Sistemas lineales singulares de dos ecuaciones en diferencias finitas de primer orden de coeficientes constantes y de valores iniciales aleatorios. Aplicaciones.

AGUSTÍN RAYA LÓPEZ*

Recibido: 25 de Octubre de 1.995

Presentado por el Académico Numerario D. Darío Maravall

Resumen

Este trabajo es prolongación de tres artículos anteriores publicados por el autor. Se obtienen las soluciones de un sistema de dos ecuaciones en diferencias finitas lineales singulares con valores iniciales aleatorios, se investigan sus propiedades y se muestran diferentes géneros de singularidades. Se pone claramente de manifiesto la mayor riqueza y diversidad de problemas en el enfoque estocástico que se hace en este trabajo con relación al enfoque determinista convencional. Este trabajo tiene aplicaciones principalmente en la teoría de la información y del aprendizaje.

Palabras claves

Ecuaciones en diferencias finitas, procesos estocásticos, variables aleatorias.

Abstract

This work is an extension of three previous papers published by the author. The solutions of a system of two singular, linear difference equations with random initial values are obtained and their properties are investigated as well, showing different kinds of singularities. The greater power and diversity of the stochastic approach taken in this work in contrast to the conventional deterministic approach is clearly shown in this paper. This research has applications mainly in information and learning theories.

Key Words

Finite difference equations, stochastic process, random variable.

* Dpto. De Física y Mecánica Fundamentales y Aplicadas a la Ingeniería Agroforestal. Univ. Politécnica de Madrid.

Maravall [6] ha obtenido las soluciones e investigado las propiedades y comportamiento de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias finitas con valores iniciales aleatorios. En el caso de que el número de ecuaciones que componen el sistema o el número de orden de las ecuaciones diferenciales sea superior a dos, el tratamiento numérico en las aplicaciones es complicado y requiere el uso del ordenador. Solamente en el caso de que el sistema esté formado por dos ecuaciones de primer orden o por una sola ecuación de segundo orden se puede hallar un tratamiento exhaustivo sin necesidad de recurrir al uso del ordenador, como se ha mostrado en anteriores publicaciones [10], [11] y [12].

Dado el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1n+1} &= a_{11}\mathbf{S}_{1n} + a_{12}\mathbf{S}_{2n} \\ \mathbf{S}_{2n+1} &= a_{21}\mathbf{S}_{1n} + a_{22}\mathbf{S}_{2n} \end{aligned} \tag{1}$$

se ha obtenido para la función característica (f.c.) de la solución la expresión.

$$\begin{gathered} \psi_n(z_1,z_2)=\psi_0\left[\frac{(r_2-a_{11})z_1-a_{21}z_2}{r_2-r_1}r_1^n+\frac{(a_{11}-r_1)z_1+a_{21}z_2}{r_2-r_1}r_2^n,\right. \\ \left.\frac{r_1-a_{11}}{a_{21}}\frac{(r_2-a_{11})z_1-a_{21}z_2}{r_2-r_1}r_1^n+\frac{r_2-a_{11}}{a_{21}}\frac{(a_{11}-r_1)z_1+a_{21}z_2}{r_2-r_1}r_2^n\right] \end{gathered} \tag{2}$$

en la que r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación característica.

En el caso de variables aleatorias absolutamente continuas se ha obtenido para la función de frecuencias (f.f.) o función de densidad de probabilidad de la solución la expresión:

$$\begin{gathered} f_n(x_1,x_2)=\frac{1}{|r_1 r_2|^n}f_0\left[\frac{(r_1-a_{22})x_1+a_{12}x_2}{r_1-r_2}\frac{1}{r_1^n}+\frac{(a_{22}-r_2)x_1-a_{12}x_2}{r_1-r_2}\frac{1}{r_2^n},\right. \\ \left.\frac{a_{21}x_1+(r_1-a_{11})x_2}{r_1-r_2}\frac{1}{r_1^n}+\frac{-a_{21}x_1+(a_{11}-r_2)x_2}{r_1-r_2}\frac{1}{r_2^n}\right] \end{gathered} \tag{3}$$

En este trabajo nos vamos a ocupar de dos casos singulares bastante notables que son:

1° El caso en que la ecuación característica tiene una raíz nula.

