Movimiento de un líquido ideal pesado en una vasija elástica no acotada

ANDRÉS FRAGUELA*

Recibido: 4 de Mayo de 1.994

Presentado por el Académico Correspondiente Sr. Bombal

Abstract

In this paper one considers the problem about small oscillations of an ideal heavy liquid contained in an unbounded elastic container produced by initial perturbations of the bottom and of the own free surface. Our aim is to use the known results about differential equations on Banach spaces for the study of the solubillity in general sense of the system modelling the phisical situation.

Resumen

En este artículo se considera el problema de las oscilaciones pequeñas de un líquido ideal pesado, contenido en una vasija elástica acotada y producidas por perturbaciones iniciales del fondo y de la superficie libre.

Nuestro objetivo es usar los resultados conocidos sobre ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, para el estudio de la solubilidad en un sentido generalizado, del sistema que modela esta situación física.

1. Introducción

En este trabajo se estudia el problema linealizado sobre la determinación del movimiento de un líquido ideal pesado en una vasija elástica no acotada para ciertos datos iniciales.

2. Planteamiento del problema

Consideremos el movimiento de un líquido ideal pesado en una vasija elástica no acotada, cerca de la posición de equilibrio. El sistema que estudiaremos simula el movimiento de la superficie del mar producido por un

* Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas. Univ. Autónoma de Puebla (México)

movimiento del fondo o una perturbación en la superficie libre del agua. No tendremos en cuenta la tensión superficial, por lo cual la superficie libre del líquido en su estado de equilibrio se considera plana.

Sean en $\mathbf{R}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) \}$ los ejes X_1 y X_2 colocados horizontalmente y X_3 en la dirección vertical indicando hacia arriba. Denotaremos por Ω la región de $\mathbf{R}^2 = \{ (x_2, x_3) \}$ cuya frontera está constituida por la gráfica de una función $x_3 = h(x_2)$ continuamente diferenciable y de soporte compacto.

$$\Omega = \{(x_2, x_3) / x_3 \leq h(x_2)\}$$

Consideremos la región de $\mathbf{R}^3 : \Sigma = \Omega \times \mathbf{R}$, y designemos mediante $\partial \Sigma$ y $\partial \Omega$ sus respectivas fronteras topológicas. Obviamente

$$\partial \Sigma = \partial \Omega \times \mathbf{R}$$

Supongamos que la región Σ es un medio elástico que representa el fondo de un mar sobre el cual se encuentra una cordillera o grieta cuyo perfil está determinado por la función h y con sección transversal constante en la dirección X_1.

Supondremos además que sobre Σ se encuentra depositada una capa $\Sigma_o = \Omega_o \times \mathbf{R}$ de un líquido ideal pesado con altura l con respecto a la parte plana del fondo.

Asumiremos que $h(x_3) \leq l$ y denotaremos por $\partial \Sigma_o$ la frontera superior de la capa del líquido

$$\partial \Sigma_o = \{(x_1, x_2, x_3) / x_3 = l\} = \partial \Omega_o \times \mathbf{R}$$

donde

$$\partial \Omega_o = \{(x_2, x_3) / x_3 = l\}$$

Finalmente, denotemos por $\mathcal{W}_2^k(\Sigma)$ y $\mathcal{W}_2^k(\Omega)$ a los espacios de Soboliev de orden k formados por funciones vectoriales $f = (f_1, f_2, f_3)$ y por $W_2^k(\Sigma_o), W_2^k(\Omega_o)$ los correspondientes espacios de funciones escalares en Σ_o y Ω_o respectivamente. Para $k = 0$ se obtienen los espacios

$\mathcal{L}_2(\Sigma), \mathcal{L}_2(\Omega), L_2(\Sigma_o), L_2(\Omega_o)$ de funciones vectoriales y escalares de cuadrado integrable.

El problema de las oscilaciones de este sistema producido por ciertas condiciones iniciales de presión hidrostática y desplazamientos del fondo viene descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{k=l}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(u)}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1,2,3 \ (\Sigma) \tag{1}$$

$$\Delta p = 0 \ (\Sigma_o) \tag{2}$$

$$\sigma(u) \cdot n = pn, \ \frac{\partial p}{\partial n} = \rho_o \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} \ (\partial\Sigma) \tag{3}$$

$$g \frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (\partial\Sigma_o) \tag{4}$$

y con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, l, 0) &= p_o(x_1, x_2) \\ &(\partial\Sigma_o) \\ p_t(x_1, x_2, l, 0) &= p_1(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3, 0) &= u_o(x_1, x_2, x_3) \\ &(\Sigma) \\ u_t(x_1, x_2, x_3, 0) &= u_1(x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{6}$$

