basta ahora aplicar el Lema 4. ■

OBSERVACIÓN 11: La construcción de F en i) $\Rightarrow$ ii) está perfectamente determinada. Sin embargo, para ii) $\Rightarrow$ i) podría suceder que tuviésemos dos aplicaciones bivariantes distintas F_1 y F_2 cumpliendo a) y b). En este caso, ocurre que F_1 no es muy diferente de F_2 ya que para todo $x,y\in S$ se tiene $|F_1(x,y)-F_2(x,y)|\leq 1$. Esto es así ya que si $x\prec y$ entonces existe un único $n\in\mathbb{N}$ tal que $n.x\precsim y\prec(n+1).x$. De aquí $n=F_i(x,n.x)\leq F_i(x,y)\leq F_i(x,(n+1).x)= n+1 (i=1,2)$. Y si $y\prec x$ entonces $0\leq F_i(x,y)\leq F_i(x,x)= 1$ $(i=1,2)$.

PROPOSICIÓN 6: *Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo. Entonces S es arquimediano fuerte y superarquimediano si y sólo si existe una aplicación bivariante $F:S\times S\to[0,+\infty)$ cumpliendo:*

a) $F(x,y)<F(x,z)\Rightarrow y\prec z,(x,y,z\in S)$.

b) $F(x,p.x)=p$, $(x\in S, p\in\mathbb{N})$.

c) Dados $x,y\in S$ con $x\prec y$, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $F(x,p.y)>p+1$.

DEMOSTRACIÓN: Si S es arquimediano fuerte, por la Proposición 5 tendremos ya F cumpliendo las condiciones a) y b) del enunciado. Si además S es superarquimediano dados $x,y\in S$ con $x<y$ existe $p\in\mathbb{N}$ tal que $(p+1).x\prec p.y$. También, como $(p+1).x\prec p.y$ debe existir $q\in\mathbb{N}$ con $((q+1).(p+1)).x\prec(p.q).y$. Así $F(x,(p.q).y)\geq F(x,(p+1).(q+1).x))=(p+1).(q+1)> p.q+1$.

Recíprocamente, si disponemos de una aplicación bivariante $F:S\times S\to[0,+\infty)$ cumpliendo las condiciones a)-c entonces, por la Proposición 5, S es ya arquimediano fuerte. Para ver que es superarquimediano tomemos $x,y\in S$, con $x\prec y$, y por b) y c), sea $p\in\mathbb{N}$ tal que $F(x,p.y)>p+1=F(x,(p+1).x)$. Se sigue ahora de a) que $(p+1).x\prec p.y$. ■

OBSERVACIÓN 12:

i) Aplicando el Teorema 2, la Proposición 6 anterior nos proporciona una nueva caracterización de los semigrupos totalmente ordenados positivos e invariantes por traslaciones que sean aditivamente representables. A su vez, esta caracterización completa la dada en el Lema 2. Se tiene: *"Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo e invariante por traslaciones. Entonces S es aditivamente representable si y sólo si existe una aplicación bivariante $F:S\times S\to[0,+\infty)$ cumpliendo:*

a) $F(x,y) < F(x,z) \Rightarrow y \prec z, (x,y,z \in S)$.

b) $F(x,p.x) = p, (x \in S, p \in \mathbb{N})$.

c) *Dados $x,y \in S$ con $x \prec y$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x,p.y) > p+1$".*

ii) A la vista de la Proposición 6 se tratará de encontrar alguna propiedad adicional que, verificada por las aplicaciones bivariantes F que aparecen, haga que S sea invariante por traslaciones, con lo que $(S,+,\precsim)$ será aditivamente representable por el Teorema 2. Presentamos a continuación el resultado fundamental al que se llega en este contexto.

TEOREMA 3: *Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo. Son equivalentes las propiedades siguientes:*

i) *S es aditivamente representable,*

ii) *Existe una aplicación bivariante $F: S \times S \to [0,+\infty)$ cumpliendo las condiciones siguientes:*

a) $F(x,y) < F(x,z) \Rightarrow y \prec z, (x,y,z \in S)$.

b) $F(x,p.x) = p, (x \in S, p \in \mathbb{N})$.

c) Dados $x,y \in S$ con $x \prec y$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x,p.y) > p+1$".

d) $0 \leq F(x,y+z) - F(x,y) - F(x,z) \leq 1 \ (x,y,z \in S)$.