2° El caso de un sistema de dos ecuaciones en diferencias finitas de primer orden reductibles a una sola ecuación de primer orden.

En el primer caso la ecuación característica se escribe.

$$r^2 - r(a_{11} + a_{22}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = r = a_{11} + a_{22} \end{cases} . \tag{4}$$

Se ve que en este caso el determinante de la matriz es nulo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \tag{5}$$

siendo los cuatro coeficientes a_{ij} distintos de cero. En este caso, la matriz A es degenerada y por tanto, la f.f. que se calculó anteriormente pierde su validez al estar dividida por cero. No ocurre así con la f.c., que continua siendo válida. Lo que constituye una prueba más de la mayor generalidad y ventaja del empleo de las f.c. en vez de la f.f.

Se obtiene para la f.c. la expresión:

$$\psi_n(z_1, z_2) = \psi_0\left[(a_{11}z_1 + a_{21}z_2)r^{n-1},\ (a_{12}z_1 + a_{22}z_2)r^{n-1}\right] \quad n > 0. \tag{6}$$

Obsérvese que, dada la proporcionalidad (5) entre los coeficientes a_{ij} de la matriz, la función del segundo miembro (6) lo es del argumento: $a_{11}z_1 + a_{21}z_2$, es decir, que se puede escribir:

$$\psi_n(z_1, z_2) = \Omega(a_{11}z_1 + a_{21}z_2) \tag{7}$$

Por tanto, la f.c. en el instante n-simo de las v.a. $\beta_1 = S_1 / a_{11}$, $\beta_2 = S_2 / a_{21}$ sería:

$$\psi_n\left(\frac{z_1}{a_{11}}, \frac{z_2}{a_{21}}\right) = \Omega(z_1 + z_2) \tag{8}$$

Lo que prueba que estas v.a. son casi ciertamente iguales. Es decir, que

$$\Pr ob[\beta_1 - \beta_2 \neq 0] = 0 \tag{9}$$

más correctamente,

$$\forall \varepsilon > 0 \ :\ \Pr ob\left[|\beta_1 - \beta_2| > \varepsilon\right] = 0. \tag{10}$$

La f.c. de dos v.a. casi ciertamente iguales es función sólo de la suma de dos variables. Si se trata de vv.aa. absolutamente continuas, la f.f. de la distribución conjunta de ambas es de la forma:

$$f(x_1)\delta(x_1 - x_2) \tag{11}$$

siendo $\delta(x_1 - x_2)$ de la delta de Dirac. La f.c. es de la forma:

$$\psi(z_1 + z_2) \tag{12}$$

siendo $\psi(z_1)$ la f.c. de $f(x_1)$. La expresión (12) es también válida para variables aleatorias discretas,

De las propiedades de la inversión de la transformada de Fourier (TF) se sigue la curiosa fórmula:

$$\delta_{nm} = \frac{1}{4\pi^2 P_n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz_1 n - iz_2 m} \quad \psi(z_1 + z_2)\, dz_1 dz_2 \tag{13}$$

siendo:

$$P_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izn}\, \psi(z)\, dz. \tag{14}$$

Esta fórmula es generalizable sin más a toda función desarrollable en serie de Fourier, aunque no sea una f.c.

Se tiene que si:

$$\Omega(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz} \tag{15}$$

se sigue que:

$$\delta_{nm} = \frac{1}{4\pi^2 a_{\pm n}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mp iz_1 n \mp iz_2 m} \quad \psi(z_1 + z_2)\, dz_1 dz_2 . \tag{16}$$

En este caso particular en que una raíz de la ecuación característica vale cero, son más manejables las distribuciones marginales que la distribución conjunta, por ser ambas variables casi ciertamente iguales y la matriz A

degenerada. Las f.c. de las distribuciones marginales de S_1 y S_2 se obtienen haciendo, respectivamente, igual a cero z_2 y z_1 en (6), y se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi_n(z_1,0) &= \psi_0\left(a_{11}r^{n-1}z_1\ ,\ a_{12}r^{n-1}z_1\right); \\ \psi_n(0,z_2) &= \psi_0\left(a_{21}r^{n-1}z_2\ ,\ a_{22}r^{n-1}z_2\right). \end{aligned} \tag{17}$$

