Generalización de los teoremas de alternativa de sistemas de inecuaciones lineales

J.A. MIRA LÓPEZ Y J. VALLS GONZÁLEZ*

Recibido: 24 de Marzo de 1.994

Presentado por el Académico Numerario D. Manuel Valdivia

Resumen

En este artículo generalizamos los teoremas de alternativa clásicos de sistemas con un número finito de inecuaciones lineales en $\mathbb{R}^n$, considerando sistemas de infinitas inecuaciones lineales donde los datos pertenecen a un espacio localmente convexo real y separado $\mathbb{X}$, y las incógnitas a su dual topológico $\mathbb{X}^*$ separando mediante contraejemplos adecuados los casos finito e infinito-dimensional, cuando se requieren hipótesis adicionales para la validez de los mismos.

Abstract

In this paper we generalize the classical theorems of alternative for systems with a finite number of linear inequalities in $\mathbb{R}^n$, considering systems of infinite inequalities, where the data belong to a separated real locally convex space $\mathbb{X}$, whereas the unknowns ranks in the topologycal dual of $\mathbb{X}, \mathbb{X}^*$, separating through adequate counter-examples the finite and infinite-dimensional cases, when additional hypothesis are required.

0. Introducción

Los teoremas de alternativa clásicos caracterizan la consistencia de sistemas de un número finito de inecuaciones lineales en el espacio euclideo ordinario $\mathbb{R}^n$. Estos teoremas son trascendentales en Programación Matemática y Teoría de Juegos (Mangasarian, 1969). Su extensión a sistemas de infinitas inecuaciones (Goberna, et. al., 1984), ha permitido desarrollar una teoría de juegos semi-infinitos, así como alcanzar nuevos resultados en Programación Semi-infinita. La extensión de los teoremas de alternativa a espacios lineales de

* Dpto. de Análisis Matemático y Matemática Aplicada. Universidad de Alicante.

cualquier dimensión, facilita nuevos avances en Programación Infinita y Teoría de Juegos Infinitos.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio localmente convexo real y separado. Designemos por $\mathbb{X}'$ su dual algebraico y por $\mathbb{X}^*$ su dual topológico.

A lo largo de este trabajo seguiremos la notación de Holmes (1975), en particular, dado un subconjunto $Z \neq \varnothing$, de un espacio localmente convexo real, $cl\,Z$, $co\,Z$ y cone Z, denotarán la clausura topológica de Z, la envoltura convexa de Z y la cuña (wedge) generada por Z (cone Z: = $[o,+\infty[\cdot co\,Z)$, respectivamente. Si $\lambda = (\lambda_j) \in \mathbb{R}^J$ definimos el soporte de λ de la siguiente forma: $\sup p\,\lambda = \{j \in J\colon\ \lambda_j \neq 0\}$

Se denotarán por $\mathbb{R}^{(J)} = \{\lambda \in \mathbb{R}^J\colon \mathrm{card}(\mathrm{Supp}\,\lambda) < \infty\}$, la suma directa de $\mathrm{card}(\mathbb{J})$ copias de $\mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{J} \neq \varnothing$ un conjunto arbitrario de índices. Dados los conjuntos $\{x_j : j \in \mathbb{J}\} \subset \mathbb{X}\, y \{c_j : j \in \mathbb{J}\} \subset \mathbb{R}$, consideremos el sistema de desigualdades lineales:

$$\sigma := \{\langle x_j, \varphi\rangle \geq c_j,\ \ j \in \mathbb{J}\} \text{ con } \varphi \in \mathbb{X}^*$$

Definición 0.1

Si existe $\varphi \in \mathbb{X}^*$, satisfaciendo σ , diremos que σ es *consistente*.

Definición 0.2

Si el sistema σ es consistente, y si todas sus soluciones φ satisfacen la desigualdad lineal $\langle x, \varphi\rangle \geq c$, para un par dado $(x,c) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}$, diremos que aquella es *dependiente* del sistema σ , o que el par $(x,c,) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}$ es una *relación consecuente* del sistema σ .

