Sobre automorfismos anticonformes y libres de superficies de Riemann

POR ANTONIO F. COSTA*

Presentada en la Sesión Científica
del día 3 de marzo de 1.993

Abstract

Let X be a compact Riemann surface. Two automorphisms f_1 and f_2 of X are topologically equivalent if there is an orientation preserving homeomorphism $h: X \to X$ such that $h f_1 h^{-1} = f_2$. In 1937 J. Nielsen gives the topological classification of the finite order conformal automorphisms of Riemann surfaces. We say that a finite order automorphism f of X is free if the projection $p: X \to X / f$ is a local homeomorphism. As a consequence of the Nielsen's classification we have that if two free conformal automorphisms of a Riemann surface have the same finite order then they are topologically equivalent. In this paper we obtain examples of Riemann surfaces admitting two free anticonformal automorphisms having the same finite order but not topologically equivalent. The above fact is a motivation for the topological classification of anticonformal automorphisms obtained in [BC] and [C]. Such classification is given at the end of this paper for the particular case of free finite order anticonformal automorphisms.

Introducción

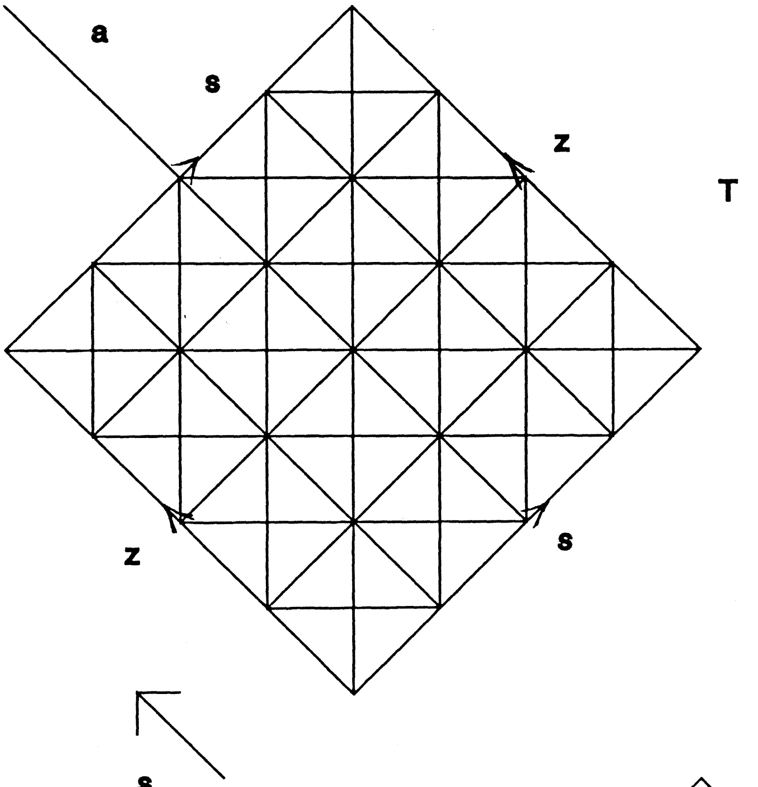
Sea X una superficie de Riemann compacta y f un automorfismo conforme o anticonforme de X de orden finito (es bien conocido que esta última condición no es necesaria si el género de X es mayor que 1). Se dice que f es un automorfismo libre si la proyección natural $p: X \to X / f$ es un homeomorfismo local. Dados dos automorfismos f_1 y f_2 de X se dice que son topologicamente equivalentes si existe un homeomorfismo que conserva la orientación $h: X \to X$ de modo que $h f_1 h^{-1} = f_2$. La clasificación por equivalencia topológica de los automorfismos conformes de orden finito fue

* Universidad Nacional de Educación a Distancia.

establecida por J. Nielsen en 1937 ([N]). Como consecuencia de tal clasificación se tiene que si f_1 y f_2 son dos automorfismos conformes libres con el mismo orden finito entonces son equivalentes topologicamente. En este artículo ofrecemos familias de pares de automorfismos anticonformes y libres con el mismo orden pero no topologicamente equivalentes. La aparición de los ejemplos anteriores así como la importancia de los automorfismos anticonformes (ver por ejemplo [Si]) motivan la clasificación topológica de tales automorfismos. La clasificación topológica de los automorfismos anticonformes (incluidos aquellos no libres) de orden finito se ha realizado en [BC] y [C]; en el final de este trabajo se enuncia tal clasificación para el caso particular de los automorfismos anticonformes libres.