En el segundo caso se presenta el sistema de dos ecuaciones lineales en diferencias finitas de primer orden y coeficientes constantes:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= (1-\alpha)\,P_n + \beta\, Q_n \\ Q_{n+1} &= \alpha\, P_n + (1-\beta)\,Q_n \end{aligned} \tag{18}$$

estando sujetos α y β a las condiciones

$$0 \le \alpha \le 1 \quad ; \quad 0 \le \beta \le 1 \tag{19}$$

y siendo P y Q dos probabilidades complementarias respecto a la unidad, por tanto:

$$P_n + Q_n = 1 \quad \Rightarrow \quad P_{n+1} + Q_{n+1} = 1. \tag{20}$$

Obviamente, el sistema (18) es una cadena de Markov, que en forma matricial escribiríamos

$$\left\| P_{n+1} \quad Q_{n+1} \right\| = \left\| P_n \quad Q_n \right\| \begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}. \tag{21}$$

En donde la matriz última es una matriz estocástica cuyas filas, como es natural, suman la unidad.

Vamos a resolver este problema en el caso en que el vector inicial de probabilidad $\left\| P_0 \quad Q_0 \right\|$ es aleatorio. En tal caso, aún cuando el sistema (18) está formado por dos ecuaciones lineales en diferencias finitas de primer orden y coeficientes constantes, no se le puede aplicar el método que hemos desarrollado debido a la condición restrictiva que existe entre los dos componentes: P_n, Q_n, del vector de probabilidad que es la (20). Por esta razón, a estos sistemas de ecuaciones en diferencias finitas se propone llamarles singulares o degenerados, en contraposición a los sistemas en los que las dos v.a. soluciones no están sujetas a ninguna restricción, para los que se propone la denominación de *regulares*.

Obsérvese que un sistema singular no lo es porque la matriz de los coeficientes del sistema sea singular (de determinante nulo), como es el caso del sistema (18), que es singular debido a la condición (20), y cuyo determinante es distinto de cero.

Para resolver el sistema (18), sustituyendo en la primera Q_n por $1 - P_n$, se obtiene:

$$P_{n+1} = (1 - \alpha - \beta)\ P_n + \beta \tag{22}$$

que es una sola ecuación lineal en diferencias finitas de primer orden, con el valor inicial P_0 aleatorio. Para resolver esta ecuación, teniendo en cuenta que β es un número cierto (no aleatorio) y que por tanto su función característica es: $e^{i\beta z}$ y que si $\psi_n(z)$ es la función característica de P_n, la función característica de $(1 - \alpha - \beta) P_n$ es: $\psi_n[(1 - \alpha - \beta) z]$. Y que además como la función característica de la suma de dos v.a. independientes, es el producto de sus funciones características, se sigue que la solución de la ecuación (22) es en función característica:

$$\psi_{n+1}[z] = e^{i\beta z}\ \psi_n[(1 - \alpha - \beta) z]. \tag{23}$$

De la anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= e^{i\beta z} \psi_0 \left[(1 - \alpha - \beta) z \right] \\ \psi_2(z) &= e^{i\beta z}\ \psi_1 \left[(1 - \alpha - \beta) z \right] = e^{i\beta z[1 + (1 - \alpha - \beta)]} \psi_0 \left[(1 - \alpha - \beta)^2 z \right] \end{aligned} \tag{24}$$

lo que sugiere la fórmula general:

$$\psi_n[z] = e^{iz\beta\left[1 + (1 - \alpha - \beta) + \ldots + (1 - \alpha - \beta)^{n-1}\right]}\ \psi_0\left[(1 - \alpha - \beta)^n z\right], \tag{25}$$

fórmula que se puede demostrar por inducción completa, ya que a partir de la anterior sería:

$$e^{\left[iz\beta+i(1-\alpha-\beta)z\beta\left[1+(1-\alpha-\beta)+\ldots+(1-\alpha-\beta)^{n-1}\right]\right.}\psi_0\left[(1-\alpha-\beta)^n(1-\alpha-\beta)z\right] \tag{26}$$

que demuestra la (25), porque $\psi_{n+1}[z]$ es el resultado (26) de aumentar en (25) n en una unidad. La fómula (25) se escribe también:

$$\psi_n[z]=e^{iz\beta\left[1-(1-\alpha-\beta)^n\right]/(\alpha+\beta)}\psi_0\left[(1-\alpha-\beta)^n z\right]. \tag{27}$$

