Conjuntos limitados en espacios de Fréchet

CRISTINA ALONSO*

Recibido: 22 de Marzo de 1.995

Presentado por el Académico Numerario D. Manuel Valdivia

El objeto de esta nota es la extensión a espacios de Fréchet de algunos resultados relativos a conjuntos limitados y que son conocidos en el ámbito de los espacios de Banach. El interés acerca de los conjuntos limitados arranca cuando Gelfand [7] creyó probar que en cualquier espacio de Banach los conjuntos relativamente compactos eran, precisamente, los limitados. Phillips [14] observó que la prueba de Gelfand era válida para espacios de Banach separables y que en l^∞ existen conjuntos limitados que no son relativamente compactos. En [2] Dineen probó que la sucesión de las unidades de l^∞ forma un conjunto (no relativamente compacto) "*acotante*", es decir, en el que todas las funciones holomorfas están acotadas, y en particular, limitado. La existencia de conjuntos limitados no acotantes ha sido recientemente descubierta por Josefson [9] y Schlumprecht [16]. Para notación y resultados básicos de la teoría general de espacios localmente convexos referimos a [8] y [15].

Definición.- *Un subconjunto A de un espacio localmente convexo E se dice que es limitado si cada sucesión equicontinua $\{x_n\}$ en E' débil $(\sigma(E',E))$ convergente a cero es uniformemente convergente a cero en A.*

Es inmediato que todo conjunto $A \subset E$ precompacto es limitado y que todo conjunto limitado es acotado. Asímismo, la envoltura absolutamente convexa de un conjunto limitado es un conjunto limitado y la suma de conjuntos limitados es también un conjunto limitado.

Definición.- *Un espacio localmente convexo E se dice Gelfand-Phillips si todo conjunto limitado de E es precompacto.*

---

* Esta nota es parte de mi proyecto de Tesis Doctoral parcialmente desarrollado con una Licencia por estudios concedida por la Consellería de Cultura, Educació y Ciència de la Generalitat Valenciana

Una buena parte de los resultados que aquí presentamos depende del siguiente resultado debido a Lindstrom-Schlumprecht [10]: **(A)** *Si para cada entorno U de* 0 *en E, su polar* U^o *es* $\sigma(E',E)$*-sucesionalmente compacto, entonces E es de Gelfand-Phillips.* Así, la siguiente Proposición es inmediata a partir del teorema de Alaoglu-Bourbaki. Recordemos que un espacio topológico S se dice **"angélico"** si cada conjunto relativamente numerablemente compacto A (es decir, cada sucesión en A tiene un punto adherente) es relativamente compacto y si $x \in \overline{A}, x$ es el límite de una sucesión en A. De acuerdo con [6] 3.3 Th. en los espacios angélicos las nociones de compacidad y compacidad sucesional coinciden.

1. Proposición.- *Si E es un espacio separable, E es de Gelfand-Phillips.*

2.- Proposición.- *Si E es un espacio de Fréchet reflexivo, entonces E es de Gelfand-Phillips.*

Demostración.- Como E'_β es un *(DF)*-espacio, se tiene que E'_β es débil angélico [1], luego los conjuntos $\sigma(E',E'')=\sigma(E',E)$-compactos son sucesionalmente compactos. Puesto que U^o es $\sigma(E',E)$-compacto, se obtiene la conclusión. □

3. Corolario.- *Sea E es un espacio de Fréchet. Los conjuntos acotados de E son limitados si, y solo si, E es de Montel.*

Basta recordar que si los acotados son limitados, entonces E es reflexivo [11].

4. Proposición.- *Si E es un espacio de Fréchet de generación débilmente compacta, entonces E es de Gelfand-Phillips.*

Demostración.- Sea $K \subset E$ un débil compacto total y sea E_K el espacio de Banach asociado a K. La inmersión $E_K \to E$ es débil compacta y de rango denso, entonces factoriza a través de un espacio de Banach X reflexivo ([8] 17.2.9), es decir, existen $S: E_K \to X$ y $T: X \to E$ tales que $TS = Id$ y T es débil compacta. Además $T': E' \to X'$ es inyectiva y $\sigma(E',E)-\sigma(X',X)$ continua. Si U es un entorno de 0 en E, U^oes $\sigma(E',E)$-compacto y $T'(U^o)$ es $\sigma(X',X)=\sigma(X',X'')$-compacto homeomorfo a U^o luego por el teorema de Eberlein, U^oes $\sigma(E',E)$-sucesionalmente compacto.