La demostración del Teorema 3 se basa en el lema siguiente:

LEMA 5.: *Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado positivo para el que existe una aplicación bivariante F satisfaciendo las condiciones a)-d) del Teorema 3. Entonces se verifican las propiedades siguientes:*

i) Para todo $x,y \in S$ se tiene que $x \prec x+y$, $x \prec y+x$.

ii) S es conmutativo.

iii) $x \prec y \Rightarrow$ "$p.x \prec p.y$ para todo $p \in \mathbb{N}$" $(x,y \in S)$.

DEMOSTRACIÓN:

i) Utilizando las propiedades a)-d) resulta que para cualesquiera $x,y \in S$ se tiene $F(x,x+y) \geq F(x,x) + F(x,y) = 1 + F(x,y) > F(x,y) \Rightarrow y \prec x+y$. Análogamente $y \prec y+x$.

ii) Sean $x,y \in S$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $x+y \neq y+x$. Consideraremos sin pérdida de generalidad que $x+y \prec y+x$. Por la Proposición 6, S es superarquimediano luego existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $(q+1).(x+y) \prec q.(y+x)$. Pero, por i) se tiene $q.(y+x) \prec x + q.(y+x) \prec x + q.(y+x) + y = (q+1).(x+y)$, y se llega así a contradicción.

iii) Sean $x,y \in S$ con $x \prec y$. De nuevo por ser S superarquimediano, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $(q+1).x \prec q.y$. Sea ahora $p \in \mathbb{N}$. Tres casos pueden ocurrir.

Caso 1: Si $p = q$, por ser S coherente, lo que se sigue de la Proposición 5, se obtiene que $q.x \prec (q+1).x \prec q.y$.

Caso 2: Si $q < p$, a partir las propiedades a)-d) se obtiene: $F(x,p.y) \geq F(x,(p-q).y) + F(x,q.y) \geq (p-q).F(x,y) + F(x,(q+1).x) \geq (p-q).F(x,x) + (q+1) = (p-q) + (q+1) = p+1 > p = F(x,p.x)$. Así $F(x,p.y) > F(x,p.x) \Rightarrow p.x \prec p.y$.

Caso 3: Si $p < q$, y ocurriera que $p.y \precsim p.x$, tomando ahora $r \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, por el caso para $z = p.y, t = p.x$ se tendría que $r.z = r.(p.y) \precsim r.t = r.(p.x)$. Esto contradice el caso 2 para $x \prec y$. ■

Presentamos ya la prueba del Teorema 3.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3:

i) $\Rightarrow$ ii) Si definimos F como en las proposiciones 5 y 6, cumplirá ya las condiciones a), b) y c). Veamos que también satisface d): Dados $x,y,z \in S$ se tiene que existen $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ únicos tales que $p.x \precsim y \prec (p+1).x$ y $q.x \precsim z \prec (q+1).x$ con el convenio de que si p (respectivamente: q) vale cero sólo se contempla la desigualdad $y \prec x$ (respectivamente $z \prec x$). Así $F(x,y) = p$ y $F(x,z) = q$. Al ser S aditivamente representable, es invariante por traslaciones, y se tiene $(p+q).x \precsim y+z \prec (p+q+2).x \Rightarrow F(x,y+z) \in \{p+q, p+q+1\}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Supongamos que existe $F: S \times S \to [0,+\infty)$ aplicación bivariante verificando las condiciones a)-d). Consideramos la aplicación $u: S \to \mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$u(x) = \lim_{p \to +\infty} \frac{F(x_0, 2^p.x)}{2^p} \ (x \in S),$$

donde x_0 es un elemento prefijado cualquiera de S.

u está bien definida puesto que el límite anterior existe ya que la sucesión

$$\left(\frac{F\left(x_0,2^p.x\right)}{2^p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$$

está acotada superiormente por $F(x_0,x)+1$ y es no decreciente ya que $2.F\left(x_0,2^p.x\right)\le F\left(x_0,2^{p+1}.x\right)$, en virtud de la propiedad d) de F.