Si desarrollamos en serie de potencias en el caso de que sea posible, se obtiene:

$$\begin{aligned}&\psi_n[z]=1+i\mu_{1n}z-1/2\,\mu_{2n}z^2+\ldots\ \ldots=\\&=\left\{1+i(\beta/(\alpha+\beta))\left[1-(1-\alpha-\beta)^n\right]z-1/2\left(\beta^2/(\alpha+\beta)^2\right)\left[1-(1-\alpha-\beta)^n\right]^2z^2+\ldots\right\}\times\\&\times\left[1+i\mu_{10}(1-\alpha-\beta)^n z-1/2\,\mu_{20}(1-\alpha-\beta)^{2n}z^2+\ldots\ \ \ldots\right].\end{aligned} \tag{28}$$

En donde el primer factor del segundo miembro es el desarrollo en serie de potencias de la exponencial, y el segundo el de $\psi_0\left[(1-\alpha-\beta)^n z\right]$; de aquí, por identificación se obtienen μ_{1n} y μ_{2n} en función de los momentos de la distribución de probabilidad en el instante inicial: μ_{10} y μ_{20} , y concretamente se obtiene:

$$\mu_{1n}=(\beta/(\alpha+\beta))\left[1-(1-\alpha-\beta)^n\right]+\mu_{10}\,(1-\alpha-\beta)^n \tag{29}$$

y para la raíz cuadrada de la varianza: (desviación típica) se obtiene:

$$\sigma_n=\sigma_0\,(1-\alpha-\beta)^n. \tag{30}$$

Como se cumple que:

$$|1-\alpha-\beta|<1 \tag{31}$$

se sigue que:

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n[z]=e^{iz\beta/(\alpha+\beta)}\,\psi_0(0)=e^{iz\beta/(\alpha+\beta)}. \tag{32}$$

luego P_n cuando el tiempo n tiende a infinito converge en probabilidad al valor cierto $\beta/(\alpha+\beta)$, que es independiente del valor inicial de la probabilidad.

Es la forma que adopta el teorema ergódico bajo el enfoque probabilístico en vez del enfoque determinístico.

Obsérvese que, cuando el tiempo n tiende a infinito, en (29) y (30) se obtiene.

$$\mu_{1\infty} = \beta/(\alpha+\beta) = P_\infty \quad ; \quad \sigma_\infty = 0 \tag{33}$$

como era de esperar de la (32).

De (27) se sigue que, la variable aleatoria:

$$\left[\left(P_n - \beta/(\alpha+\beta) \right) / (1-\alpha-\beta)^n \right] + \beta/(\alpha+\beta) \tag{34}$$

cuando n tiende a infinito converge en ley o distribución a una v.a. de función característica $\psi_0(z)$, cuyo significado es:

$$\lim_{n\to\infty} \left(P_n - \overline{P}_\infty \right) / \sigma_n = \left(P_0 - \overline{P}_\infty \right) / \sigma_0 . \tag{35}$$

Resulta que mientras las vv.aa. (diferencias aleatorias) $P_n - P_\infty$ convergen en probabilidad a cero, las vv.aa. (cocientes aleatorios) $\left(P_n - P_\infty\right)/\sigma_n$ convergen en probabilidad a la v.a. $\left(P_0 - P_\infty\right)/\sigma_0$.

Si en el primer miembro de (35) sustituimos $\overline{P}_\infty$ por $\overline{P}_n$ el límite sigue siendo igual al segundo miembro.

