Un modelo de Leontief en retículos de Banach

POR A. BALBÁS*, F.J. FERNÁNDEZ**
y P. JIMÉNEZ GUERRA**

Presentada en la Sesión Científica
del día 2 de diciembre de 1.992

Abstract

The object of this paper is to prove the existence of solutions for a Leontief's model in Banach lattices, and to give some extensions of the classical Leontief's theorem in mathematical economic.

Introducción

El modelo de Leontief es uno de los más utilizados y conocidos en economía matemática. Básicamente, se trata de estudiar bajo qué condiciones la ecuación $x = Ax + c$ tiene una solución x que sea un vector no negativo de $\mathbb{R}^n$, siendo A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos son mayores o iguales a cero, y siendo c un vector no negativo de $\mathbb{R}^n$. Económicamente, x es el vector de producción de un sistema económico, c es la demanda externa, y Ax es la demanda interna, siendo $x = Ax + c$ la ecuación de equilibrio. Análogamente, se puede considerar la llamada ecuación dual de Leontief, que representa una condición de equilibrio en los precios, y cuya propiedad más importante es que tiene solución si y sólo si la tiene la ecuación inicial.

Varias han sido las generalizaciones del modelo clásico de Leontief. Entre ellas, cabe destacar aquellas que cambian la expresión Ax por una no lineal (justificada porque en la economía hay muchas relaciones no lineales, véase [2]), y aquellas que extienden las propiedades del modelo a espacios en dimensión infinita. Interesantes aportaciones en esta última línea se pueden encontrar en [4] y [5] donde se prueban resultados sobre la existencia de soluciones de la ecuación de Leontief, a la vez que se debilita la hipótesis de

* Dpto. de Economía. Universidad Carlos III, Getafe. Madrid.
** Dpto. de Matemáticas Fundamentales. Facultad de Ciencias, UNED. Madrid.

linealidad, y se dan varias justificaciones de la extensión del problema a espacios de dimensión infinita.

El propósito de este trabajo es el estudio del modelo en retículos de Banach, y así, tras introducir los conceptos y resultados más generales en la primera sección, pasamos a probar la existencia de soluciones en el teorema 6, a la vez que planteamos problemas aún abiertos en las observaciones 7. Finalmente, la propiedad de Leontief que se ha definido al comienzo del trabajo, se estudia en la última parte, destacando como resultado de especial interés el teorema 10.

I. Planteamientos generales

Consideraremos un retículo de Banach X (véase [8]), X_+ el cono convexo y cerrado de los elementos no negativos de X, y T un operador lineal continuo y no negativo (es decir, $T(x) \geq 0$ para cada $x \geq 0$) de X en sí mismo. Para cada $e \in X_+$, llamaremos problema de Leontief asociado a e, y le notaremos por (Pe), al siguiente

$$x = T(x) + e \quad , \quad x \in X_+$$

Sea X' el espacio dual de X, y sean X'_+ el cono dual de X_+ y T' el operador adjunto de T. Se demuestra sin dificultad que T' es un operador no negativo de X' en sí mismo, y para cada $e' \in X'_+$ llamaremos problema de Leontief dual, y lo notaremos por $(Pe')'$, al siguiente

$$x' + T'(x') = e' \quad , \quad x' \in X'_+$$

Notaremos por I a la aplicación identidad de X sobre X y de X' sobre X' indistintamente.

1. Definición

Sea $e \in X_+$. Diremos que $x \in X_+$ es una subsolución de (Pe) si

$$x \geq T(x) + e$$

y que es una solución si

$$x = T(x) + e$$

Sea $e' \in X'_+$. Diremos que $x' \in X'_+$ es una solución de $(Pe')'$ si

$$x' = T'(x') + e'$$

Diremos que el par (X,T) verifica la propiedad de la subsolución, si para cada $e \in X_+$ tal que (Pe) admite una subsolución x_1, (Pe) admite una solución x_2 tal que $\|x_2\| \leq \|x_1\|$.