Ejemplo.- Existe una clase de espacios de Banach, llamados de **Asplund**, cuya bola unidad dual es débil estrella sucesionalmente compacta (ver [3] p. 239) y que por **A**) son de Gelfand-Phillips. Por ejemplo, el dual JT^* del espacio de James JT es un espacio de Asplund no reflexivo, ni de generación débilmente compacta (ver [4] p. 214 y sgtes.).

5. Proposición.- *Si E es un (DF) cuyo dual fuerte no contiene copias de* l_1 *, en particular reflexivo, entonces E es de Gelfand-Phillips.*

Demostración. Si U es un entorno de cero en E, U^o es $\sigma(E',E)$-sucesionalmente compacto ya que como U^o es acotado en E'_β, aplicando el teorema de Rosenthal para espacios de Fréchet [18], si $\{x_n\} \subset U^o$, existirá una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ $\sigma(E',E'')$ de Cauchy, luego $\sigma(E',E)$- convergente ya que U^o es $\sigma(E',E)$-completo. □

6. Proposición.- *Si* $E = ind_n E_n$ *es un límite inductivo de espacios de Fréchet reflexivos, entonces E es de Gelfand-Phillips.*

Demostración.- Si $(E',\tau) := proj_n\left(E'_n, \mu(E'_n, E_n)\right)$ resulta de ([15] IV.4.5.Obs) que τ es una topología del par (E,E'). Puesto que cada E_n es reflexivo, su topología de Mackey $\mu(E'_n, E_n)$ coincide con la fuerte y así $\left(E'_n, \mu(E'_n, E_n)\right)$ es un *DF*. Ahora, aplicando [1] resulta que (E',τ) es débil angélico, es decir, los conjuntos $\sigma\left((E',\tau),(E',\tau)'\right) = \sigma(E',E)$ – compactos son sucesionalmente compactos. Basta aplicar la observación (A). □

7. Corolario.- Si $E = ind_n E_n$ *es un límite inductivo cuyas aplicaciones conectivas son débilmente compactas, entonces E es de Gelfand-Phillips.*

Demostración.- De acuerdo con ([13] 8.5.6) E se puede representar por una sucesión de espacios de Banach, de modo que supondremos que E_n son espacios de Banach. Aplicando el teorema de factorización de Davis, Figiel, Johnson y Pelczynski, ver [8] 17.2.9, los espacios E_n pueden ser tomados reflexivos. La anterior Proposición se aplica ahora. □

En lo sucesivo, haremos uso del siguiente resultado, esencialmente debido a Bourgain y Diestel para espacios de Banach, observado por

Drewnowski y Emmanuele [5] y que es válido para espacios de Fréchet como consecuencia de [17] 3. Cor. 2: **(B)** *Un espacio de Fréchet E es de Gelfand-Phillips si, y solo si, cada sucesión limitada en E débilmente nula es nula.* Una prueba de este resultado se obtiene como consecuencia de la siguiente Proposición.

8. Proposición.- *Sea $T: E \to F$ lineal y continua tal que transforma sucesiones limitadas débilmente convergentes en sucesiones convergentes. Entonces, T transforma conjuntos limitados en conjuntos relativamente compactos.*