Hemos resuelto este problema eliminando Q_n en la primera ecuación del sistema (18), pero podíamos también haberlo resuelto eliminando P_n en la segunda ecuación de (18), con lo que teniendo en cuenta la (20), hubiéramos obtenido:

$$Q_{n+1} = (1-\alpha-\beta)\,Q_n + \alpha \tag{36}$$

y en consecuencia habríamos tenido que usar la función característica $\chi_0(z)$ del valor inicial Q_0 en vez de la $\psi_0(z)$ de la P_0, y naturalmente se llega al mismo resultado.

Vamos a ver la relación existente entre $\psi(z)$ y $\chi(z)$ en cualquier instante n. Como $Q = 1 - P$, la función característica de Q se obtiene, cambiando z por $-z$ en la f.c. de P y multiplicando por e^{iz}, con lo que se obtiene:

$$\chi(z) = e^{iz}\,\psi(-z) \tag{37}$$

Ambas v.a. P y Q son conjugadas, porque se pasa de la f.c. de la Q a la f.c. de la P mediante la misma operación, ya que:

$$e^{iz}\chi(-z) = e^{iz}\,e^{-iz}\,\psi(z) = \psi(z). \tag{38}$$

Si llamamos $f(x)$ a la f.f. de P, la f.f. de la distribución conjunta de P y Q es: $f(x)\delta(x+y-1)$ todo esto en el supuesto de que sean vv.aa. absolutamente continuas. Por tanto, la función característica de la distribución conjunta es:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{izx+iwy}\,f(x)\,\delta(x+y-1)\,dx\,dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx}\,f(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwy}\,\delta(x+y-1)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw+i(z-w)x}\,f(x)\,dx = \\ &= e^{iw}\,\psi(z-w).\end{aligned} \tag{39}$$

La fórmula anterior para la función característica es válida aún cuando no se trate de vv.aa. absolutamente continuas.

Si cambiamos $\psi(z-w)$ por χ según la fórmula (37) se obtiene:

$$e^{iw}\,\psi(z-w) = e^{iw}\,e^{i(z-w)}\,\chi(w-z) = e^{iz}\,\chi(w-z) \tag{40}$$

que muestra la simetría entre P y Q.

Si hubiéramos resuelto la ecuación (36) en vez de la (22) se habría llegado a:

$$\chi_{n+1}(z) = e^{i\alpha z}\,\chi^{n}\left[(1-\alpha-\beta)z\right] \tag{41}$$

que teniendo en cuenta la (37), se escribe:

$$e^{iz}\,\psi_{n+1}(-z) = e^{i\alpha z}\,e^{i(1-\alpha-\beta)z}\,\psi_{n}\left[-(1-\alpha-\beta)z\right] \tag{42}$$

de la que se deduce que:

$$\psi_{n+1}(-z)=e^{-i\beta z}\,\psi_n\left[-(1-\alpha-\beta)z\right] \qquad (43)$$

que coincide con la (23), con tal de cambiar z por $-z$.

Vamos a estudiar dos comportamientos casi asintóticos muy curiosos que resultan de considerar α y β muy pequeños y n muy grande. En tal supuesto, considerando que n tiende a ∞ se cumplen los dos límites:

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha+\beta)n=\lambda \;;\quad \lim_{n\to\infty}\beta/(\alpha+\beta)=a \;;\quad 0\leq a\leq 1,\ \lambda\geq 0 \qquad (44)$$

Entonces, la (27) se escribe:

$$\psi_n[z]=e^{iz\beta\left[1-(1-\lambda/n)^n\right]/(\alpha+\beta)}\,\psi_0\left[(1-\lambda/n)^n z\right] \qquad (45)$$

y cuando $n\to\infty$, la anterior tiende a:

$$\psi_\infty[z]=\lim_{n\to\infty}\psi_n[z]=e^{iza\left(1-e^{-\lambda}\right)}\,\psi_0\left[e^{-\lambda}z\right] \qquad (46)$$

que es la función característica de una distribución de probabilidad finita

De la (46) se sigue que el valor medio $\overline{P}$ es igual a:

$$\overline{P}=a\left(1-e^{-\lambda}\right)+\overline{P}_0\,e^{-\lambda} \qquad (47)$$

cuyo valor mínimo corresponde a:

$$\overline{P}_0=0 \;\Rightarrow\; \overline{P}=a\left(1-e^{-\lambda}\right)\geq 0 \qquad (48)$$

y valor máximo para:

$$\overline{P}_0=1 \;\Rightarrow\; \overline{P}=a+e^{-\lambda}(1-a)\leq 1 \qquad (49)$$