Ejemplos

Considérese el toro T de la figura 1 compuesto por triángulos euclídeos con ángulos $\pi/2$, $\pi/4$ y $\pi/4$. Tal toro admite un automorfismo anticonforme libre f_1 de orden cuatro representado en la figura 1 por la reflexión sesgada cuyo eje es la recta a y con deslizamiento el vector **s**. El mismo toro T de la figura 1 se puede representar por la figura 2 y así se observa que T admite otro automorfismo anticonforme y libre f_2 de orden cuatro dado por la reflexión sesgada cuyo eje es la recta b y con vector deslizamiento **t**. Obsérvese que tales automorfismos no son conformalmente equivalentes pues las reflexiones sesgadas que originan en el plano euclídeo tienen módulos de deslizamiento diferentes. Además tampoco son topologicamente equivalentes. En efecto: en primer lugar T/f_1 y T/f_2 son las botellas de Klein de las figuras 1 y 2. Una curva que "produce la orientación" (según Seifert [Se]) es una curva cerrada y simple en una superficie no orientable de modo que al cortar dicha superficie a lo largo de tal curva se obtiene una superficie orientable con una o dos componentes conexas en el borde. En las figuras 1 y 2 aparecen en lineas de puntos curvas que producen la orientación l_1 y l_2 para T/f_1 y T/f_2 respectivamente. La clase de homología de una curva que produce la orientación de una superficie no orientable es única salvo orientación, por tanto el número de componentes conexas de la elevación a T de l_1 y l_2 es un invariante topológico para f_1 y f_2. Se observa en las figuras 1 y 2 que l_1 se eleva a cuatro componentes conexas mientras que l_2 se eleva a dos componentes, así queda probado que f_1 y f_2 no son topologicamente equivalentes.