Diremos que (X,T) verifica la propiedad débil de Leontief, si para cada $e \in X_+, (Pe)$ tiene solución, y que (X,T) verifica la propiedad de Leontief si la aplicación lineal $I-T$ de X en X es un isomorfismo topológico con inverso no negativo, es decir, tal que

$$(I-T)^{-1}(x) \in X_+ \text{ para cada } x \in X_+$$

2. Proposición (X,T) verifica la propiedad de Leontief si y sólo si (Pe) tiene una única solución para cada $e \in X_+$.

Demostración. Si (Pe) tiene solución única para cada $e \in X_+$, $I-T$ es suprayectiva, ya que en este caso X_+ está contenido en la imagen de $I-T$, y al ser X un retículo de Banach todo elemento de X es diferencia de otros dos de X_+.

Para ver que $I-T$ es inyectiva consideremos $x \in X$ tal que $x = T(x)$ y probemos que $x = 0$. En efecto, consideremos como es usual en un retículo de Banach

$$|x| = Sup\{x,-x\}, \quad x_+ = \frac{|x|+x}{2}, \quad x_- = \frac{|x|-x}{2}$$

Entonces, por ser T no negativa (y por consiguiente creciente)

$$T(|x|) \geq T(x) = x, \quad T(|x|) \geq T(-x) = -x$$

de donde

$$T(|x|) \geq |x|$$

Por ser $|x| = x_+ + x_-$ se verifica

$$T(x_+) + T(x_-) \geq x_+ + x_- \tag{1}$$

y de $x = x_+ - x_-$ y $T(x) = x$ se deduce que

$$T(x_+) - T(x_-) = x_+ - x_- \tag{2}$$

Sumando y restando las últimas expresiones se tiene que

$$T(x_+) \geq x_+ \ , \quad T(x_-) \geq x_- \tag{3}$$

Por consiguiente

$$h = T(x_+) - x_+ = T(x_-) - x_- \in X_+$$

y por hipótesis, existe $x_h \in X_+$ solución de (Ph). Entonces,

$$T(x_+) - x_+ = T(x_-) - x_- = x_h - T(x_h)$$

de donde

$$x_h + x_+ = T(x_h + x_+) \ \text{ y } \ x_h + x_- = T\left(x_h + x_-\right)$$

Pero el problema $(P0)$ tiene sólo una solución, de donde $x_+ = x_-$ y por consiguiente, $x = x_+ - x_- = 0$.

Del teorema de la aplicación abierta se deduce que $I - T$ es un isomorfismo topológico, y que $I - T$ tiene inverso no negativo es consecuencia inmediata de que para cada $e \in X_+$, la única solución posible de (Pe) es

$$(I - T)^{-1}(e)$$

3. Proposición. Si (X,T) verifica la propiedad de Leontief, entonces $I - T'$ es un isomorfismo topológico sobre X' con inverso no negativo. En particular, $(Pe')'$ tiene solución única para cada $e' \in X_+^{'}$, y si dados $e \in X_+$ y $e' \in X_+^{'}$, x y x' son las soluciones de (Pe) y $(Pe')'$ respectivamente, entonces $e'(x) = x'(e)$.

Demostración. En efecto, $I - T'$ es inyectiva ya que si $x' - x' \circ T = 0$, entonces $x'(x - T(x)) = 0$ para cada x de X. Puesto que $I - T$ es sobre, x-$T(x)$ recorre todo X cuando lo hace x, y por consiguiente $x' = 0$. $I - T'$ es sobre ya que si e' está en X' basta tomar $x' = e' \circ (I - T)^{-1}$ para obtener

$$x' - x' \circ T = e' \circ (I - T)^{-1} - e' \circ (I - T)^{-1} \circ T = e' \circ (I - T)^{-1} \circ (I - T) = e'$$

Además, como $(I - T)^{-1}$ es no negativo, si e' está en $X_+^{'}$ también lo está x' (es decir, $I - T'$ tiene inversa no negativa).

Del teorema de la aplicación abierta se deduce que $I - T'$ es un isomorfismo topológico.

Finalmente, si e, e', x, y x' están en las condiciones del enunciado,

$$e'(x) = (x' - x' \circ T)(x) = x'(x - T(x)) = x'(e).$$

II. Existencia de soluciones

Estudiaremos en este apartado condiciones bajo las cuales el par (X,T) verifica la propiedad de la subsolución. Para ello, fijaremos un elemento e de X_+ y supondremos que existe una subsolución x_o de (Pe). Denotaremos por $M(x_o)$ al siguiente conjunto

$$M(x_o) = \{x \in X_+ ; x \geq T(x) + e, \|x\| \leq \|x_o\|\} \tag{4}$$

4. Proposición. $M(x_o)$ es un subconjunto convexo cerrado y acotado de X_+ tal que $T(x) + e \in M(x_o)$ para cada $x \in M(x_o)$.