Supongamos ahora que $(1-\alpha)$ y $(1-\beta)$ son muy pequeños, y que n es muy grande. En este caso α y β están muy próximos a la unidad. Como es:

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}=\frac{1-(1-\beta)}{1-(1-\alpha)+1-(1-\beta)} \quad ; \quad 1-\alpha-\beta \equiv -\left[1-(1-\alpha)-(1-\beta)\right] \tag{50}$$

y si suponemos que existe el límite:

$$\lim_{n\to\infty} (1-\alpha+1-\beta)n=\lambda \tag{51}$$

entonces se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\beta/(\alpha+\beta)\right]=1/2 \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} (1-\alpha-\beta)^n = \begin{cases} e^{-\lambda}, & n \text{ par} \\ -e^{-\lambda}, & n \text{ impar}, \end{cases} \tag{52}$$

Por tanto, teniendo presente estos valores la (25) en el límite, cuando $n \to \infty$, vale:

$$\psi(z)= \lim_{n\to\infty} \psi_n(z)=e^{iz\left(1\mp e^{-\lambda}\right)/2}\ \psi_0\left(\pm e^{-\lambda}z\right) \tag{53}$$

según que n sea par (signos de la fila superior) o n sea impar (signos de la fila inferior).

La (53) para n par y tendiendo a infinito da el valor medio siguiente:

$$\overline{P}=\left(1-e^{-\lambda}\right)/2+\overline{P}_0\, e^{-\lambda} \tag{54}$$

que es mínimo para:

$$\overline{P}_0=0 \;\Rightarrow\; \overline{P}=\left(1-e^{-\lambda}\right)/2 \tag{55}$$

y máximo para:

$$\overline{P}_0=1 \;\Rightarrow\; \overline{P}=\left(1+e^{-\lambda}\right)/2. \tag{56}$$

La (53) para n impar tendiendo a infinito da el siguiente valor medio:

$$\overline{P}=\left(1+e^{-\lambda}\right)/2-\overline{P}_0\, e^{-\lambda} \tag{57}$$

que es mínimo para:

$$\overline{P}_0 = 1 \;\Rightarrow\; \overline{P} = \left(1 - e^{-\lambda}\right)/2 \tag{58}$$

y máximo para:

$$\overline{P}_0 = 0 \;\Rightarrow\; \overline{P} = \left(1 + e^{-\lambda}\right)/2. \tag{59}$$

En todos los casos, es decir, para los dos (53) según se tome el signo + o el signo -, así como para la (46), la raíz cuadrada de la varianza (desviación típica) es la misma, y tiene el valor:

$$\sigma_n = \sigma_0 \, e^{-\lambda}. \tag{60}$$

El valor de σ_n es inmediato, puesto que la varianza depende únicamente de la función ψ_0, ya que la exponencial es la función característica de un número cierto (no aleatorio).

Puede observarse que estos límites se han obtenido por un procedimiento que recuerda la obtención de la distribución de probabilidad de Poisson a partir de la distribución de Bernoulli cuando la probabilidad de éxito tiende a cero y el número de pruebas tiende a ∞, de modo que el producto de ambos se mantiene constante. Sin embargo, la naturaleza del problema que aquí hemos resuelto es muy distinta a la que da el paso de la distribución de Bernoulli a la distribución de Poisson.

En la práctica, basta con que n tenga un valor suficientemente grande y α y β suficientemente pequeños, o $1-\alpha$ y $1-\beta$ suficientemente pequeños para que sin necesidad de establecer los límites, basta con que se cumplan las igualdades (44) o (51) tal como están escritas suprimiento la expresión $lim(n \to \infty)$, para que las f.c. a partir del instante n sean aproximadamente la (46) o la (53).