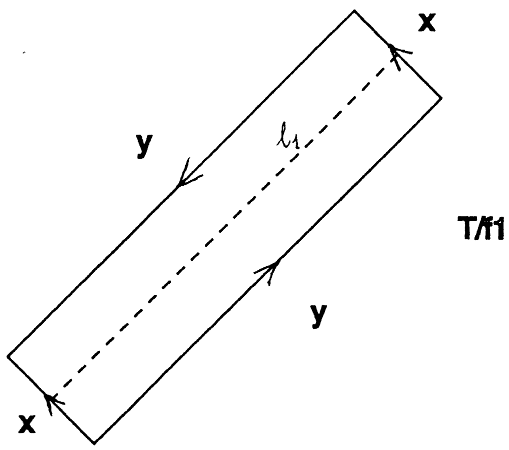


Figura 1

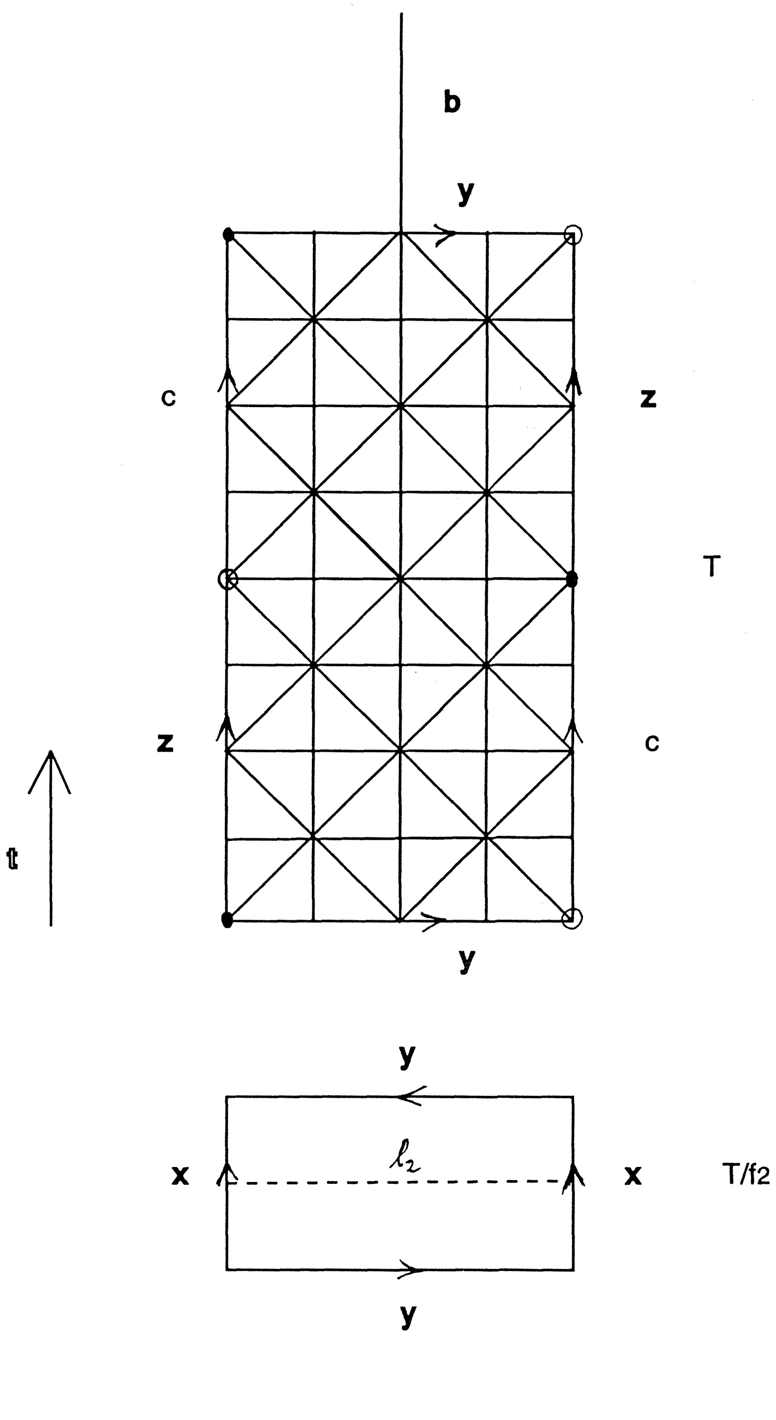


Figura 2

Para obtener una familia de ejemplos más amplia basta interpretar con grupos cristalográficos el ejemplo anterior. Para ello tomemos G el grupo cristalográfico euclídeo generado por las reflexiones c_0, c_1 y c_2 en los lados de uno de los triángulos euclídeos que componen el toro T. Tal grupo tiene presentación: $(c_0, c_1, c_2 : c_0^2 = c_1^2 = c_2^2 = (c_0\,c_1)^2 = (c_1\,c_2)^4 = (c_2\,c_0)^4 = 1)$. Así el grupo que uniformiza el toro T es un subgrupo G_T de G y existen G_1 y G_2 subgrupos de G de modo que G_1 y G_2 son los grupos de uniformización de las superficies de Klein T/f_1 y T/f_2. Por tanto G_1/G_T y G_2/G_T son grupos cíclicos de orden 4.

Tomemos ahora un grupo cristalográfico hiperbólico G' con signatura ([M]):

$$\left(g;+;[-];\{(2,4,4),\overset{l}{\ldots},(2,4,4)\}\right),\ l>0 \text{ y } g+l>2$$

Podemos establecer un epimorfismo $w: G' \to G$ de modo que los generadores canónicos que no son reflexiones se envian por w al elemento trivial y las reflexiones del modo único para que w sea homomorfismo. Entonces $H = w^{-1}(G_T)$ uniformiza una superficie de Riemann hiperbólica $X = \mathbb{H}^2/H$ que admite dos autonmorfismos anticonformes y libres de orden cuatro inducidos por las cubiertas cíclicas de cuatro hojas:
$p_1 : X \to \mathbb{H}^2/w^{-1}(G_1)$ y $p_2 : X \to \mathbb{H}^2/w^{-1}(G_2)$. Por último se puede probar que tales automorfismos no son topologicamente conjugados utilizando el mismo argumento que para los automorfismos f_1 y f_2 de T.

Otro ejemplo donde aparecen automorfismos anticonformes y libres que no son topologicamente equivalentes pero en situación geométrica distinta a la anterior es el siguiente. Sea R el toro de la figura 3 compuesto por 10 cuadrados. Sea g_1 el automorfismo anticonforme y libre dado por la reflexión sesgada de eje c y vector de deslizamiento **u** y sea $g_2 = g_1^3$. Por la diferencia del módulo de deslizamiento de las reflexiones sesgadas que definen g_1 y g_2 tales automorfismos no son conformalmente equivalentes.Tampoco son topologicamente equivalentes. Los cocientes R/g_1 y R/g_2 coinciden en este caso y son la botella de Klein de la figura 3. En tal botella de Klein existen unicamente dos curvas simples y cerradas d y d' que cortan en un único punto a la curva que define la orientación. La acción de g_1 sobre la elevación de d o d' es topologicamente equivalente a una rotación de ángulo $\pi / 5$ sobre una circunferencia mientras que la acción de g_2 es equivalente a una rotación de ángulo $3\pi / 5$, por lo que los dos automorfismos no son topologicamente equivalentes.