Dados $x,y\in S$ con $x\precsim y$ se tiene, por el Lema 5 iii), que para todo $p\in\mathbb{N}$ es $2^p.x\precsim 2^p.y\Rightarrow F\left(x_0,2^p.x\right)\precsim F\left(x_0,2^p.y\right)$. De aquí se sigue que $u(x)\le u(y)$ y u es pseudo-utilidad.

Dados ahora $x,y\in S$, $p\in\mathbb{N}$, y teniendo en cuenta que $2^p.(x+y)=2^p.x+2^p.y$ en virtud del Lema 5 ii), se obtiene que $0\le F\left(x_0,2^p.(x+y)\right)-F\left(x_0,2^p.x\right)-F\left(x_0,2^p.y\right)\le 1$. Dividiendo por 2^p y tomando límites se llega a $u(x+y)=u(x)+u(y)$, luego u es aditiva.

Vemos ahora que $u(x)>0\,(x\in S)$: Si $x=x_0$ esto se sigue del hecho $F\left(x_0,2^p.x_0\right)=2^p\Rightarrow u(x_0)=1$. Si $x_0\prec x$ entonces por el Lema 5 iii) es $2^p.x_0\prec 2^p.x\Rightarrow 1=u(x_0)\le u(x)\Rightarrow u(x)>0$. Como última posibilidad, si $x\prec x_0$, entonces al ser S arquimediano, existe $p\in\mathbb{N}$ con $x_0\prec p.x$. Por el caso anterior y por ser u aditiva, se sigue que $p.u(x)=u(p.x)>0\Rightarrow u(x)>0$.

Para concluir, basta ver que u es inyectiva. Para ello, notemos que si $x\prec y$ entonces, puesto que S es superarquimediano en virtud de la Proposición 6, existe $q\in\mathbb{N}$ tal que $(q+1).x\prec q.y\Rightarrow(q+1).u(x)\le\left(\frac{q}{q+1}\right).u(y)\Rightarrow u(x)<u(y)$. ■

OBSERVACIÓN 13:

i) Disponemos ahora de dos caracterizaciones de la representabilidad aditiva mediante aplicaciones bivariantes, a saber, el Lema 2 y el Teorema 3. La relación entre ambas queda así: *"Siendo F una aplicación bivariante cumpliendo a)-d) del Teorema 3, la aplicación bivariante* $f:S\times S\to(0,+\infty)$ *dada por*

$$f(t,z)=\lim_{p\to+\infty}\frac{F\left(x_0,2^p.t\right)}{F\left(x_0,2^p.z\right)}\,(z,t\in S),\ x_0\in S\ \textit{fijo}$$

satisface las condiciones del Lema 2". De acuerdo con el Lema 3, f es independiente de la F elegida, luego también se tiene que $f(t,z)=lim_{p\to+\infty}\frac{F\left(z,2^p.t\right)}{F\left(z,2^p.z\right)}=lim_{p\to+\infty}\frac{F\left(z,2^p.t\right)}{2^p}$ o, análogamente,

$$f(t,z)=lim_{p\to+\infty}\frac{F\left(t,2^p.t\right)}{F\left(t,2^p.z\right)}=lim_{p\to+\infty}\frac{2^p}{F\left(t,2^p.z\right)}.$$