Demostración

Al ser X_+ convexo cerrado, se deduce sin dificultad que $M(x_o)$ también lo es. Que $M(x_o)$ es acotado es evidente, y si $x \in M(x_o)$ entonces tomando $y = T(x) + e$ se verifica que $y \in X_+$ (T es no negativo), que $y = T(x) + e \leq x$ (pues $x \in M(x_o)$) de donde por ser X retículo de Banach $\|y\| \leq \|x\| \leq \|x_o\|$, y finalmente, que $T(y) + e \leq T(x) + e$ (T no decreciente) siendo el miembro de la derecha igual a y.

5. Proposición. Con las notaciones ya esablecidas, si x_e es un elemento minimal de $M(x_o)$ (con el orden que X induce sobre $M(x_o)$), entonces x_e es una solución de (Pe) tal que $\|x_e\| \leq \|x_o\|$.

Demostración. Puesto que $x_e \in M(x_o)$, $x_e \geq T(x_e) + e$, y al ser x_e minimal en $M(x_o)$, la proposición anterior garantiza que se verifica la desigualdad en sentido contrario.

6. Teorema. Si se verifica alguna de las siguientes condiciones,

6.1. T es compacto

6.2. Existe Z espacio de Banach cuyo dual es isomorfo a X tal que X_+ es $\sigma(X,Z)$ cerrado y T es $\sigma(X,Z)$ continua.

6.3. Existe $k > 1$ tal que si $0 \leq x_1 \leq x_2$, $\|x_1\| \geq 1$, y $\|x_2 - x_1\| \geq 1$ entonces $\|x_2\| \geq k$.

6.4. X no contiene copias reticuladas de C_o .

6.5. X es un espacio AL (véase [8]).

Entonces, el par (X,T) verifica la propiedad de la subsolución.

Demostración. Sean $e \in X_+, x_o$ una subsolución de (Pe), y $M(x_o)$ el introducido en (4).

6.1. La aplicación $F(x) = T(x) + e$ transforma elementos de $M(x_o)$ en elementos de $M(x_o)$ (proposición 4), y por el teorema de Schauder (véase [9]) tiene al menos un punto fijo.

6.2. De la proposición 5 y del lema de Zorn, se deduce que basta demostrar que $M(x_o)$ (con el orden inverso al natural) es un conjunto inductivo. Por tanto, sea $(x_i)_{i\in I}$ una cadena en $M(x_o)$, y para cada $i \in I$ considérese el conjunto

$$M_i = (x_i - X_+) \cap M(x_o)$$

Es claro que $x_i \in M_i$ para cada $i \in I$, y por consiguiente M_i no es vacío. De las hipótesis realizadas, y del teorema de Alaoglu-Bourbaky, se deduce que cada M_i es $\sigma(X,Z)$-compacto, y se prueba sin dificultad que la familia $\{M_i; i \in I\}$ verifica la popiedad de la intersección finita puesto que si $x_i \leq x_j$, entonces $M_i \subseteq M_j$. Basta entonces observar que cualquier elemento de

$$\bigcap_{i\in I} M_i$$

es una cota inferior de $(x_i)_{i\in I}$.

6.3. De las hipótesis realizadas se deduce inmediatamente que dado $\varepsilon > 0$, y dados x_1 y x_2 pertenecientes a X_+ tales que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \quad \|x_1\| \geq \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon$$

se verifica que $\|x_2\| \geq k\varepsilon$. Por otra parte, si se razona como en la demostración anterior, basta probar que $M(x_o)$ es un conjunto inductivo. Sea $(x_i)_{i\in I}$ una cadena en $M(x_o)$. Si esta cadena tiene elemento mínimo, la demostración habrá terminado. Si no existe elemento mínimo, supóngase de momento que considerada la cadena como una red, ésta tiene límite x_e. Entonces x_e es una cota inferior, ya que si no lo fuera, existiría x_i con $x_i < x_e$. Pero entonces, tomando $\varepsilon = \|x_e - x_i\|$, para cada $x_j < x_i$ es $x_e - x_j > x_e - x_i$ y por ser X un retículo de Banach, $\|x_e - x_j\| \geq \|x_e - x_i\| = \varepsilon$, de donde se deduce que la red no converge a x_e.