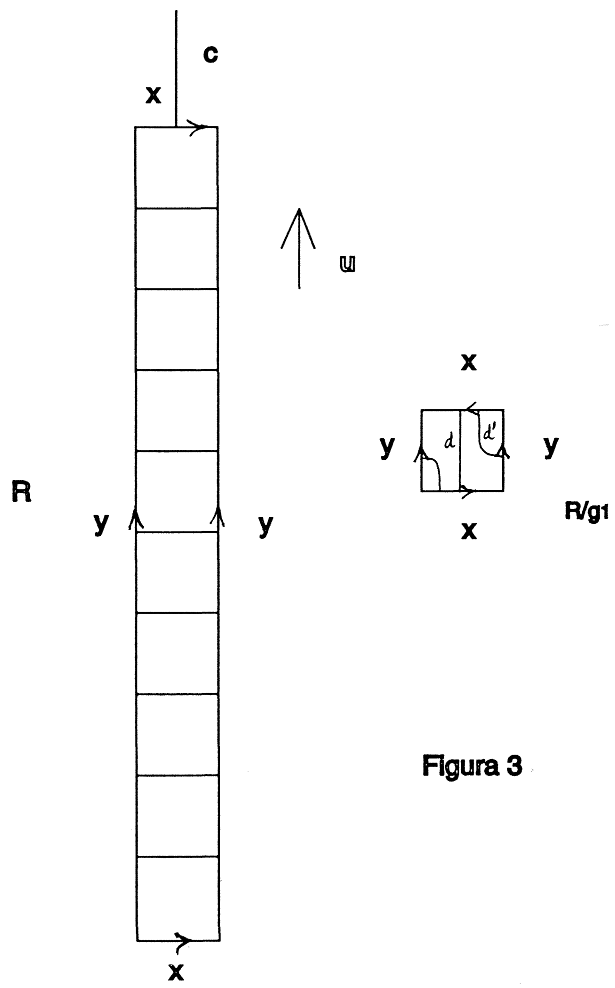


Figura 3

En este caso el grupo K que uniformiza $R/g_1 = R/g_2$ tiene signatura $(2;-;[-];\{-\})$ y se pueden construir epimorfismos $v: L \to K$, donde L es un grupo cristalografico hiperbólico con signatura $\left(2;-;[-];\left\{(-),\overset{r}{\ldots},(-)\right\}\right)$, de modo que todas las reflexiones tienen como imagen por v el elemento neutro de K. Si K_R es el subgrupo de K que uniformiza R, $v^{-1}(K_R)$, nos da una superficie de Klein donde existen dos automorfismos anticonformes y libres de orden 10 que no son topologicamente equivalentes.

Clasificación de los automorfismos anticonformes y libres.

Sea X una superficie de Riemann compacta y f un automorfismo anticonforme y libre de X de orden $2q$. La acción de f sobre X induce una cubierta cíclica no ramificada $p: X \to X/f$ donde X/f es una superficie de Klein no orientable cuyo tipo topológico está completamente determinado por el orden de f. La cubierta p está determinada por la representación de monodromía $m: H_1(X/f) \to \mathbf{Z}_{2q}$

Sea l un elemento de orden dos en $H_1(X/f)$, llamaremos $h_1(f)$ a $m(l)$. Supongamos que X/f tiene género 2 y sea d un elemento de $H_1(X/f)$ de modo que l y d generan $H_1(X/f)$. Llamaremos $h_2(f)$ a $\{\pm m(d), \pm m(d) + h_1(f)\}$.

Sean ahora f_1 y f_2 dos automorfismos anticonformes y libres de X de orden $2q, q > 1$. Si q es par llamaremos $f_i/4$ al automorfismo anticonforme de orden 4 definido por f_i sobre $X/f_i^4, i = 1,2$. Como caso particular de los resultados de [C] se tiene:

Teorema. *Los automorfismos f_1 y f_2 son topologicamente equivalentes si y solo si:*

(i) *Si q es par, $h_1(f_1/4) = h_1(f_2/4)$.*

(ii) *Si el género de X/f_1 es 2 (igual al género de X/f_2), $h_2(f_1) = h_2(f_2)$.*

Obsérvese que si q es impar y el género de X/f_1 no es 2 los automorfismos libres y anticonformes f_1 y f_2 son automaticamente equivalentes.

Referencias

[BC] BUJALANCE, E. and COSTA, A.F., *Orientation reversing automorphisms of Riemann surfaces*, Prepint 1992.

[C] COSTA, A.F., *Classification of periodic orientation reversing homeomorphisms of surfaces*, Prepint 1993.

[M] MACBEATH, A.M., *The classification of non-euclidean crystallographic groups*, Can. J. Math. **19** (1967) 1192-1205.

[N] NIELSEN, J., *Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen*, Danske Vid Selsk. Mat-Fys. Medd. **1** (1937) 1-77.

[Se] SEIFERT, H., *Topologie dreidimensionales gefaserter Raum*, Acta Mathematica **60** (1993) 147-288.

[Si] SINGERMAN, D., *Symmetries and pseudo-symmetries of hyperelliptic surfaces*, Glasgow Math. J. **33** (1980) 39-49.