Definición 0.3

Consideremos la cuña en $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$, generada por los vectores:

$$\{(x_j, c_j) : j \in \mathbb{J}\} \cup \{(0,-1)\}$$

es decir el conjunto:

$$[0,+\infty[\cdot co\left(\{x_j, c_j) : j \in \mathbb{J}\} \cup \{(0,-1)\}\right)$$

Su clausura:

$$P := cl\left[[0,+\infty[\cdot co\left(\left\{(x_j,c_j): j \in J\right\} \cup \{(0,-1)\}\right)\right]$$

es llamada *la cuña de referencia del sistema* (Zhu, Y.J., 1966)

Definimos también las cuñas asociadas a σ:

$$M := cone\left\{(x_j,c_j), j \in \mathbb{J}\right\},$$
$$N := cone\left\{x_j, j \in \mathbb{J}\right\}$$
$$K := cone\left[\left\{(x_j,c_j),\ j \in \mathbb{J}\right\} \cup \{(0,-1)\}\right]$$

1. Generalización de los teoremas de alternativa

Lema 1.1

i) $(0,1) \in M$ si, y sólo si, $(0,1) \in K$
ii) $(0,1) \in cl\,M$ si, y sólo si, $(0,1) \in P = cl\,K$

Prueba:

i) Es suficiente probar que $(0,1) \in K$ implica que $(0,1) \in M$. En efecto, si $(0,1) \in K$ existirá $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(J)}$ *y* $\gamma \geq 0$ tales que

$$(0,1) = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j, c_j) + \gamma(0,-1)\text{, por lo que } (0,1) \in M$$

ii) Puesto $cl\,M \subset cl\,K$, probaremos la inclusión contraria.

Si $(0,1) \in cl\,K$ y U es un $(0,0)$- entorno equilibrado en $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$ tenemos que $[(0,1)+U] \cap K \neq \varnothing$, por lo que existen $\lambda \in [0,1], \mu > 0$ $(x,c) \in co\left\{(x_j,c_j): j \in J\right\}$, tales que

$$\mu[(1-\lambda)(x,c) + \lambda(0,-\mu)] \in (0,1) + U$$

por lo que $\mu(1-\lambda)(x,c) \in (0, 1+\lambda\mu) + U$, y de aquí que:

$$\frac{\mu(1-\lambda)}{1+\lambda\mu}(x,c)\in(0,1)+\frac{1}{1+\lambda\mu}U\subset(0,1)+U$$

Por tanto, $(0,1)\in cl\ M$. ■

Teorema 1.1: Teorema Generalizado de Farkas [1]

El sistema $\sigma_1:=\{\langle x_j,\varphi\rangle\geq c_j,\ j\in J,\ \langle x,\varphi\rangle<c\}$ es consistente si, y sólo si, $(x,c)\notin P$ y $(0,1)\notin cl\ M$.

Prueba:

Si σ_I es consistente entonces toda solución $\varphi\in\mathbb{X}^*$ cumple que $\langle x,\varphi\rangle < c$, luego el par (x,c) no es una relación consecuente del sistema σ, y por un Teorema de Zhu [7, th. 2] $(x,c)\notin cl\ K$. Dado que σ es consistente aplicando, nuevamente, un resultado de Zhu [7, th. 1] $(0,1)\notin cl\ K=P$ y por el Lema 1.1 ii) $(0.1)\notin cl M$.

Recíprocamente, si $(0,1)\notin cl\ M$ por Lema 1.1 ii) y los Teoremas de Zhu [7, th. 1, th. 2] el sistema σ es consistente y (x,c) no es una relación consecuente en ninguno de los sistemas, por tanto $\langle x,\varphi\rangle<c$, y entonces σ_I es consistente. ■

A partir del teorema anterior se deduce trivialmente:

Teorema 1.2: Teorema Generalizado de Gale [2]

El sistema $\sigma:=\{\langle x_j^*,\varphi\rangle\geq c_j, j\in \mathbb{J}\}$ es consistente si, y sólo si, $(0,1)\notin cl\ M$.

Teorema 1.3

Sea $C:=co\{x_j : j\in\mathbb{J}\}$, y supongamos rel-int $C\neq\varnothing$.
Entonces: El sistema $\sigma_0=\{\langle x_j,\varphi\rangle\geq 0\text{: } j\in\mathbb{J}\}$, tiene una solución $\varphi^o\in\mathbb{X}^*$ tal que $\langle x_{j_o},\varphi^o\rangle>0$ para algún $j_o\in\mathbb{J}$, si, y sólo si, $0\notin$ rel-int C.

La prueba del Teorema 1.3 requiere del concurso de los dos lemas siguientes, que se deducen del Teorema básico de Separación.

Lema 1.2

Sean A y B dos subconjuntos convexos de un subespacio afín $M \subset \mathbb{X}$. Entonces si rel-int$A \neq \varnothing$ y disjunto con B, existe un hiperplano cerrado H que separa A y B.