ii) A la vista de que tenemos dos caracterizaciones distintas de la representabilidad aditiva de semigrupos totalmente ordenados positivos $(S,+,\precsim)$, a saber, el Lema 2 y el Teorema 3, podemos cuestionarnos el porqué de haber introducido ambas, en lugar de sólo una de ellas. En defensa de la introducción de las dos, cabe notar que en el transcurso del Lema 2 al Teorema 3 se ha seguido un procedimiento gradual y constructivo. Si bien el Lema 2 supone una mera traducción de funciones de utilidad a aplicaciones bivariantes, en los resultados que desembocan en el Teorema 3 se ha empleado un proceso de construcción en el que una propiedad clave es la arquimedianidad fuerte, como se observa claramente en la demostración de la Proposición 5. Más aún, se ha procurado introducir construcciones que no hicieran uso de la propiedad de invariancia por traslaciones. En esa dirección, los resultados constructivos expresados por las proposiciones 5 y 6 no siguen las líneas usuales de obtención de resultados. (Véase (6), (1), (7), (25), o (26)). Así, creemos que resulta fundamental el aporte del concepto de coherencia, intermedio entre la invariancia por traslaciones y la positividad, el cual permite, bajo hipótesis de arquimedianidad, empezar a construir aplicaciones bivariantes con buenas propiedades. Nótese además que en los estudios clásicos de la literatura sobre estos temas, las representaciones aditivas resultan de la conjunción de alguna condición de arquimedianidad y alguna condición de invariancia por traslaciones.

iii) En la línea de la Observación 12 ii), debemos hacer notar que una demostración alternativa del Teorema 3, que omitiremos, consiste en probar directamente que si existe una aplicación bivariante $F:S\times S\to\mathbb{R}$ que satisfaga las condiciones a)-d) del Teorema 3, entonces $(S,+,\precsim)$ es invariante por traslaciones. La prueba de este hecho es similar a la del apartado iii) del Lema 5. De hecho, puede observarse que la propiedad expresada en el Lema 5 iii) es una versión débil de la invariancia por traslaciones, al llevar ésta consigo que $x\prec y,\ z\prec t\Rightarrow x+z\prec y+t\ (x,y,z,t\in S)$. Hay autores (véase, por ejemplo, (7), p. 87) que toman esta última propiedad como punto de partida para definir semigrupo ordenado. Nótese que tal propiedad conlleva que $x\prec y\Rightarrow p.x\prec p.y$ $(p\in\mathbb{N},x,y\in S)$.

Hasta ahora hemos trabajado con representabilidad aditiva de semigrupos totalmente ordenados positivos. Cabe por tanto preguntarse acerca de la representabilidad aditiva de semigrupos totalmente ordenados en el caso general en que éstos no tienen por qué ser positivos. En el Teorema 2 vimos que, bajo invariancia por traslaciones, la representabilidad aditiva de un semigrupo equivalía a la de sus conos positivo y negativo. *Esta propiedad deja de ser cierta en el contexto general, esto es: "La representabilidad aditiva de los conos positivo y negativo de un determinado semigrupo totalmente ordenado no siempre lleva consigo que el semigrupo sea aditivamente representable."* Más aún, puede ocurrir que el conjunto de elementos positivos (o negativos) de un determinado semigrupo no sea estable, esto es, deje de ser semigrupo. En tal caso, obviamente, no podrá ser nunca aditivamente representable. Ponemos a continuación, y para concluir esta sección sobre representabilidad de semigrupos totalmente ordenados, algún ejemplo ilustrativo de estos hechos.

EJEMPLOS 4:

i) Consideremos $S=\mathbb{Z}_4=\{\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$ con la suma usual módulo cuatro "+", y el orden $\precsim$ en el que $\bar{0}\precsim\bar{1}\precsim\bar{2}\precsim\bar{3}$. (S,+,$\precsim$) es así un semigrupo totalmente ordenado. El elemento $\bar{1}$ es positivo, pero $\bar{2}=\bar{1}+\bar{1}$ es negativo.

ii) Sea $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ con el orden natural $\leq$ y la operación conmutativa $*$ dada por $a*b=a+b$ si $a,b>0$; $a*b=a+b$ si $a,b<0$; $a*b=|a|+b$ si $a<0$, $b>0$, y $a*b=a+|b|$ si $a>0, b<0$. El cono positivo es $S^+=(0,+\infty)$ con la suma y orden naturales, luego obviamente es aditivamente representable. Al cono negativo $S^-=(-\infty,0)$ le ocurre lo mismo. Sin embargo el orden en S no es invariante por traslaciones ya que $(-5)<(-4)$, pero $(-5)*3=8>(-4)*3=7$. Así que $(S,*,\leq)$ no es aditivamente representable.