Probemos ahora que la cadena tiene límite, y para ello, que es de Cauchy. Si no lo fuera, existiría $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier x_i existirían x_j y x_r menores que x_i tales que $\|x_j - x_r\| > \varepsilon$. Fijemos un x_{i_1} cualquiera y tomemos x_{i_2} tal que $\|x_{i_1} - x_{i_2}\| \geq \varepsilon$ siendo $x_{i_1} > x_{i_2}$. Construyamos de forma recurrente, y siguiendo el procedimiento anterior, una sucesión decreciente $(x_{i_n})_{n\in N}$ tal que $\|x_{i_n} - x_{i_{n+1}}\| \geq \varepsilon$ para cada $n \in N$. Entonces, de la observación del comienzo de la demostración se deduce que

$$\|x_{i_1} - x_{i_4}\| \geq ke$$

ya que

$$0 \leq x_{i_1} - x_{i_2} \leq x_{i_1} - x_{i_4}, \ \|x_{i_1} - x_{i_2}\| \geq \varepsilon, \ \|(x_{i_1} - x_{i_4}) - (x_{i_1} - x_{i_2})\| =$$
$$= \|x_{i_2} - x_{i_4}\| \geq \varepsilon$$

Análogamente, $\|x_{i_4} - x_{i_8}\| \geq k\varepsilon$, y razonando en la forma anterior,

$$\left\| x_{i_1} - x_{i_8} \right\| \geq k^2 \varepsilon$$

Procediendo de forma recurrente,

$$\left\| x_{i_1} - x_{i_{2^n}} \right\| \geq k^{n-1} \varepsilon \quad \text{para cada } n \in N$$

y como $k > 1$, $\varepsilon > 0$, y la cadena $(x_i)_{i \in I}$ está contenida en $M(x_o)$, lo anterior contradice el hecho de que $M(x_o)$ sea un conjunto acotado.

6.4. Se prueba inmediatamente que si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n(e)$$

es convergente, entonces su límite es una solución de (*Pe*). Para probar que es convergente, y puesto que *X* no contiene copias reticuladas de C_o , basta ver que la sucesión de sumas parciales asociada es monótona creciente, y que está acotada por x_o (véase [8]). Que es monótona creciente es una consecuencia inmediata de que *T* sea no negativo, y para probar que está acotada, procederemos por inducción. Que $e \leq x_o$ es consecuencia de la definición de x_o . Supuesto que

$$\sum_{k=0}^{n} T^k(e) \leq x_o$$

aplicando *T* se tiene

$$\sum_{k=1}^{n+1} T^n(e) \leq T(x_o)$$

y sumando *e* y aplicando que x_o es una subsolución de (*Pe*),

$$\sum_{k=0}^{n+1} T^n(e) \leq x_o$$

6.5. Es consecuencia inmediata de 6.3.

7. Observaciones.

7.1. Los teoremas 1 y 3 de [4] prueban que si X es tal que tiene orden completo (todo subconjunto inferiormente acotado de X tiene elemento ínfimo) o si X es reflexivo, entonces (X,T) verifica la propiedad de la subsolución. Estos resultados se pueden deducir también del teorema anterior sin más que observar que cuando X tiene un orden completo $M(x_o)$ es inductivo, y cuando X es reflexivo estamos en las condiciones de 6.2.

7.2. Daremos ahora un contraejemplo que prueba que en general (X,T) no tiene la propiedad de la subsolución. Para ello, sea $X = C[0,1]$ dotado de la norma del supremo y del orden usual. Para cada $f \in X$ y cada $x \in [0,1]$ considérese $T(f)(x) = (1-x)f(x)$ y sea $e \in X$ dada por

$$e(x) = \begin{cases} X \operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Tomando f_o la función idénticamente uno, es claro que $f_o \geq T(f_o) + e$, mientras que si existiera $f \in X$ tal que $e = (I-T)(f)$, se verificaría que

$$f(x) = Sen^2 \frac{1}{x}$$

para cada x no nulo de [0,1], lo que está en contradicción con la continuidad de f.