donde (1) es la ecuación de oscilaciones de un medio elástico $p = p^* - p_o + \rho_o g x_3$ es la presión hidrostática y p^* la presión en la frontera de contacto $\partial\Sigma$ entre el fondo y el líquido

$$\sigma_{ik}(u) = \lambda \delta_{ik} \nabla u + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

es el tensor de tensiones elásticas del fondo, donde $u=(u_1,u_2,u_3)$ es el vector de desplazamientos, δ_{ik} la delta de Kronecker, λ y μ constantes de elasticidad

$$\nabla u=\sum_{i=l}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Se denotan además por
g - aceleración de la gravedad
ρ - densidad del fondo Σ
ρ_o - densidad del fondo Σ_o
$n=\left(0,\frac{\partial h}{\partial x_2},1\right)$ - vector normal exterior al fondo
u_n - componente de u en la dirección normal

Observemos que las condiciones (3) significan sucesivamente: condición de continuidad de las tensiones normales en $\partial\Sigma$ y condición de impenetrabilidad en $\partial\Sigma$. La función $p(x,t)$ está relacionada con el potencial de velocidades $\phi(x,t)$ mediante la fórmula $p=-\rho_o\frac{\partial\phi}{\partial t}$ y con la desviación $\xi(x_1,x_2,l,t)$ de la superficie libre $\partial\Sigma_o$ por las relaciones

$-\rho_o g\xi+p=0\,(\partial\Sigma_o)$ - condición de presión constante

$\rho_o\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\frac{\partial p}{\partial x_3}=0\;(\partial\Sigma_o)$ - condición de impenetrabilidad, de las cuales se deduce (4).

En particular de la primera de estas expresiones se concluye que pueden darse en lugar de las condiciones iniciales (5), las condiciones

$$\xi(x_1,x_2,l,0)=\xi_o(x_1,x_2)$$
(5)
$$\xi_t(x_1,x_2,l,0)=\xi_1(x_1,x_2)$$

En el trabajo KREIN y LAPTIEV (1968) se estudia la existencia de soluciones generalizadas para el problema de Cauchy correspondiente al movimiento de un líquido viscoso en una vasija abierta acotada y con paredes duras. Utilizando técnicas de las ecuaciones diferenciales en espacios de Banach, nosotros obtendremos un resultado similar para el problema planteado.

3. Problemas auxiliares

Primeramente estudiaremos siete problemas auxiliares estacionarios. La existencia y unicidad de solución de estos problemas nos permitirá introducir seis operadores mediante los cuales se reduce el problema (1)-(4) a una ecuación hiperbólica general en un espacio de Banach.

Por comodidad denotemos por

$$L_o(u) = -\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(u)}{\partial x_k}$$

Problema I. En la región Σ, hallar la solución del sistema de ecuaciones $L_o(s) = f$ satisfaciendo las condiciones de contorno en $\partial\Sigma$

$$\begin{aligned} \sigma(s)\cdot &= 0 \\ s_n &= 0 \end{aligned}$$

Problema II. En la región Σ, hallar la solución del sistema de ecuaciones $L_o(w) = 0$ con las condiciones de contorno en $\partial\Sigma$

$$\begin{aligned} \sigma(z)\cdot n &= \varphi \\ z_n &= 0 \end{aligned}$$

Problema III. En la región Σ, hallar la solución del sistema de ecuaciones $L_o(w) = 0$ con las condiciones de contorno en $\partial\Sigma_o$

$$\begin{aligned} \sigma(w)\cdot n &= 0 \\ w_n &= \psi \end{aligned}$$

Problema IV. En la región Σ_o , hallar la solución de la ecuación $\Delta r = 0$ con las condiciones de contorno

$$r\Big|_{\partial\Sigma_o} = \xi, \; r\Big|_{\partial\Sigma} = 0$$

Problema V. En la región Σ_o , hallar la solución de la ecuación $\Delta q = 0$ con las condiciones de contorno

$$q\Big|_{\partial\Sigma_o} = 0 \;,\; q\Big|_{\partial\Sigma} = \eta$$

Problema VI. En la región Σ_o , hallar la solución de la ecuación $\Delta r = 0$ con las condiciones de contorno

$$r\Big|_{\partial\Sigma_o} = \xi, \; \frac{\partial r}{\partial n}\Big|_{\partial\Sigma} = 0$$