5. APLICACIONES BIVARIANTES PARA SEMIGRUPOS PARCIALMENTE ORDENADOS

Si $(S,+)$ es un semigrupo dotado de una ordenación $\precsim$ que ya no tiene por qué ser un orden total, podemos aún preguntarnos por la existencia de alguna representación de la estructura $(S,+,\precsim)$ que preserve no sólo la ordenación "$\precsim$", sino la operación algebraica "+". En esta dirección y teniendo en cuenta lo visto en la sección 3, podemos pensar, por ejemplo, en una estructura $(S,+,\precsim)$ representable por dos funciones $u,v:S\times S\to\mathbb{R}$ de forma que $x\precsim y \Leftrightarrow u(x)\leq v(y)\,(x,y\in S)$, verificando ahora condiciones adicionales del tipo $u(x+y)=u(x)+u(y)$, $v(x+y)=v(x)+v(y)$, $(x,y\in S)$. Pensamos que esta discusión es nueva en la literatura sobre semigrupos ordenados (véase (6), (27), (28) o (29)) y por ello introducimos aquí algún resultado en esta línea, completando además el estudio sobre órdenes-intervalo que se realiza en el capítulo 6 de (18). (Véase también (21), (30), (12), (13) (14) (15) o (16)). Nótese además que si $\precsim$ es una ordenación de tipo orden-intervalo, entonces la relación $\prec$ asociada es un orden parcial estricto.

En la línea del Lema 2, se obtiene el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 7: *Sea $(S,+)$ un semigrupo equipado con un orden-intervalo "$\mathcal{R}$". Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) Existen dos funciones $u,v:S\to\mathbb{R}$ tales que:

a) $u(x)<v(y)\Leftrightarrow x\mathcal{R}y\;(x,y\in S)$

b) $u(x+y)=u(x)+u(y);\,v(x+y)=v(x)+v(y)\;(x,y\in S)$.

ii) Existe una aplicación bivariante $F:S\times S\to\mathbb{R}$ verificando:

c) $x\mathcal{R}y\Leftrightarrow F(x,y)>0\,(x,y\in S)$,

d) $F(x+y,t+z)=F(x,t)+F(y,z)\;(x,y,t,z\in S)$.
("Ecuación funcional de Cauchy en dos variables". Véase (31), p. 34, (10), p. 91 o (24), p. 53).

DEMOSTRACIÓN:

i) $\Rightarrow ii)$ Esta implicación resulta inmediata sin más que definir $F(x,y)=v(y)-u(x)\;(x,y\in S)$; donde *u, v* verifican las condiciones *a), b).*

ii) $\Rightarrow i)$ Es suficiente ver que la solución de la ecuación funcional que aparece en *d)* es $F(x,y)=v(y)-u(x)$; con *u,v:* $S\to\mathbb{R}$ funciones aditivas.

Sea pués F satisfaciendo la ecuación funcional de Cauchy en dos variables y sea $x_0\in S$ fijo. Observemos que

$$F(x_0+x,\ x_0)+F(x_0,x_0)=F(x_0+x+x_0,x_0+x_0)=F(x_0,x_0)+F(x+x_0,x_0),$$

de donde $F(x_0+x,x_0)=F(x+x_0,x_0)$, $(x\in S)$.

Definimos ahora *u,v:* $S\to\mathbb{R}$ como:

$$F(x)=-F(x_0+x,x_0)+F(x_0,x_0),\ v(x)=F(x_0,x_0+x)-F(x_0,x_0),\ (x\in S).$$

Ya que para todo $x,\ y\in S$ se tiene,

$$F(x_0,x_0)+F(x,y)+F(x_0,x_0)=F(x_0+x+x_0,x_0+y+x_0)=F(x_0,x_0+y)+F(x+x_0,x_0)=F(x_0,x_0+y)+F(x_0+x,x_0),$$

o equivalentemente,

$$F(x,y)=F(x_0,x_0+y)-F(x_0,x_0)-(-F(x_0+x,x_0)+F(x_0,x_0)),$$

se sigue que $F(x,y)=v(y)-u(x)$.