Demostración.- Sea $A \subset E$ un conjunto limitado y sea $\{a_n\}$ una sucesión arbitraria en *A*. Como los conjuntos limitados son débil condicionalmente compactos [17], podemos suponer que $\{a_n\}$es débilmente de Cauchy. Si $\{T(a_n)\}$ no tuviera una subsucesión de Cauchy, podríamos encontrar $\varepsilon > 0$ y dos sucesiones de números naturales estrictamente crecientes $\{n_j\}, \{m_j\}$, tales que $\left\| T\left(a_{n_j}\right) - T\left(a_{m_j}\right) \right\| > \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pero por ser $\{a_n\}$ débilmente de Cauchy, la sucesión $\left\{a_{n_j} - a_{m_j}\right\}$ es débil convergente a 0, lo que contradice la hipótesis sobre T. □

También es inmediato comprobar que: **(C)** Para saber que $\{x_n\} \subset E$ es limitada es suficiente probar que si $\{z_n\} \subset E'$ es $\sigma(E', E)$- nula, entonces $< z_n, x_n > \to 0$.

La siguiente Proposición se debe a Drewnowski y Emmanuele [5] para espacios de Banach; la prueba que damos sigue el esquema de la suya.

9. Proposición.- *Sea $X \subset E$ un subespacio cerrado del espacio de Fréchet E tal que el espacio cociente E / X es de Gelfand-Phillips. Entonces E es de Gelfand-Phillips si, y solo si, cualquier sucesión $\{x_n\} \subset X$ débil nula y limitada en E, es convergente a* 0 *en E.*

Demostración.-$(\Leftarrow)$.- De acuerdo con la condición **(B)**, será suficiente demostrar que si $\{z_n\} \subset E$ es débil nula y limitada, es convergente a 0 en *E*. En efecto, sea $q: E \to (E / X)$ la aplicación cociente. Entonces $\{q(z_n)\}$es $\sigma((E / X), (E / X)')$-nula y limitada, luego convergente a cero por ser E / X de Gelfand-Phillips. Tal como hace notar Jarchow en ([8] 9.4.5) existe una sucesión nula $\{y_n\} \subset E$ tal que $q(y_n) = q(z_n)$. Si $x_n := y_n - z_n$, $\{x_n\} \subset X$ es una sucesión débil nula y limitada en E, luego por hipótesis converge a cero en E y en consecuencia, $\{z_n\}$ es nula. □

10. Proposición.- *Si X es un subespacio cerrado de Gelfand-Phillips del espacio de Fréchet E y existe un subespacio cerrado $Y \subset E$ tal que $Y'(\sigma(Y',Y))$ es angélico y $X+Y$ es denso en E, entonces E es de Gelfand Phillips.*

Demostración..- Sea $q: E \to (E/X)$ la aplicación cociente. Como $q: Y \to (E/X)$ tiene imagen densa, $q^t: (E/X)' \to Y'$ es inyectiva y $\sigma((E/X)',(E/X)) - \sigma(Y',Y)$ continua, luego por [6] 3.3.(2), $((E/X)'$, $\sigma((E/X)',(E/X))$ es angélico. De manera que por **(A)**, E/X es de Gelfand-Phillips. Por la Proposición 8, bastará comprobar que cualquier sucesión $\{x_n\} \subset X$ débil nula y limitada en E es limitada en X y por tanto, convergente a 0 en E. Para saber que $\{x_n\} \subset X$ es limitada en X, es suficiente probar que si $\{z_n\} \subset X'$ es $\sigma(X',X)$-nula, entonces $\lim_n < z_n, x_n > = 0$: En efecto, existe un entorno de cero V en E tal que $z_n \in (V \cap X)^o$ $\forall n$ y como $X_{(V \cap X)}$ es un subespacio de $E_{(V)}$ ([8] p. 215), existe una extensión $\hat{z}_n$ de z_n a $E_{(V)}$; además, como $(E_{(V)})' = E'_{V^o}$ (ver por ejemplo, [8] 8.3.4), se puede tomar $\hat{z}_n \in V^o$. Si $y_n := \hat{z}_n|_Y$, $\{y_n\} \subset Y'$ es equicontinuo, luego $\sigma(Y',Y)$ relativamente compacto y por hipótesis sobre Y, existirá una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ $\sigma(Y',Y)$-convergente. Entonces, $\{\hat{z}_{n_k}\}$ será puntualmente convergente en $X+Y$ a un cierto $\omega \in E'$ y por ser un conjunto equicontinuo, también $\omega = \sigma(E',E) - \lim_{k\to\infty} \hat{z}_{n_k}$. Por ser $\{x_n\}$ limitada en E, $0 = \lim_{k\to\infty} < \hat{z}_{n_k}, x_{n_k} >$. Ahora se deduce que $\lim_{n\to\infty} < \hat{z}_n, x_n > = 0$. □

Como consecuencia de lo anterior obtenemos la generalización de [5] Cor. 5.4 para espacios de Fréchet.