Lema 1.3

Sea $C \subset \mathbb{X}$, convexo, y supongamos que *rel-int* $C \neq \varnothing$.
Entonces: "$0 \notin$ *rel-int* C si, y sólo si, existe un hiperplano cerrado H que cumple:
(i) $C \setminus H \neq \varnothing$.
(ii) C está contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por H.

Prueba del Teorema 1.3:

Si $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$ cumple que $\langle x_j, \varphi^o \rangle \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{J}$ y $\langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle > 0$, consideramos el hiperplano $H = [\varphi^o; 0]$.
Entonces si $C = co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$, el hiperplano H cumple las condiciones (i) y (ii) del Lema 1.3 y por tanto $0 \notin$ *rel-int* C.

Recíprocamente, si $0 \notin$ *rel-int* C, por el lema 1.3, existe un hiperplano cerrado $H = [\varphi^o; 0]$ tal que $\langle x, \varphi^o \rangle \geq 0$ para todo $x \in C$ *y* $\langle x_o, \varphi^o \rangle > 0$ para un $x_o \in$ *int-rel* C. Pero $x_o = \sum_{i=1}^{p} t_i x_{j_i}$ siendo $t_i > 0$ y $\sum_{i=1}^{p} t_i = 1$. Por tanto $\langle x_o, \varphi^o \rangle = \sum_{i=1}^{p} t_i \langle x_{j_i}, \varphi^o \rangle > 0$, y de aquí que, para algún x_{j_i} se cumpla que $\langle x_{j_i}, \varphi^o \rangle > 0$. ■

Observación

El Teorema 1.3 es la generalización del Teorema de STIEMKE [6]. La importancia de la hipótesis rel-int $C \neq \varnothing$ se pone de manifiesto en el caso de dimensión infinita como prueban los siguientes ejemplos:

1.1

Sea $\mathbb{X}$ un espacio lineal real con una base de Hamel numerable $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$

Consideremos el conjunto M de los vectores $\chi = \sum_n \xi_n \alpha_n$ tales que para mayor índice n con $\xi_n \neq 0$, sea $\xi_n > 0$. Si $P := M \cup \{0\}$, P es un cono convexo tal que $P \cup -P = \mathbb{X}$.

Supondremos dotado a $\mathbb{X}$ de la topología localmente convexa más fina y ordenado con el orden inducido por P.

$$Int(P) = cor\ P = \varnothing \quad \text{y} \quad P^+ := \{\varphi \in \mathbb{X}^* : \langle P, \varphi \rangle \geq 0\} = \{0\}.$$

Si llamamos $A := \{x_j : j \in \mathbb{J}\}$, y tomamos en el teorema de Stiemke $A = P$, tenemos que $C = co(A) = P$ por lo que $0 \notin int(P)$, pues $int(P) = \varnothing$, y sin embargo no existe $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle x_j, \varphi \rangle \geq 0$ con $\langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle > 0$ para algún j_o , puesto que la única funcional positiva es la idénticamente nula.

En otros, sin embargo el Teorema es cierto. Así:

1.2

Sea $S = \{\chi \in l^1 : x_n \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$. Sabemos que S es un cono reproductor de l^1 con $cor\ S = \varnothing$ por tanto, $int\ (S) = \varnothing$. Si llamamos $A := \{x_j : j \in \mathbb{J}\} = S$ en el Teorema de Stiemke, tenemos que $C = co(A) = S$, luego $rel - int\ C = \varnothing$, y forzosamente $0 \notin rel - int\ C$.

Ahora bien, si definimos $\varphi : l^1 \to \mathbb{R}$ así: $\langle \chi, \varphi \rangle = x_1$ (primera coordenada de χ), se tiene que $\varphi \in (l^1)^*$ (puesto que φ está acotada sobre la bola unidad), $\langle \chi, \varphi \rangle \geq 0$ para todo $\chi \in A$, y $\langle e_i, \varphi \rangle = 1 > 0$, con
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, \ldots) \in A$.

Los ejemplos anteriores muestran que si $rel - int\ C = \varnothing$, las condiciones:

I.- $0 \in rel - int\ (A)$,

II.- el sistema $\sigma_o = \{\langle x_j, \varphi \rangle \geq 0, j \in \mathbb{J}\}$ tiene una solución $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$, tal que para algún $j_o \in \mathbb{J}$ es $\langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle > 0$,

pueden o no ser alternativas del Teorema de Stiemke, como analizamos a continuación:

Caso 1.- N es denso en $\mathbb{X}$,

Caso 2.- N no es denso en $\mathbb{X}$.