Veamos que u es aditiva. En efecto,

$$u(x+y) = -F(x_0+x+y,\ x_0) + F(x_0, x_0) =$$
$$-F(x_0+x+y+x_0, x_0+x_0) + 2.F(x_0, x_0) =$$
$$-F(x_0+x, x_0) + F(x_0, x_0) + (-F(x_0+y, x_0) + F(x_0, x_0)),$$

de donde $u(x+y) = u(x) + u(y)$.

Para ver que v es aditiva, notemos que $v(y) = F(x, y) + u(x)$, independientemente de x. Así, $v(y_1+y_2) = F(x_0 + x_0, y_1+y_2) + u(x_0+x_0) = F(x_0, y_1) + u(x_0) + F(x_0, y_2) + u(x_0) = v(y_1) + v(y_2)$. ■

i) Si $(G,+)$ es un grupo dotado de un orden-intervalo $\mathcal{R}$, y existen u,v en las condiciones de la Proposición 7, entonces, dado $x \in G$ resulta $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow u(x) \leq v(x) \Leftrightarrow v(-x) = -v(x) \leq -u(x) = u(-x)$, lo que implica, ya que $-x \in G$ y $u(-x) \leq v(-x)$, que $u(x) = v(x)$. En otras palabras: *"En el caso de un grupo se tiene que un orden-intervalo representable bien a través de funciones u,v, bien a través de una aplicación bivariante F, en las condiciones equivalentes de la Proposición 7, da lugar, a fortiori, a un preorden completo aditivamente representable"*.

ii) El resultado expresado por la Proposición 7 es aplicable a semigrupos totalmente ordenados, aun cuando no se trate de semigrupos positivos, con lo que se generaliza de forma sustancial el Lema 2. Las aplicaciones bivariantes F a que alude el Lema 2 no son las mismas a las que alude la Proposición 7, que denotaremos f. Pueden relacionarse mediante $F(x,y) = \dfrac{f(x,2x)}{f(y,2y)}$.

iii) Análogamente al Lema 2 y a la Proposición 7, volviendo al caso particular de semigrupos totalmente ordenados $(S,+,\precsim)$ puede probarse el siguiente resultado, que hace uso tanto de la ecuación de Sincov, como de la ecuación de la hemisimetría que manejamos en la sección 3: *"Sea $(S,+,\precsim)$ un semigrupo totalmente ordenado. Entonces son equivalentes*:

(1) *$(S,+,\precsim)$ es aditivamente representable,*

(2) *Existe una aplicación bivariante $F: S \times S \to \mathbb{R}$ cumpliendo:*

$c_1)$ $F(x,x) = 0 (x \in S)$,

$c_2)$ $F(x+y,t+z) = F(x,t) + F(y,z)\ (x,y,t,z \in S)$,

$c_3)$ $F(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow x \precsim y\ (x,y \in S)$,

(3) *Existe una aplicación bivariante $F: S \times S \to \mathbb{R}$ cumpliendo:*

$c_4)$ $F(x,y) + F(y,z) = F(x,z) (x,y,z \in S)$ *(ecuación de Sincov),*

$c_2)$ $F(x+y,t+z) = F(x,t) + F(y,z) (x,y,t,z \in S)$,

$c_3)$ $F(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow x \precsim y\ (x,y \in S)$,

(4) *Existe una aplicación bivariante $F: S \times S \to \mathbb{R}$ cumpliendo:*

$c_5)$ $F(x,y) + F(y,x) = 0\ (x,y \in S)$ *(ecuación de la hemisimetría),*

$c_2)$ $F(x+y,t+z) = F(x,t) + F(y,z)(x,y,t,z \in S)$,

$c_3)$ $F(x,y) \geq 0 \Leftrightarrow x \precsim y\ (x,y \in S)$,

(Ocurre que, en presencia de la condición c_2, las condiciones c_1, c_4 y c_5 son equivalentes. De ahí la equivalencia entre (2), (3) y (4).