11. Corolario.- *Sea $X \subset E$ un subespacio cerrado del espacio de Fréchet E tal que el espacio cociente E/X es separable y X es de Gelfand-Phillips. Entonces E es de Gelfand-Phillips.* Como E/X es separable, basta tomar

$D \subset E$ numerable tal que $q(D)$ sea denso en E/X e Y el subespacio cerrado engendrado por D.

Es oportuno recordar aquí si $A \subset X \subset E$ es limitado en E, A no es necesariamente limitado en X. Basta considerar el ejemplo de Dineen, mencionado al comienzo, de la sucesión de las unidades de l^{∞} que está contenido en c_o en el que no son un limitado, pues formarían un relativamente compacto.

Tal como observan Lindstrom y Schlumprecht [10], los productos de espacios de Gelfand-Phillips lo son también, así como los subespacios; en consecuencia, tenemos la siguiente

Nota.- *Si X es un espacio topológico hemicompacto con una sucesión fundamental de compactos $\{K_n\}$ tales que $C(K_n)$ son de Gelfand-Phillips, entonces $C(X)$ es también de Gelfand-Phillips.* Así, si X es el dual de un espacio de Fréchet separable F con la topología de la convergencia uniforme en los compactos, es decir, $X = F_c'$, los polares de una sucesión fundamental de entornos de cero en F son una sucesión fundamental de compactos de X que satisfacen la condición DCSC de [5].

12.- Proposición.- *Si F es un espacio de Fréchet que no contiene copias de l_1, entonces $E := F_\beta'$ es un espacio de Gelfand-Phillips.*

Demostración.- Sea $A \subset E$ un conjunto acotado no precompacto, entonces existirán $B \subset F$ acotado y una sucesión, $\{x_n\} \subset A$ tales que $x_n - x_m \notin B^o$ si $m \neq n$. Pongamos $V := B^o$ y $E_{(V)} := \dfrac{E}{p_V^{-1}(0)}$ para el espacio normado asociado al entorno V. Como $p_V(x_n - x_m) \geq 1$ si $m \neq n$, afirmamos que si E_m es el subespacio de $E_{(V)}$ engendrado por $\{x_1, \ldots, x_m\}$, existe $M \subset N$ infinito y existe $\delta > 0$ tal que para cada $m \in M$, existe $n > m$ tal que $d(E_m, x_n) > \delta$ siendo d la métrica en $E_{(V)}$. En efecto, argumentando como en [12] 4.6. Cor., si no fuera así, dados $\delta > 0$ y $M \subset N$ infinito, existiría $m \in M$ tal que $d(E_m, x_n) < \delta$ para cada $n > m$ y también, desde luego, si $n \leq m$. Elijamos para cada $n \in M$ un elemento $y_n \in E_m$ tal que $p_V(y_n - x_n) < \delta$. Como $\{x_n\}$ es acotado en $E_{(V)}$, también $\{y_n\}_{n \in M}$ lo es. Pero E_m es finito dimensional, luego $\{y_n\}_{n \in M}$ sería precompacto y, en consecuencia, la sucesión

$\{x_n\}_{n\in M}$ podría ser recubierta por una cantidad finita de bolas de radio 2δ , lo que contradice la elección de los x_n .