Puede observarse que la función característica dada por (46) depende de dos parámetros: $\underline{a}$ y $\underline{\lambda}$. Por tanto, desde el punto de vista de la inferencia estadística (teoría de la estimación) se pueden calcular éstas a partir del valor medio dado por (47) y de la varianza (60).

En el caso de la función característica (53), ésta sólo depende de un parámetro: $\underline{\lambda}$. Por tanto, su conocimiento puede lograrse a partir del valor medio (54) y de la varianza (60), indistintamente.

Vamos a hacer el estudio comparativo de un sistema singular y de uno regular.

Vamos ahora a resolver el sistema (18) cuando se cumple la condición (19) pero no la (20). En este caso, se trata de un sistema regular y no-singular, y estudiaremos la diferencia entre sistemas regulares y singulares.

La ecuación característica del sistema (18) es:

$$\begin{vmatrix} 1-\alpha-r & \alpha \\ \beta & 1-\beta-r \end{vmatrix} = r^2 - r(2-\alpha-\beta) + 1-\alpha-\beta = 0 \qquad (61)$$

cuyas raíces son:

$$r_1 = 1 \quad ; \quad r_2 = 1-\alpha-\beta\,. \qquad (62)$$

Si $\psi_0(z_1,z_2)$ es la función característica de los valores iniciales aleatorios del sistema, la función característica de sus soluciones en el instante $\underline{n}$ será la que resulte de llevar estos valores de r_1 y r_2 y los coeficientes a_{ij} a la f.c. dada en (2):

$$\psi_n(z_1,z_2) = \psi_0\left[\frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha z_1 - \alpha z_2}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n,\right.$$
$$\left.\frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha+\beta} + \frac{-\beta z_1 + \beta z_2}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n\right] \qquad (63)$$

que si hacemos $z_1 = z_2$, con lo que se obtiene la función característica de la suma de las dos v.a. P_n y Q_n, se obtiene:

$$\psi_n(z_1,z_1) = \psi_0(z_1,z_1) \qquad (64)$$

que es la forma que adopta en el enfoque estocástico la propiedad que se cumple en el sistema cierto que es:

$$P_{n+1} + Q_{n+1} = P_n + Q_n = \ldots \quad \ldots = P_0 + Q_0 \qquad (65)$$

que resulta de sumar miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema (18).

La propiedad analítica (64) expresa que la función característica de la suma de las dos v.a. P y Q permanece constante a lo largo del tiempo.

Cuando el tiempo n tiende a infinito, como consecuencia de la (31), la función característica ψ_n converge a la:

$$\psi_\infty(z_1, z_2) = \psi_0\left[\frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha+\beta}, \frac{\beta z_1 + \alpha z_2}{\alpha+\beta}\right] \tag{66}$$

que muestra que P/β y Q/α convergen en probabilidad a ser casi ciertamente iguales. Se ve la gran diferencia que existe entre un sistema regular y uno singular.

References

[1] CAUMEL: Probabilités. *Théorie et Applications.* Eyrolles 1988.

[2] DUDEWICZ and MISHRA STAYTA: *Modern Mathematical Statistics.* John Wiley. 1981.

[3] KLIMOV: *Probability Theory and Mathemátical Statistics.* Mir 1986.

[4] LANDAU: *Physique Statistique.* Mir 1990.

[5] LANDAU: *Cinétique Physique.* Mir 1990.

[6] MARAVALL, D.: *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos.* Paraninfo, Madrid. 1974.

[7] MARAVALL, D.: *Diccionario de Matemática Moderna.* RA-MA 1995.

[8] MEDHI: *Stochastic Processes.* John Wiley & Sons 1994.

[9] RAHIMOV: *Random Sums and Branching Stochastic Processes.* Springer-Verlag. 1995.

[10] RAYA, A.: *Movimientos aleatorios uniformes y uniformemente acelerados.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo LXXXIV. Cuaderno Cuarto. 1990.

[11] RAYA, A.: *El péndulo estocástico discreto.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo LXXXVI. Cuaderno Segundo. 1992.

[12] RAYA, A.: *La transformación estocástica de un modelo determinista de Samuelson de la macroeconomía.* Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Tomo LXXXVII, Cuaderno Segundo-Tercero. 1993.