Problema VII. En la región Σ_o , hallar la solución de la ecuación $\Delta q = 0$ con las condiciones de contorno

$$\frac{\partial q}{\partial x_3}\Big|_{\partial\Sigma_0} = 0 \;\;,\;\; q\big|_{\partial\Sigma} = \eta$$

4. Resultados auxiliares

En el §1 hemos introducido los espacios de Soboliev clásicos.
Pongamos ahora

$$\xi_o(u,v) = \frac{\lambda}{2}\nabla u \nabla \bar{v} + \mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\mu}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

y definamos

$$E_o[u,v] = \int_\Sigma \xi_o[u,v]dx \tag{7}$$

$$E[u,v] = E_o[u,v] + < u_n, v_n > \tag{8}$$

donde $<,>$ denota el producto escalar en $\mathcal{L}_2(\Sigma)$.

Si sobre el conjunto $\mathcal{W}_2^1\ (\Sigma)$ introducimos las normas

$$[E_o[u,u]]^{\frac{1}{2}} \tag{9}$$

$$[E[u,u]]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

entonces la segunda desigualdad de Korn para regiones no acotadas nos asegura que estas normas son equivalentes a la norma usual en $\mathcal{W}_2^1\ (\Sigma)$. Es decir, existen constantes positivas *m* y *M* tales que

$$mE_o[v,v] \leq \| v \|^2_{W_2 / (\Sigma)} \leq ME_o[v,v] \tag{11}$$

$$mE[v,v] \leq \| v \|^2_{W_2 / (\Sigma)} \leq ME[v,v] \tag{12}$$

para toda $v \in \mathcal{W}_2^1\ (\Sigma)$

Recordemos que la forma bilineal $E_o[u,v]$ entra en la fórmula de Green para el operador de Lamé L_o que se cumple para todo par de funciones vectoriales *u* y *v* suaves sobre Σ

$$< L_o u, v > = E_o[u,v] - \int_{\partial\Sigma} \sigma(u) \cdot n\bar{v} ds \tag{13}$$

5. Soluciones de los problemas auxiliares. Teoremas de existencia y unicidad.

Llamaremos solución generalizada del problema 1 a una función vectorial $s \in \mathcal{W}_2^1\ (\Sigma)$ que satisface para todo $v \in \mathcal{W}_2^1\ (\Sigma)$ la identidad integral

$$E[s,v] = < f, v > \tag{14}$$

Solución generalizada del problema II se llama a una función vectorial $z \in \mathcal{W}_2^1\ (\Sigma)$ que satisfaga para todo $v \in W_2\ / (\Sigma)$ la identidad integral

$$E[z,v] = \int_{\partial\Sigma} \varphi \bar{v} ds \tag{15}$$

Solución generalizada del problema III se llama a una función vectorial $w \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ que satisfaga para todo $v \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ la identidad integral

$$E[w,v] = \int_{\partial\Sigma} \psi \cdot \bar{v}_n \, ds \tag{16}$$

Notemos que el planteamiento generalizado de los problemas (14)-(16) se deduce de manera natural de la fórmula de Green (13) si agregamos a cada lado el término integral $\int_{\partial\Sigma} u_n \bar{v}_n \, ds$.

Por otra parte, debido a la condición de contorno $s_n = 0$ y $z_n = 0$ en los problemas I y II se tiene que los mismos son equivalentes a hallar funciones vectoriales s_o y z_o en $\mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ que satisfagan para todo $v \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ las identidades integrales

$$E_o[s_o, v] = \langle f, v \rangle$$

y

$$E_o[z_o, v] = \langle \varphi, v \rangle$$

respectivamente.

Consideremos ahora las soluciones fuertes de los problemas IV y VII. Llamaremos solución fuerte del problema IV a toda función $r \in W_2^2(\Sigma_o)$ que satisfaga la ecuación $\Delta r = 0$ en Σ_o y las condiciones de contorno.

$$r\big|_{\partial\Sigma_o} = \xi, \quad r\big|_{\partial\Sigma} = 0$$

Similarmente, una solución fuerte del problema V es toda función $q \in W_2^2(\Sigma_o)$ que satisfaga la ecuación $\Delta q = 0$ y las condiciones de contorno

$$q\big|_{\partial\Sigma_o} = 0, \quad q\big|_{\partial\Sigma} = \eta$$

De manera similar se deriva el concepto de solución fuerte para los problemas VI y VII.

Evidentemente cualquier solución clásica de los problemas I y III es también una solución generalizada. Para cerciorarse de esto basta multiplicar escalarmente las expresiones $L_0 s, L_0 z$ y $L_0 w$ por $v \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$, donde s, z y w

son soluciones clásicas de los problemas I-III e integrando por partes teniendo en cuenta la fórmula de Green (13).