7.3. En la demostración del teorema 6 se puede observar que para probar que el par (X,T) verifica la propiedad de la subsolución se ha utilizado en la mayoría de los casos el hecho de que el conjunto $M(x_o)$ tiene elementos minimales. Tiene sentido entonces plantear como problema abierto la demostración del siguiente resultado.

"Para cada T operador lineal continuo no negativo de X en sí mismo (X,T) verifica la propiedad de la subsolución, si y sólo si, todo subconjunto de X convexo, cerrado y acotado (en norma) admite elementos minimales."

Nótese en cualquier caso, que en el contraejemplo presentado en 7.2 el espacio X admite subconjuntos convexos cerrados y acotados sin elementos minimales, pero en general no es cierto que si el problema de Leontief admite solución, esta tenga que ser un elemento minimal de $M(x_o)$, como prueba el siguiente conraejemplo.

Sea $X = C[-\pi/2, \pi/2]$ dotado de la norma del supremo, y sea γ el elemento de X dado por

$$\gamma(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ Sen\ x & si\ x > 0 \end{cases}$$

Sea T tal que para cada $g \in X$ y cada $x \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$T(g)(x) = (1 - \gamma(x))g(x)$$

Entonces, si e es la función γ, la función constantemente uno es una solución del problema de Leontief. Sea ahora g otra solución cualquiera. Entonces,

$$\gamma(x)g(x) = \gamma(x) \text{ y } \gamma(x) > 0 \text{ para cada } x > 0$$

lo que unido a la continuidad de g implica que g es idénticamente uno para cada $x \geq 0$.

Tomemos ahora $\alpha \in X$ dada por

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 - e^{1/x} & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Claramente, $\alpha(x)g(x) = g(x)$ si $x \geq 0$, y $\alpha(x)g(x) < g(x)$ si $x < 0$, y suficientemente próximo a cero, de donde se deduce que como αg es solución del problema de Leontief, g nunca puede ser minimal.

III. La propiedad de Leontief

Estudiaremos a continuación algunas condiciones bajo las cuales el par (X,T) verifica la propiedad de Leontief en sus versiones débil y fuerte. Para ello, dado el elemento $d \in X_+$, consideraremos el siguiente conjunto

$$\Lambda(d) = \{x \in X_+ ; \exists \lambda > 0 \ con\ \lambda(d) \geq x\}$$

Consideraremos además elementos $d \in X_+$ tales que $\Lambda(d)$ es denso en X_+. Bajo condiciones bastante generales, estos elementos (llamados usualmente cuasi-interiores del cono no negativo) existen en los retículos de Banach (véase [8]).

8. Proposición. Si (X,T) verifica la propiedad de la subsolución, y existe $d \in X_+$ tal que $\Lambda(d) = X_+$ y (Pd) admite una subsolución, entonces, (X,T) verifica la propiedad débil de Leontief.

Demostración

Por hipótesis, existe x_d tal que $x_d \geq T(x_d) + d$. Por otro lado, dado $x \in X_+ = \Lambda(d)$ existe $\lambda > 0$ con $\lambda(d) \geq x$, y por consiguiente,

$$\lambda x_d \geq T(\lambda x_d) + \lambda d \geq T(\lambda x_d) + x$$

Puesto que (X,T) verifica la propiedad de la subsolución, (Px) admite una solución.

9. Proposición. Si X es espacio de Hilbert, T es autoadjunto, y (X,T) verifica la propiedad débil de Leontief, entonces (X,T) verifica la propiedad de Leontief.

Demostración

Si (X,T) verifica la propiedad débil de Leontief, entonces

$$(I-T)(X_+) \supseteq X_+ \qquad (5)$$

Por consiguiente, también es $(I-T)(X) \supseteq X_+$, y descomponiendo cada elemento de X en la diferencia de dos elementos de X_+, se prueba que $(I-T)(X) \supseteq X$, es decir, I-T es suprayectiva. Para probar que I-T es inyectiva, supóngase que existe $x \in X$ con $x - T(x) = 0$. Entonces, denotando el producto interior en X de la forma usual,

$$(x, y) = (T(x), y) \quad \text{para cada} \quad y \in X$$

y por ser T autoadjunto,

$$(x, y - T(y)) = 0 \quad \text{para cada} \quad y \in X$$

Pero al ser $I - T$ suprayectiva, $y - T(y)$ recorre todo X si lo hace y, de donde la última igualdad implica que $x = 0$.