BIBLIOGRAFÍA

1. Birkhoff, G. (1967) Lattice theory. American Mathematical society. Rhode Island (Tercera edición).
2. Birkhoff, G. (1940) Lattice theory. American Mathematical Society. Rhode Island (Primera edición).
3. Debreu, G. (1959) Theory of value: An axiomatic analysis of economic equilibrium. *Cowles Foundation Monograph* **17**. Yale University.
4. Alimov, N.G. (1950) Sobre semigrupos ordenados. (En ruso). *Izvestia Akad. Nauk. SSRR. Math. Ser.* **14**, 569-576.
5. De Miguel, J.R., Candeal, J.C. & Induráin, E. (1996) Archimedeaness and additive utility on totally ordered semigroups. *Semigroup Forum* **40 (4)**, 281-286.
6. Fuchs, L. (1963) Partially ordered algebraic systems. Addison Wesly. Reading, Massachusetts.
7. Skala, H.J. (1975) Non-Archimedean utility theory. D. Reidel. Dordrecht, Holanda.
8. Roberts, F.S. (1979) Measurement Theory with applications to Decisionmaking, Utility, and the Social Sciences. AddisonWesley. London.
9. Herden, G. (1996) Weight functions. (Preprint). Fachbereich 6 (Mathematik und Informatik). Universität Gesamthochsschule Essen.
10. Castillo, E. & Ruiz, R., Ecuaciones funcionales y modelización en Ciencia, Ingeniería y Economía. Reverté. Barcelona. 1993.
11. Peleg, B. (1970) Utility functions for partially ordered topological spaces. *Econometrica* **38**, 93-96.
12. Fishburn, P.C. (1993) Intransitive indifference with unequal indifference intervals. *Journal of Mathematical Psychology* **7**, 144-179.
13. Bridges, D.S. (1983a) A numerical representation of preferences with intransitive indifference. *Journal of Mathematical Economics* **11**, 25-42.
14. Bridges, D.S. (1983b) Numerical representation of intransitive preferences on a countable set. *Journal of Economic Theory* **30**, 213-217.
15. Bridges, D.S. (1986) Numerical representations of interval orders on a topological space. *Journal of Economic Theory* **38**, 160-166.

16. Chateauneuf, A. (1987) Continuous representation of a preference relation on a connected topological space. *Journal of Mathematical Economics* **16**, 139-146.

17. Subiza, B. (1992) Representaciones numéricas de preferencias cuasitransitivas y acíclicas. Tesis doctoral. Universidad de Alicante.

18. Bridges, D.S. & Metha, G.B. (1995) Representations of preference orderings. Springer Verlag. Berlin.

19. Tangjan, A.S. (1981) On construction of an additive goal function. Soviet Math. *Doklady* **24** (2), 307-311.

20. Aczél, J. (1987) A short course on functional equations based upon recent applications to the social and behavioral sciences. D. Reidel. Dordrecht, Holanda.

21. Luce, R.D. (1956) Semi-orders and a theory of utility discrimination. *Econometrica* **24**, 178-191.

22. Gensemer, S.H. (1987) Continuous semiorder representations. *Journal of Mathematical Economics* **16**, 275-289.

23. Shafer, W. (1974) The non-transitive consumer. *Econometrica* **42**, 913-919.

24. Eichhorn, W. (1978) Functional equations in Economics. Addison-Wesley. Reading, Massachusetts.

25. Gottinger, H. (1976) Existence of a utility on a topological semigroup. *Theory and Decision* **7**, 145-158.

26. De Miguel, J.R. (1995) Representaciones numéricas de semigrupos totalmente ordenados. (Tesis doctoral). Universidad Pública de Navarra. Pamplona.

27. Clifford, A.H. & Preston, G.B. (1961) The algebraic theory of semigroups I. Math. Surveys AMS.

28. Clifford, A.H. & Preston, G.B. (1967) The algebraic theory of semigroups II. Math. Surveys AMS.

29. Carruth, J. H., Hildebrant, J.A. & Koch, R.J. (1983) The theory of topological semigroups. Marcel Dekker. New York.

30. Scott, D. & Suppes, P. (1958) Foundational aspects of the theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic* **23**, 113-128.

31. Aczél, J. & Dhombres, J. (1989) Functional equations in several variables. Cambridge University Press. Cambridge, U.K.