Inversamente, no resulta difícil probar siguiendo el método usual, que toda solución generalizada de alguno de los problemas (I-III), dos veces continuamente diferenciable es también una función clásica.

Pasemos a demostrar los dos siguientes teoremas de existencia y unicidad de solución de los problemas (I-VII).

Teorema 1. Para cualquiera $f \in \mathcal{L}_2(\partial\Sigma), \varphi \in \mathcal{L}_2(\partial\Sigma)$ y $\psi \in \mathcal{L}_2(\partial\Sigma)$, existe una única solución generalizada de los problemas I-III.

Demostración: En virtud de la desigualdad de Korn (12) y de los teoremas de inmersión de Soboliev se tiene que

$$|<f,v>| \leq \| f\|_{\mathcal{L}_2(\Sigma)} \| v \|_{\mathcal{L}_2(\Sigma)} \leq C_1 \| f\|_{\mathcal{L}_2(\Sigma)} \| v \|_{\mathcal{W}_2^1(\Sigma)} \tag{17}$$

$$\left| \int_{\partial\Sigma} \varphi \bar{v} ds \right| \leq \| \varphi \|_{\mathcal{L}_2(\partial\Sigma)} \| v \|_{\mathcal{L}_2(\partial\Sigma)} \leq C_2 \| \varphi \|_{\mathcal{L}_2(\partial\Sigma)} \| v \|_{W_2^1(\Sigma)} \tag{18}$$

$$\left| \int_{\partial\Sigma} \psi \cdot v_n \, ds \right| = \left| \int_{\partial\Sigma} \psi \cdot n \cdot \bar{v} ds \right| \leq$$

$$\leq max \; |n| \; \| \psi\|_{L_2(\partial\Sigma)} \| v \|_{\mathcal{L}_2(\partial\Sigma)} \leq C_3 \| \psi\|_{L_2(\partial\Sigma)} \| v \|_{W_2^1(\Sigma)} \tag{19}$$

De (17)-(19) se deduce que las expresiones $< f, v >, \int_{\partial\Sigma} \varphi \bar{v} ds$ y $\int_{\partial\Sigma} \psi \cdot v_n ds$ son funcionales lineales continuos en $\mathcal{W}_2^1(\Sigma)$. Por el teorema de Riesz sobre la representación de funcionales lineales continuos en espacios de Hilbert, ellos pueden ser representados de forma única mediante ciertas funciones *s, z* y *w* en la forma $E[s,v], E[z,v]$ y $E[w,v]$ respectivamente. De aquí se concluye la existencia y unicidad de solución generalizada de los problemas (I-III).

Además de (17)-(19) utilizando (12) se obtiene los siguientes estimados para las respectivas soluciones

$$\| s \|_{\mathcal{W}_2^1(\Sigma)} \leq \frac{C_1}{m} \| f \|_{\mathcal{L}_2(\Sigma)} \tag{20}$$

$$\| z \|_{\mathcal{W}_2^1(\Sigma)} \leq \frac{C_2}{m} \| \varphi \|_{\mathcal{L}_2(\Sigma)} \tag{21}$$

$$\| w \|_{\mathcal{W}_2^1(\Sigma)} \leq \frac{C_3}{m} \| \psi \|_{L_2(\Sigma)} \tag{22}$$

El resultado sobre existencia y unicidad de la solución fuerte de los problemas IV-VII se deduce de la teoría general de problemas de contorno elípticos con coeficientes constantes (ver LIONS y MAGENES (1971)).

Teorema 2. Para cada $\xi \in W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$ y $n \in W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma)$ existe una única solución fuerte de los problemas IV-V.

Ellas satisfacen las siguientes desigualdades a priori:

$$\| r \|_{W_2^2(\Sigma_o)} \leq C\left\{ \| \xi \|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)} \right\} \tag{23}$$

$$\| q \|_{W_2^2(\Sigma_o)} \leq C\left\{ \| n \|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma)} \right\} \tag{24}$$

donde (23) se cumple para la solución fuerte de IV y VI y (24) para la solución fuerte de V y VII.

Aquí $W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$ y $W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma)$ denotan los espacios de Soboliev de orden fraccionario $\frac{3}{2}$, llamados también espacios de Soboliev-Slobodietskii. Ellos coinciden con las trazas sobre $\partial\Sigma_o$ y $\partial\Sigma$ respectivamente de las funciones de $W_2^2(\partial\Sigma_o)$ y $W_2^2(\partial\Sigma)$.