Si se cumple 1, entonces $\{\varphi \in \mathbb{X}^*:\langle A,\varphi\rangle \geq 0\}=\{0\}$ (véase [5, p. 97]), por lo que;

Caso 1.a) si $int\ co(A) = \varnothing$, la condición II no es alternativa de la condición I. (Ejemplo 1.1, anterior).

Caso 1.b) si $int\ co(A) \neq \varnothing$, entonces necesariamente $0 \in int\ co\ (A)$ y se cumple que II es alternativa de I.

Por tanto en el caso 1, la hipótesis $int - rel\ C \neq \varnothing$ es necesaria para que sea válido el Teorema.

Si se cumple 2, $cl\,N \underset{\neq}{\subset} \mathbb{X}$; entonces puede ocurrir:

Caso 2.a) N es reproductora, es decir $\mathbb{X} = N - N$,

Caso 2.b) N no es reproductora.

Si es cierto 2.a), puesto $\mathbb{X} \setminus cl\,N \neq \varnothing$, existe un x_o y un o-entorno abierto y convexo U, tal que $(x_o + U) \cap N = \varnothing$, luego por el Teorema de separación, existe un hiperplano $[\varphi;\alpha]$, $\varphi \neq 0$, tal que $\langle x_o + U,\varphi\rangle < \alpha \leq \langle N,\varphi\rangle$, por lo que $\alpha \leq 0$ y $\langle x_o ,\varphi\rangle < 0$.

Como $\mathbb{X} = N - N$, será $x_o = p_1 - p_2$, con $p_i \in N$, $i = 1,2$, luego $\langle p_i ,\varphi\rangle > 0$, para algún $p_i \in N$, y por tanto $\langle x_{j_o} ,\varphi\rangle > 0$ para algún $j_o \in \mathbb{J}$.

En este caso, aunque $int\ co(A) = \varnothing$, la proposición II es alternativa de la I. (Ejemplo 1.2, anterior).

Si es cierto 2.b), sea $\mathbb{X}_1 = cl\ (N - N)$. Entonces:

Caso $2.b_1$) N es denso en $\mathbb{X}_1$

Caso $2.b_2$) N no es denso en $\mathbb{X}_1$

El caso $2.b_1$) es el caso 1, relativizado a $\mathbb{X}_1$, por lo que la hipótesis *rel-int* $C \neq \varnothing$ es necesaria para la validez del Teorema de Stiemke.

Si es cierto $2.b_2$) existe $x_0 \in \mathbb{X}_1 \setminus cl\,N$, por lo que, podemos separar fuertemente x_o de N (véase [5, p. 64]), luego existe $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle x_o ,\varphi\rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle N,\varphi\rangle$, $\varepsilon > 0$, por tanto $\alpha < 0$.

Como $x_o \in \mathbb{X}_1 = cl(N - N)$, existe una red $q_\alpha = p_1^\alpha - p_2^\alpha$ en N-N tal que $x_o = \lim_\alpha (p_1^\alpha - p_2^\alpha)$, y ya que $\langle x_o ,\varphi\rangle < 0$, existe α_o tal que $\langle p_1^{\alpha_o} - p_2^{\alpha_o} ,\varphi\rangle < 0$ por lo que $\langle p,\varphi\rangle > 0$ para algún $p \in N$, y por tanto $\langle x_{j_0} ,\varphi\rangle > 0$ para algún $j_o \in \mathbb{J}$. En este caso $2.b_2$ las proposiciones I y II son alternativas, aunque $rel - int\ co(A) = \varnothing$.

Teorema 1.4

Sea $\mathbb{D} := co\{(x_j, c_j) : j \in \mathbb{J}\}$. Entonces:

El sistema $\sigma = \{\langle x_j, \varphi\rangle \geq c_j : j \in \mathbb{J}\}$ tiene una solución $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle > c_{j_o}$ para algún $j_o \in \mathbb{J}$, si, y sólo si, $(0,0) \notin rel-int\ \mathbb{D}$ y $(0,1) \notin P$.