Finalmente, del teorema de la aplicación abierta, I-T es un isomorfismo topológico, y de la expresión (5) se deduce inmediatamente, que $(I - T)^{-1}$ es un operador no negativo.

10. Teorema. Si T es un operador compacto, existe $d \in X_+$ tal que $\overline{\Lambda(d)} = X_+$, y ($Pd$) tiene una subsolución, entonces (X,T) verifica la propiedad de Leontief.

Demostración.

Del teorema 6 se deduce que por ser T compacto, (X,T) verifica la propiedad de la subsolución. Por consiguiente, razonando como en la proposición 8, se prueba que $(I - T)(X_+) \supseteq \Lambda(d)$, y por tanto,

$$\overline{(I - T)(X_+)} \supseteq X_+ \qquad (6)$$

Veamos ahora que $I - T$ es suprayectiva. En efecto, si x está en X_+ se deduce de lo anterior que x está en la adherencia de $(I - T)(X)$, pero como este subespacio es cerrado (véase [3] pág. 313), x está en la imagen de $I - T$. Descomponiendo de la forma usual cada $x \in X$ en diferencia de dos elementos de X_+ , se prueba inmediatamente que $I - T$ es suprayectiva.

Por ser T compacto, el núcleo de $I - T$ está contenido en un complementario topológico de $(I - T)(X)$ (véase [3], pág. 314), y por consiguiente, $I - T$ es inyectivo. Además, del teorema de la aplicación abierta, se deduce que $I - T$ es un isomorfismo topológico de X en sí mismo. Para terminar la demostración, sólo falta probar que $I - T$ tiene inverso no negativo, pero al ser $I - T$ un isomorfismo topológico, $(I - T)(X_+)$ es cerrado, y de (6) se deduce que $(I - T)(X_+) \supseteq X_+$, es decir, $(I - T)^{-1}(x) \in X_+$ para cada $x \in X_+$.

11. Observaciones.

11.1. Cuando se verifiquen las condiciones del teorema anterior, en virtud de la proposición 3, el problema de Leontief dual también admite una única solución no negativa para cada elemento de $X_+^{'}$.

11.2. Un caso especial de operador compacto (para el que las propiedades sobre la existencia de solución del modelo de Leontief son las mismas que para operadores en dimensión finita), es el siguiente

$$T(f)(x) = \int_a^b K(x,t)\, f(t)\, dt$$

donde el operador está definido en un espacio $C[a,b]$ o en un $L^2[a,b]$ (véase [1]) y el núcleo $K(x,t)$ es siempre no negativo.

Referencias

[1] BACHMAN, G. and NARICI, L. *Functional Analysis.* Academic Press. New York.

[2] CHANDER, P. *The Nonlinear. Input-Output Model.* Journal of Economic Theory 30, 1993 219-229.

[3] DIEUDONEÉ, J. *Fundamentos de Análisis Moderno.* Reverte. Barcelona 1968.

[4] FUJIMOTO, T. *Nonlinear Leontief Models in Abstract Spaces.* Journal of Mathematical Economics 15, 1986, 151-156.

[5] HERRERO, C. VILLAR, A. and FUJIMOTO, T. *General Leontief Models in Abstracts Spaces.* Universidad de Alicante, Serie A Discusión, Working Paper Nº 15, 1986.

[6] NIKAIDO, H. *Métodos Matemáticos del Análisis Económico Moderno.* Vicens Vives. Barcelona 1978.

[7] SCHAEFFER, H.H. *Topological Vector Spaces.* Springer Verlag. Berlin 1974.

[8] SCHAEFFER, H.H. *Banach Lattices and Positive Operators.* Springer Verlag. Berlin 1974.

[9] SMART, D.R. *Fixed Point Theorems.* Cambridge University Press 1974.