6. Formulación operacional de los problemas auxiliares

Por el teorema 1 a cada función vectorial $f \in \mathcal{L}_2(\partial\Sigma)$, $\varphi \in \mathcal{L}_2(\partial\Sigma)$ y cada función escalar $\psi \in L_2(\partial\Sigma)$, les corresponde de manera unívoca funciones vectoriales s, z y w en $\mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ que son respectivamente soluciones generalizadas de los problemas I-III.

De esta forma podemos definir operadores P, T y Q, definidos por

$$P: \mathcal{L}_2(\Sigma) \rightarrow \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$$

$$T: \mathcal{L}_2(\partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$$

$$Q: L_2(\partial\Sigma) \rightarrow \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$$

y tales que

$$P(f) = s$$

$$T(\varphi) = s$$

$$Q(\psi) = w$$

Obviamente esos tres operadores son lineales y de las desigualdades (20)-(22) se deduce que además son continuos.

El siguiente lema cuyo análogo puede encontrarse en KUSTIUCHENKO, ORAZOV (1986) nos da otras propiedades del operador P.

Lema 1. El operador P considerado como operador de $\mathcal{L}_2(\Sigma)$ en $\mathcal{L}_2(\Sigma)$ es estrictamente positivo $(< Pf, f >> 0)$ para toda $f \in L_2(\partial\Sigma)$ y por eso es inversible. Si ponemos $A = P^{-1}$, entonces se cumple que $D\left(A^{\frac{1}{2}}\right) = \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ y además para cada $v \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$

$$\left\| A^{\frac{1}{2}} v \right\|_{\mathcal{L}_2(\Sigma)} \sim \| v \|_{\mathcal{W}_2^1(\Sigma)}$$

ya que que $E_o[u,v] = < A^{\frac{1}{2}} u, A^{\frac{1}{2}} v >$ para todos $u, v \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$

Finalmente, para el operador T se cumple

$$< A^{\frac{1}{2}} T\varphi,\, A^{\frac{1}{2}} v > \; = \int_{\partial\Sigma} \varphi\bar{v}\, ds$$

Demostración. Ver KUSTIUCHENKO-ORAZOV (1986). Denotemos por $\mathcal{R}_o$ al operador que a $\xi \in W_2^2\left(\partial\Sigma_o\right)$ le hace corresponder la solución fuerte del problema IV. De manera análoga definimos al operador R con respecto al problema V.

Asociemos al problema IV, el operador $\mathcal{H}_o : W_2^{\frac{3}{2}}\left(\partial\Sigma_o\right) \rightarrow L_2\left(\partial\Sigma_o\right)$ que a cada $\xi \in W_2^{\frac{3}{2}}\left(\partial\Sigma_o\right)$ le hace corresponder la derivada normal en $\partial\Sigma_o$ de la solución $r = \mathcal{H}_o(\xi)$ de dicho problema. Es decir

$$\mathcal{H}_o : r\big|_{\partial\Sigma_o} \;\rightsquigarrow\; \frac{\partial r}{\partial\eta}\bigg|_{\partial\Sigma_o}$$

donde r es cualquier solución fuerte del problema IV.

Le llamaremos $\mathcal{H}$ al correspondiente operador asociado al problema V, es decir

$$\mathcal{H} : W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma) \rightarrow L_2(\partial\Sigma)$$

$$q\big|_{\partial\Sigma} \;\rightsquigarrow\; \frac{\partial q}{\partial\eta}\bigg|_{\partial\Sigma_o}$$

Finalmente denotemos por B_o y B las respectivas clausuras en $L_2\left(\partial\Sigma_o\right) L_2(\partial\Sigma)$ respectivamente de los operadores $\mathcal{H}_o$ y $\mathcal{H}$.

$$B_o = \overline{\mathcal{H}_o} \qquad (25)$$

$$B = \overline{\mathcal{H}} \qquad (26)$$

Lema 2. Los operadores B_o y $-B$ son autoconjugados y positivos en $L_2(\partial\Sigma_o)$ y $L_2(\partial\Sigma)$ respectivamente. Además $\mathcal{D}(B_o) = W_2^1(\partial\Sigma_o)$ y $\mathcal{D}(B) = W_2^1(\partial\Sigma)$