Prueba:

Supongamos que $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$, sea una solución del sistema anterior y que $\langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle > c_{j_o}$. Por el Teorema 1.2 y la parte ii) del Lema 1.1, $(0,1) \notin P$. Consideremos en $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$ el sistema $\{\langle (x_j, c_j), \Phi \rangle \geq 0 : j \in \mathbb{J}\}$; es evidente que $\Phi^o := (\varphi^o, -1) \in (\mathbb{X} \times \mathbb{R})^*$, es una solución del sistema homogéneo anterior, y satisface:

$$\langle (x_{j_o}, c_{j_o}), \Phi^o \rangle = \langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle - c_{j_o} \geq 0$$

por lo que (Teorema 1.3) $(0,0) \notin rel-int\ \mathbb{D}$.

Recíprocamente, si suponemos que $(0,0) \notin rel-int\ \mathbb{D}$ y $(0,1) \notin P$, $K(\mathbb{D}) := [o, +\infty[.\ co\ \mathbb{D}$, no es denso en $\mathbb{X} \times \mathbb{R}$, ya que si $(0,1) \notin P$, existe $\overline{\varphi} \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle x_j, \overline{\varphi} \rangle \geq c_j$, $j \in \mathbb{J}$ (por el Teorema 1.2) y por tanto $\overline{\Phi} := (\overline{\varphi}, -1) \in (\mathbb{X} \times \mathbb{R})^*$ y cumple que $\langle K(\mathbb{D}), \overline{\Phi} \rangle \geq 0$ siendo $\overline{\Phi} \neq 0$; luego por el Teorema generalizado de Stiemke y la condición $(0,0) \notin rel-int\ \mathbb{D}$, existe $\Phi_o \in (\mathbb{X} \times \mathbb{R})^*$ siendo $\Phi_o = (\varphi, \alpha)$, tal que $\langle (x_j, c_j), \Phi_o \rangle \geq 0$, $j \in \mathbb{J}$ y $\langle (x_{j_o}, c_{j_o}), \Phi_o \rangle > 0$, para algún $j_o \in \mathbb{J}$, es decir, que $\langle x_{j_o}, \varphi \rangle + \alpha c_{j_o} > 0$.

Distinguiremos tres casos:

i) $\alpha = 0$. Entonces $\varphi^o = \overline{\varphi} + \varphi \in \mathbb{X}^*$ es la solución buscada.

ii) $\alpha > 0$. En este caso $\varphi^o = 2\overline{\varphi} + \alpha^{-1}\varphi$.

iii) Si $\alpha \langle 0, \varphi^o = |\alpha|^{-1} \varphi$, es la solución buscada. ■

Observación

El Teorema 1.4 es una generalización del teorema de MANGASARIAN [6], que también suele enunciarse como sigue:

"Sea $\mathbb{D} := co\left\{ \left(x_j, c_j\right) : j \in \mathbb{J} \right\}$. Entonces:

El sistema $\sigma = \left\{ \langle x_j, \varphi \rangle \geq c_j \in \mathbb{J} \right\}$ tiene una solución $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle x_{j_o}, \varphi^o \rangle > c_{j_o}$ para algún $j_o \in \mathbb{J}$, y sólo si,
$(0, \alpha) \notin rel - int\, \mathbb{D}$, $\forall \alpha \geq 0$ y $(0,1) \notin P$ ".

Teorema 1.5

Dadas las familias de vectores de $\mathbb{X}$, $\left\{x_j : j \in J\right\}$ $\left\{x_s : s \in S\right\}$ y $\left\{x_t : t \in T\right\}$, llamemos A, al conjunto convexo
$A := co\left\{x_j : j \in J\right\} + [0, +\infty[\cdot co\left\{ x_s : s \in S\right\} + L\left(\left\{x_t : t \in T\right\}\right)$ en donde L

significa la envoltura lineal. Entonces si A es cerrado:

el sistema $\begin{cases} \langle x_j, \varphi \rangle > 0, & j \in J, \quad j \neq \varnothing \\ \langle x_s, \varphi \rangle \geq 0, & s \in S \\ \langle x_t, \varphi \rangle = 0, & t \in T \end{cases}$ es consistente si, y

sólo si, $0 \notin A$.

Prueba:

Si $0 \in A$ y $\varphi^o \in \mathbb{X}^*$ es una solución del sistema, tendríamos que:

$$0 = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j + \sum_{s \in S} \mu_s x_s + \sum_{t \in T} \rho_t x_t, \quad \text{con} \quad \lambda = \left(\lambda_j\right) \in \mathbb{R}_+^{(J)}$$

$\mu = \left(\mu_s\right) \in \mathbb{R}_+^{(S)}$, $\rho = \left(\rho_t\right) \in \mathbb{R}^{(T)}$ y $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$. De donde

$$0 = \langle 0, \varphi^o \rangle = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle x_j, \varphi^o \rangle + \sum_{s \in S} \mu_s \langle x_s, \varphi^o \rangle + \sum_{t \in T} \rho_t \langle x_t, \varphi^o \rangle > 0.$$

Contradicción. Luego si el sistema es consistente entonces $0 \notin A$.