Considerando la sucesión $\{x_m\}_{m\in M}$ en lugar de $\{x_n\}$si es necesario, podremos suponer que $d(E_m, x_{m+1}) > \delta$ para cada $m \in N$. Puesto que $\left(E_{(V)}\right)' = E'_V$. donde $V^{\bullet}$ es la polar de V en el par (E, E') y por el teorema de Hahn-Banach, existen $\phi_n \in E'_V$ tales que $\phi_n \in V^{\bullet}, \phi_n(x_n) \geq 1$ y $\phi_n(x_m) = 0$ si $m < n$. Por el teorema del bipolar $V^{\bullet}$ es la $\sigma(E', E) = \sigma(F'', F')$ clausura de B, de manera que existen $f_n \in B \subset F$ tales que $f_n(x_n) \geq 1 - \frac{1}{n}$ y $f_n(x_m) < \frac{1}{n}$ si $m < n$. Como F no contiene copias de l_1 , resulta de Prop. 2 [18] que de la sucesión $\{f_n\}$se puede extraer una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ $\sigma(F, F')$-Cauchy y también $\sigma(E', E)$-Cauchy. Ahora bien, como $V^{\bullet}$ es $\sigma(E', E)$-compacto, existirá el límite $f \in E'$ de esta subsucesión. Ahora para cada $m \in N$, $\lim_k f_{n_k}(x_m) = f(x_m)$, luego $f(x_m) = 0 \forall m$ y por tanto, $\left\| f_{n_k} - f \right\|_A \geq \left| f_{n_k}\left(x_{n_k}\right) - f(x_k) \right| \geq 1/2$. Lo que significa que A no es limitado. □

References

[1] CASCALES, B. y ORIHUELA, J., On Compactness in Locally Convex Spaces. *Math. Z.* 195, 365-381 (1987)

[2] DINEEN, S., Bounding subsets of a Banach space. *Math. Ann.* 192, 61-70 (1971.

[3] DIESTEL, J., *Sequences and Series on Banach spaces.* Springer GMT 92 (1983).

[4] DIESTEL, J., UHL, J.J., *Vector measures.* Math. Surveys 15. Amer. Math. Soc. (1977).

[5] DREWNOWSKI, L. y EMMANUELE, G., On Banach spaces with the Gelfand-Phillips Property. II. *Rend. Circ. Mat. di Palermo* Ser. II, XXXVIII, 377-391 (1989).

[6] FLORET, K., *Weakly Compact Sets.* Lect. Notes in Math 801. Springer. 1980.

[7] GELFAND, Y., Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren. *Mat. Sbornik (Recueil Math.)* 4 (1998), 235-236.

[8] JARCHOW, H., *Locally Convex Spaces*. Teubner, 1981.

[9] JOSEFSON, B., A. Banach space containing non-trivial limited sets but no non-trivial bounding sets. *Israel J. Math.* 71-3, 321-327 (1990).

[10] LINDSTROM, M. y SCHLUMPRECHT, T., On limitedness in locally convex spaces. *Arch. Math.* 53, 65-74 (1989).

[11] LINDSTROM, M. y SCHLUMPRECHT, T., A Josefson Nissenzweig theorem for Fréchet spaces. *Bull. London Math. Soc.* 25 (1993), 55-58.

[12] MUJICA, J., Conjuntos acotantes y conjuntos limitados en espacios de Banach. Publ. Dep. Análisis Mat. Universidad Complutense Madrid. (1988).

[13] PÉREZ CARRERAS, P. BONET, J., *Barrelled Locally Convex Spaces*. North-Holland Math. Studies 131 (1987).

[14] PHILLIPS, R.S., On linear transformations. *Trans. A.M.S.* 48, 516-541 (1940).

[15] SCHAEFER, H.H., *Espacios vectoriales topológicos*. Ed. Teide 1971.

[16] SCHLUMPRECHT, T., A limited set that is not bounding. *Proc. Roy. Irish. Acad.* 90A, 125-129 (1990).

[17] VALDIVIA, M., Fréchet spaces with no subspaces isomorphic to l_1. *Math. Jap.* 38-3, 397-411 (1993).

[18] VALDIVIA, M., On totally reflexive Fréchet spaces. *Pub. del'Universitá di Bari* núm. 240, 39-55 (1991).