Demostración. Hagamos la demostración para B_o ya que para B es similar. Evidentemente $D(B_o)$ es denso en $L_2(\partial\Sigma_o)$. Además, aplicando la fórmula de Green para el operador de Laplace se tiene, para todo par r_1 y r_2 de soluciones fuertes del problema IV, tales que

$$r_1\big|_{\partial\Sigma_o} = \xi_1 \ , \quad r_2\big|_{\partial\Sigma_o} = \xi_2$$

la igualdad

$$\int_{\partial\Sigma} \Delta r_1 \cdot \bar{r}_2 \, dx = \int_{\partial\Sigma} \nabla r_1 \, \nabla \bar{r}_2 \, dx \; - \int_{\partial\Sigma_o} \frac{\partial r_1}{\partial x_3} \bar{r}_2 \, ds$$

de donde se concluye que

$$\int_{\partial\Sigma_o} B_o(\xi_1)\overline{\xi_2} \, ds \; = \; \int_{\partial\Sigma_o} \nabla r_1 \, \nabla \bar{r}_2 \, dx \qquad (27)$$

Tomando $r_1 = r_2$ de aquí se deduce la positividad de B_o . Cambiando los papeles de r_1 y r_2 se sigue que B_o es simétrico.

No resulta difícil ver de la definición de clausura de un operador que $D(B_o)$ es la clausura en $W_2^1(\partial\Sigma_o)$ de $W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$. Pero $W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$ es denso en $W_2^1(\partial\Sigma_o)$ y por lo tanto $D(B_o) = W_2^1(\partial\Sigma_o)$.

Observemos que el cero es un punto de tipo regular para el operador B_o . En efecto, si $\xi \in W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$, entonces por los teoremas de inmersión.

$$\| \xi \|_{L_2(\partial\Sigma_o)} \; \le \; c_1 \| r \|_{W_2^1(\Sigma_o)} \; \le \; c_2 \| \nabla r \|_{L_2(\Sigma_o)}$$

ya que por ser Σ_o no acotado, $\| \nabla r \|_{L_2(\Sigma_o)}$ es una norma en $W_2^1(\Sigma_o)$ equivalente a la norma usual. De aquí y de (27) se deduce que

$$\| \xi \|_{L_2(\partial\Sigma_o)} \leq c_2 \int_{\partial\Sigma_o} B_o(r)\bar{r}dx$$

luego cero es un punto regular de B_o .

Pero ahora para demostrar la autoadjunticidad basta ver si

$$\int_{\partial\Sigma_o} B_o(\xi)\overline{\xi_1}\, ds = 0 \tag{28}$$

para todo $\xi \in D(B_o)$, entonces $\xi_1 = 0$.

Pero esto es evidente ya que $\xi \in W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o) \subset D(B_o)$ puede ponerse en la forma $\xi = r\big|_{\partial\Sigma_o}$, donde r es una solución fuerte del problema IV. Si tomamos r en la forma $r = \psi(x_1, x_2) \cdot x_3$, donde $\psi(x_1, x_2)$ es una función armónica de las variables x_1 y x_2 entonces $B_o(\xi) = \psi$ y por lo tanto, la desigualdad (28) se reduce a

$$\int_{\partial\Sigma_o = \mathbf{R}^2} \psi(x_1, x_2)\overline{\xi_1(x_1, x_2)}\, ds = 0$$

para toda función ψ armónica en las variables x_1 y x_2 . Obviamente este conjunto es denso en $L_2(\partial\Sigma_o)$, de donde se concluye que $\xi_1 \equiv 0$ y con ello la demostración del lema.

De manera análoga a como fueron construidos los operadores B_o y B, se pueden construir operadores C_o y C a partir de los problemas VI y VII.

El operador C_o se define como la clausura del operador definido en $L_2(\partial\Sigma_o)$ con dominio $W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$ que a cada $\xi \in W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Sigma_o)$ le hace corresponder $\frac{\partial r}{\partial x_3}\Big|_{\partial\Sigma_o}$, donde r es la solución fuerte del problema VI correspondiente a la condición de contorno ξ . Similarmente se construye el operador C asociado al problema VII, y se obtiene el lema siguiente, cuya demostración es análoga a la del lema 2.

Lema 3. Los operadores C_o y $-C$ son antoconjugados y positivos en $L_2(\partial\Sigma_o)$ y $L_2(\partial\Sigma)$ respectivamente. Además $D(C) = W_2^1(\partial\Sigma)$ y $D(C_o) =$ $= W_2^1(\partial\Sigma_o)$.

7. Solución generalizada del problema no estacionario

Busquemos las soluciones generalizadas $(u(x_1, x_2, x_3; t), p(x_1, x_2, x_3; t))$ del sistema (1)-(4) en la forma

$$(u, p) = (u, r) + (v, q) \tag{29}$$

donde (u_1, r) es la solución de (1)-(4) correspondiente al valor de r que satisface el problema IV para la condición de contorno $r\big|_{\partial\Sigma_o} = \xi$.