Recíprocamente, si $0 \notin A$, por ($\{0\}$ compacto y A cerrado) el Teorema de separación fuerte de Holmes [5, p. 64], existe $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tal que

$inf\{\langle x,\varphi\rangle : x\in A\} > 0$ y $\langle x_j,\varphi\rangle > 0$. Además, como $x_j + mx_s \in A$, para todo $j\in J$, $s\in S$, y todo $m>0$, tenemos que $\langle x_j + mx_s,\varphi\rangle > 0$, luego haciendo que m tienda a $+\infty$, se tiene $\langle x,\varphi\rangle \geq 0$ para cada $s\in S$. Finalmente, $x_j + nx_t \in A$ para $n\in\mathbb{R}$, luego $\langle x_j,\varphi\rangle + \langle nx_t,\varphi\rangle > 0$, de donde $\langle x_r,\varphi\rangle > -n^{-1}\langle x_j,\varphi\rangle$ para $n>0$ y $\langle x_t,\varphi\rangle < -n^{-1}\langle x_j,\varphi\rangle$ para $n<0$, para $n\to\infty$, $\langle x_t,\varphi\rangle = 0$ para cada $t\in T$; por tanto φ es una solución del sistema. ■

Observación

El Teorema 1.5 es una generalización del Teorema de MOZKIN [6]. En dicho Teorema no se puede eliminar la hipótesis A cerrado y sustituir la condición $0\notin A$ por $0 \notin cl\,A$ tal y como prueba el ejemplo siguiente:

1.3

Sean las familias de vectores de $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{X}^*$ siguientes:

$$\{x_j = (j, j^{-1}), j\in J :=]\,0,+\infty\,[\}$$
$$\{x_s = (0,0), s\in S, \text{cualquiera}\}$$
$$\{x_t = (t,0), t\in T := [-1,1]\}$$

Es evidente que $(0,0)\in cl A$, $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y > 0\}$ no es cerrado. Sin embargo, la funcional φ^o definida por $(0,1)$ es solución del sistema considerado.

Corolario 1.5.1

Consideremos los subconjuntos Y, Z de $\mathbb{X}$ tales que $Z\neq\varnothing$ y $co(Z) + [0,+\infty[\,.co(Y)$ sea cerrado.

Las afirmaciones siguientes son equivalentes

1.- El sistema $\begin{Bmatrix} \langle z,\varphi\rangle > 0, z\in Z \\ \langle y,\varphi\rangle \geq 0, y\in Y \end{Bmatrix}$ es consistente.

2.- $0\notin co(Z) + [0,+\infty[\,.co(Y)$.

Prueba:

Aplíquese el Teorema anterior a $Z:=\{x_j : j \in J\}$ $Y:=\{x_s : s \in S\}$, y $\{x_t : t \in T\}:=\{0\}$. ∎

Corolario 1.5.2

Sea $Z \neq \varnothing$, tal que $co(Z)$ es cerrado. Las proposiciones siguientes son equivalentes

1.- El sistema $\langle z, \varphi \rangle > 0,\ z \in Z,$ es consistente.

2.- $0 \notin co(Z)$.

Prueba:

Tómese $Y = \{0\}$ en Corolario 1.5.1. ∎

Observación

(i) La condición $co(Z)$ cerrado se cumple en particular si Z es compacto y convexo, por lo que si $[0,+\infty[.co(Y)$ es cerrado, la suma $co(Z)+K(Y)$ es también cerrada, y son válidos los Corolarios 1.5.1 y 1.5.2.

ii) Si $dim\, X < +\infty$, basta suponer que Z es compacto en el Corolario 1.5.2, y que $[0,+\infty[.co(Y)$ sea cerrado para la validez del Corolario 1.5.1. En cambio si $dim\ \mathbb{X} = \infty$ esto ya no es así, como se aprecia en el siguiente ejemplo:

1.4.

En l^2, sea $A:=\{\chi^{(n)} = n^{-1}.\, e_n, n = 1,2,\ldots\}$, donde e_n son las unidades. Sea $M:=\beta+(A\cup\{0\})$ el traslado del compacto, $A\cup\{0\}$, mediante el vector fijo β. Se comprueba facilmente que $co(A\cup\{0\})$ no es cerrado en l^2, y por tanto tampoco lo es $co(M) = \beta + co\,(A\cup\{0\})$.