Análogamente (v, q) es la solución de (1)-(4) correspondiente al valor de q que satisface el problema V para la condición de contorno $q\big|_{\partial\Sigma} = \eta$.

Si analizamos el sistema (1)-(4) y del hecho que el operador L_o es positivo, no es difícil concluir de (1) y (3) que $u_1 = 0$ y, por tanto r debe satisfacer el sistema $\Delta r = 0$.

$$r\Big|_{\partial\Sigma_o} = \xi \ , \ \frac{\partial r}{\partial n}\Big|_{\partial\Sigma} = 0$$

Luego, el sistema (1)-(4) para la solución (u_1, r) se reduce a la ecuación

$$gC_o(\xi) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \ , \ \xi \in W_2^1(\partial\Sigma_o) \tag{30}$$

Haciendo un análisis similar se llega a que la solución (v, q) del sistema (1)-(4) es también solución del sistema

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ik}(v)}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \ , \ i=1,2,3 \ (\Sigma) \tag{31}$$

$$\Delta q = 0 \ \ (\Sigma_o) \tag{32}$$

$$\sigma(v)\cdot n = \eta n \ , \ \frac{\partial q}{\partial n} = \rho_o \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \ (\partial\Sigma) \tag{33}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_3} \ \ (\partial\Sigma_o) \tag{34}$$

Notemos que usando el operador C puede escribirse el sistema (31)-(34) en la forma reducida (30) y

$$\sigma(v)\cdot \eta = \eta n \ , \ C(\eta) = \rho_o \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} \ \ (\partial\Sigma) \tag{35}$$

Busquemos ahora la solución (v,η) del sistema (30),(35) descomponiendo v en la forma

$$v = s + z + w \tag{36}$$

donde s, z y w vienen determinadas por las ecuaciones siguientes:

$$E[s,f] = -\rho < \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, f > \tag{37}$$

$$E[z,f] = \int_{\partial\Sigma} (\eta n)\cdot \bar{f} ds = \int_{\partial\Sigma} \eta \overline{f_n}\, ds \tag{38}$$

$$E[w,f] = \int_{\partial\Sigma} v_n \overline{f_n}\, ds \tag{39}$$

donde $f = f(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{W}_2^1(\partial\Sigma)$. Derivemos dos veces con respecto a t.

Entonces tendremos

$$E\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, f\right] = \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial^2 v_n}{dt^2}\, \overline{f_n}\, ds$$

y por la condición de contorno (35) llegamos a

$$E\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, f\right] = \frac{1}{\rho_o} \int_{\partial\Sigma} C(\eta)\, \overline{f_n}\, ds \tag{40}$$

Obviamente, por la definición de los operadores *P*, *T* y *Q*, (32), (33) y (40) son equivalentes a:

$$\rho P\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) + s = 0 \tag{41}$$

$$T(\eta n) - z = 0 \tag{42}$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - QC(\eta) = 0 \tag{43}$$

El sistema de ecuaciones operacionales (30), (31), (41), (42) y (43) es equivalente al sistema diferencial (1)-(4).

Sin embargo ese sistema de cinco ecuaciones tiene seis funciones desconocidas a saber: v, s, z, w, n y ξ y por ello no tiene sentido el planteamiento en esta forma del problema de Cauchy.

Lo que haremos será buscar una cierta relación entre los valores de η y ξ, asumiendo la siguiente

Condición auxiliar: supondremos que la profundidad de la franja de líquido es pequeña.

En este caso se puede expresar η aproximadamente en función de ξ:

$$\eta = k\xi \tag{44}$$

donde k es una cierta constante. Sea J el isomorfismo de $L_2(\partial\Sigma_o)$ en $L_2(\partial\Sigma)$ definido por

$$J(\psi)(x_1, x_2, h(x_2)) = \psi(x_1, x_2, l) \tag{45}$$

Entonces, donde quiera que aparezca η en (42) y (43) podemos sustituirla por $\eta = J(\psi)$ donde $\psi \in L_2(\partial\Sigma_o)$

$$k\tilde{T}(\xi) - z = 0 \tag{46}$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k\tilde{Q}(\xi) = 0 \tag{47}$$

donde

$$\tilde{T}(\xi) = T(J(\xi)) \tag{48}$$

$$\tilde{Q}(\xi) = QC(J(\xi)) \tag{49}$$

Finalmente hemos obtenido el sistema de ecuaciones operacionales (30), (31), (41), (46) y (47) de las funciones desconocidas v, s, z, w y ξ.