Lema 1.4

Sea $Z \neq \varnothing$, $Z \subset \mathbb{X}$ tal que $0 \notin Z$. Entonces cone Z es un cono si, y sólo si, $0 \notin co(Z)$.

Prueba:

Si $0 \in co(Z)$, $0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i$, $z_i \in Z$, $\alpha_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,p$ $\sum_{1}^{p} \alpha_i = 1$.

Puesto que $0 \notin Z$ será $p \geq 2$. Entonces $\alpha_1 z_1 = \sum_{i=2}^{p} \alpha_i (-z_i) \neq 0$ y $\alpha_1 z_1 \in cone\, Z \cap (-cone\, Z)$, luego *cone* Z no es un cono (Holmes, p. 17).

Recíprocamente si *cone* Z no es un cono, existe $c \neq 0$ tal que $c \in cone\ Z \cap (-cone\, Z)$, por lo que tenemos $c = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j x_j$, $z_i \in Z$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,p$; $x_j \in Z$, $\beta_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,r$, y al mismo tiempo $c = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i (-z_i) + \sum_{k=1}^{q} \delta_k (-y_k)$, $\gamma_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,p$, $y_k \in Z$, $\delta_k \geq 0, k = 1,\ldots,q$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^{p} (\alpha_i + \gamma_i) z_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j x_j + \sum_{k=1}^{q} \delta_k y_k = 0$$

siendo la suma de coeficientes positiva puesto que $c \neq 0$. Pero esto implica que $0 \in co(Z)$. ■

Definición 1.1.

Diremos que $Z \subset \mathbb{X}$, *está estrictamente separado de cero,* si existe $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle z, \varphi \rangle > 0$ para todo $z \in Z$.

Lema 1.5

Para cualquier subconjunto no vacío $Z \subset \mathbb{X}$, tal que $0 \notin Z$ tenemos:

I.- Si Z está estrictamente separado de cero, entonces *cone* Z es un cono.
II.- Si $co(Z)$ es cerrado (en particular si Z es compacto y convexo) y *cone* Z es un cono, entonces Z está estrictamente separado de cero.

Prueba:

(I). Si *cone* Z no es un cono, entonces por el Lema 1.4, $0 \in co(Z)$, luego existen vectores $z_i \in Z$, $i = 1,\ldots, m$ y escalares positivos λ_i,

$i=1,\dots,m$ tales que $0=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i z_i$. Si $\varphi\in\mathbb{X}^*$ separa estrictamente a *0* y *Z*, obtenemos una contradicción puesto que $0=\varphi(0)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi(z_i)>0$. Por tanto, *cone Z* es un cono.

(II). De nuevo por el Lema 1.4, $0\notin co(Z)$ y por el Corolario 1.5.2, se obtiene el resultado. ■

Lema 1.6

Sea Q una cuña en $\mathbb{X}$. Se tiene:

I.- Si $Q\setminus\{0\}$ está estrictamente separado de 0, entonces Q es un cono.
II.- Si $Q\neq\{0\}$ es un cono localmente compacto, entonces $Q\setminus\{0\}$ está estrictamente separado del cero.

Prueba:

(I) Si $Q\setminus\{0\}$ está estrictamente separado de cero, existe $\varphi\in\mathbb{X}^*:\langle\varphi,q\rangle>0,\ \forall q\in Q\setminus\{0\}$. Entonces $Q\cap(-Q)=\{0\}$, y Q es un cono.

(II) Por un lema de Holmes [5,L. 15.A], Q tiene una base Z compacta y convexa, siendo

$$Z=\{z\in Q:\varphi(z)=1,\ \text{para cierta}\ \varphi\in\mathbb{X}^*\},$$

Dicha φ separa estrictamente $Q\setminus\{0\}$ *y* $\{0\}$. ■

Teorema 1.6

Si $co\{x_j:j\in\mathbb{J}\}$ es cerrada o $N:=cone\{x_j:j\in\mathbb{J}\}$ es localmente compacta, se tiene que:
El sistema $\{\langle x_j,\varphi\rangle>0:j\in\mathbb{J}\}$ es consistente si, y sólo si, $0\notin co\{x_j:j\in\mathbb{J}\}$.

Prueba:

Podemos suponer que $x_j\neq 0$ para todo $j\in\mathbb{J}$, ya que de otro modo el resultado es trivial.

Nos limitaremos a probar el Teorema en el caso en que N sea una cuña localmente compacta, ya que si suponemos $co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$ cerrada el Teorema se reduce al Corolario 1.5.2.

Supongamos que $0 \notin co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$. Entonces pòr el Lema 1.4, N es un cono localmente compacto y por la parte II del Lema 1.6, existe $\varphi \in \mathbb{X}^*$ tal que $\langle z, \varphi \rangle > 0$ para todo $z \in N \setminus \{0\}$, luego en particular $\langle x_j, \varphi \rangle > 0$ para todo $j \in \mathbb{J}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que el sistema $\{ \langle x_j, \varphi \rangle > 0 : j \in \mathbb{J}\}$ es consistente, y sea φ una solución; entonces si $z \in N \setminus \{0\}$ es $\langle z, \varphi \rangle > 0$, por lo que $N \setminus \{0\}$ está separado estrictamente de cero. Ahora por la parte I del Lema 1.6 N es un cono, y por el Lema 1.4, $0 \notin co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$. ■

Observación

El Teorema 1.6 es una generalización del Teorema de GORDAN [4].

(i) Las hipótesis del Teorema 1.6 son independientes como prueban los ejemplos siguientes:

1.5

Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$, $x_j = (j, j^{-1})$, $\mathbb{J} =]0, +\infty[$. Entonces $co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$ es cerrada, pero N no es localmente compacta.

1.6

Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$,

$$\{x_j : j \in \mathbb{J}\} := \{(j, j^{-1}), j \in]0, +\infty[\} \cup$$
$$\cup \{(j, -j^{-1}), j \in]-\infty, 0[\} \cup \{(j, 0), j \in [-1, 1]\}$$

En este ejemplo $co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$ es el semiplano superior cerrado excepto las semirrectas $]-\infty, 1[$ y $]1, +\infty[$ por lo que no es cerrado, mientras que N es el semiplano superior cerrado, que es localmente compacto.

(ii) Las hipótesis del Teorema 1.6 son esenciales para su validez, como prueba el ejemplo que sigue:

1.7

Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ y $x_j = (\cos j, \operatorname{sen} j)$, $j \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Se tiene que $co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$ no es cerrada y N no es localmente compacto. Es claro que el sistema $\{\langle x_j, \varphi\rangle > 0 : j \in \mathbb{J}\}$ es inconsistente y sin embargo $0 \notin co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$.

(iii) Se podría pensar eliminar alguna hipótesis y sustituir la condición $0 \notin co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$, por la más fuerte $0 \notin cl\ co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$, pero de nuevo el Teorema correspondiente es falso, como prueban los ejemplos siguientes:

1.8

Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $x_j = j$, $j \in]0,1[$. Entonces, $co\ \{x_j : j \in \mathbb{J}\} =]0,1]$ y $N = [0, +\infty[$. Es claro que el sistema $\{\langle x_j, \varphi\rangle > 0 : j \in \mathbb{J}\}$, tiene solución y sin embargo $0 \in cl\ co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$.

1.9

Sea $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$ y

$$\{x_j : j \in \mathbb{J}\} := \left\{(\cos j, 1 + \operatorname{sen} j) : j \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right\}.$$

Aquí de nuevo el sistema tiene solución y $0 \in cl\ co\{x_j : j \in \mathbb{J}\}$, siendo $N = \{x = (x_1, x_2) : x_1 \geq x_2 > 0\}$ que no es localmente compacto.

Referencias

[1] FARKAS, J. (1902), "Theorie der einfachen Ungleichungen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik 124*, 1-27.

[2] GALE, D. (1960), *The Theory of Linear Economic Models*, McGraw-Hill, New York.

[3] GOBERNA, M.A., LÓPEZ, M.A., PASTOR, J. y VERCHER, E., (1984), "Alternative theorems for infinite systems with applications to semi-infinite games", *Niew Archief Voor Wiskunde 4*, 218-234.

[4] GORDAN, P., (1873), "Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit reellen Coefficienten, *Mathematische Annalem 6,* 23-28.

[5] HOLMES, R.B., (1975), *Geometric Funtional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[6] MANGASARIAN, O.L., (1969), *Nonlinear Programming*, Mc Graw Hill, New York.

[7] ZHU, Y.J., (1966) "Generalizations of some fundamental theorems on linear inequalities", *Acta Matematica Sinica*, vol. 16, núm. 1, 25-36.