Si restamos (46) de (41), teniendo en cuenta (31), llegamos a

$$\rho_o P \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - k\tilde{T}(\xi) + v - w = 0 \tag{50}$$

Consideremos entonces el sistema (30), (47) y (50) y hagamos los cambios de variable $P = A^{-1}$, y

$$v = A^{\frac{1}{2}}(\alpha) w = A^{\frac{1}{2}}(\beta) \tag{51}$$

aplicando seguidamente el operador $A^{\frac{1}{2}}$ a ambos lados de (47) y (50).

Entonces nos queda el sistema constituido por

$$gC_o(\xi) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

y las ecuaciones:

$$\rho \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - kA^{\frac{1}{2}} \tilde{T}(\xi) + A(\alpha) - A(\beta) = 0 \tag{52}$$

$$\rho_o \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} - kA^{-\frac{1}{2}} \tilde{Q}(\xi) = 0 \tag{53}$$

Este sistema se puede expresar en la forma matricial siguiente:

$$\frac{d^2 U}{dt^2} = \mathcal{A} U \tag{54}$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \xi \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\rho} A & 0 \\ 0 & 0 & -gC_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} A & \frac{k}{\rho} A^{\frac{1}{2}} \tilde{T} \\ 0 & \frac{1}{\rho} A & \frac{k}{\rho} A^{\frac{1}{2}} \tilde{Q} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Obviamente $\mathcal{A}_1$ es generador de un semigrupo analítico de operadores y $\mathcal{A}_2$ está en $\mathcal{A}_1$, por lo cual $\mathcal{A}$ también lo será.

Además el intervalo $]-\infty, 0[$ está contenido en el conjunto resolvente de $\mathcal{A}$ por ello existe una potencia fraccionaria de orden $\frac{1}{2}$ del operador $\mathcal{A}$.

Entonces, por los resultados de KREIN (1967) (pág. 305), se tiene que el problema de Cauchy para la ecuación (54) tiene solución única para cualesquiera.

$$U_o \in D(\mathcal{A}), \; U_o^1 \in D(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$$

Pero notemos que

$$D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_1)$$

$$D(-\mathcal{A})^{\frac{1}{2}} = D(-\mathcal{A}_1)^{\frac{1}{2}}$$

y como

$$(-\mathcal{A}_1)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\rho}} A^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\rho}} A^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{g}\, C_o^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

y además

$$D(\mathcal{A}_1) = I_m(P) \times I_m(P) \times D(C_o) \subset \mathcal{W}_2^1(\partial\Sigma_o) \times \mathcal{W}_2^1(\Sigma) \times W_2^1(\partial\Sigma_o)$$

y

$$D(-\mathcal{A}_1)^{\frac{1}{2}} = \mathcal{W}_2^1(\Sigma) \times \mathcal{W}_2^1(\Sigma) \times W_2^1(\partial\Sigma_o)$$

En fin tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3. Bajo la suposición de que la profundidad l de la capa de líquido es suficientemente pequeña, el problema de Cauchy correspondiente al sistema (1)-(4) tiene solución única para cualquier familia de condiciones iniciales para las variables u, ξ, tales que:

$$u\big|_{t=o} = u_o = w_o + v_o$$

$$u_t\big|_{t=o} = u_1 = w_1 + v_1$$

donde w_o, $v_o \in I_m(P) = D(A)$ (es decir w_o, v_o son soluciones generalizadas del problema **I**, w_1, $v_1 \in \mathcal{W}_2^1(\Sigma)$ y además $\xi_o \in D(C_o), \xi_1 \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Sigma_o)$.

Referencias

[1] KUSTIUCHENKO, A.G. y ORAZOV, M.B. *Problem of oscilations of an ellastic half cilinder and related self adjoint quadratic pencils.* Translated from Trudi Seminara Petrovskovo. N6 pág. 97-146 (1981) 1986 Plenum trade publish co.

[2] KATO, T. (1972). *Perturbation Theory for linear operators.* Springer-Verlag.

[3] KREIN, S.G. (1967). *Ecuaciones diferenciales lineales en espacios de Banach.* (en ruso) Nauka.

[4] KREIN, S.G. y LAPTIEV, V.I. (1968): *Sobre el problema del movimiento de un líquido viscoso en una vasija abierta* (en ruso). Funksionalny Analys i ievo Prilochenia, 2(1): 40-50.

[5] LIONS, J. y MAGENES, E. (1971). *Problemas de contorno no homogeneos y sus aplicaciones* (en ruso) Mir. Moscú.