Optimización de sucesiones en un espacio de Banach separable

POR ANTONIO PLANS*

Académico Correspondiente

Conferencia pronunciada en la Academia
el día 13 de Enero de 1993.

Introducción

A lo largo de la Teoría de bases en un espacio de Banach separable siempre ha tenido especial importancia la investigación de la *mejor sucesión completa.*

En este problema hay dos factores estrechamente unidos: a) la representación de los vectores del espacio, b) la geometría de la sucesión.

Trataremos esta cuestión con un enfoque *geométrico.*

a) En un espacio vectorial E_n , de dimensión *n*, referido a una base $(\boldsymbol{a}_i)_{i=1,\dots,n}$, para todo $\boldsymbol{x} \in E_n$ tenemos la representación, unívocamente determinada, $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i$.

Surge entonces natural el planteamiento de análoga representación, $\forall\, \boldsymbol{x} \in X$: $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \boldsymbol{a}_i$, donde $(\boldsymbol{a}_i)$ sería una posible *base* de X.

b) Evidentemente $\mathfrak{G}((\boldsymbol{a}_i)) \subset \mathfrak{G}(X)$, para toda sucesión $(\boldsymbol{a}_i) \subset (X)$.

En $\mathfrak{G}(X)$ podemos definir la operación

$\vee : \forall\, E, F \in \mathfrak{G}(X), E \vee F = \overline{E+F}$.

Con las operaciones $\vee, \cap, \mathfrak{G}(X)$ adquiere estructura de retículo completo y complementado (v. [2]) + (el complemento, que no es único, es el "cuasi-complemento", v. [8]).

* Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Para una sucesión $(\boldsymbol{a}_i), \mathfrak{G}((\boldsymbol{a}_i)) \subset \mathfrak{G}(X)$ es cerrada y completa con la operación $\vee$. Pero, en general, dados $S, T \subset \mathbb{N}, W_S \cap W_T$ no pertenece a $\mathfrak{G}((\boldsymbol{a}_i))$.

Tanto en el aspecto a) como en el b), a lo largo de la investigación de la *mejor sucesión* $(\boldsymbol{a}_i)$, aparece dicho estudio íntimamente relacionado con las *sucesiones de subespacios de dimensión finita*: $(E^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$, $\dim E^{(i)} < \infty$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Definiciones. Notaciones

X = espacio de Banach separable real
$E, F, ..$= subespacios lineales cerrados
[ ] = envoltura lineal cerrada
$\mathbb{N} = \{1,2,...,n,...\}$; S,T,... subconjuntos de $\mathbb{N}$

$\sigma_1 = \{S \subset \mathbb{N};\ S\ \textit{finito}\}$

$\sigma_2 = \{S \subset \mathbb{N}; \mathbb{N}\text{-}S\ \textit{finito}\}$

$\sigma_3 = \{S \subset \mathbb{N};\ S, \mathbb{N}\text{-}S\ \textit{infinitos}\}$.

Dada una sucesión $(\boldsymbol{a}_i) \subset X$:

$(\boldsymbol{a}_i)$ completa : $\left[(\boldsymbol{a}_i)\right] = X$,

$W_S = \left[(\boldsymbol{a}_j)_{j\in S}\right]$,

$W_S^* = \bigcap_{j\notin S} \left[\ldots, \hat{\boldsymbol{a}}_j, \ldots\right]$,

$\mathfrak{G}((\boldsymbol{a}_i)) = \{W_S; S \subset \mathbb{N}\}$, geometría de la sucesión $(\boldsymbol{a}_i)$,

$\mathfrak{G}^*((\boldsymbol{a}_i)) = \{W_S^*; S \subset \mathbb{N}\}$, geometría * de la sucesión $(\boldsymbol{a}_i)$,

$\mathfrak{G}(X) = \{E \subset X; E$ subespacio lineal cerrado de $X\}$

Tipos de sucesiones, aspectos geométricos

A continuación vamos a considerar distintos tipos de sucesiones *completas*, destacando sus aspectos geométricos.

Comenzamos con la sucesión minimal y la M-base.

Definición. $(\boldsymbol{a}_i)$ es *minimal* si $\boldsymbol{a}_i \notin [\ldots,\hat{\boldsymbol{a}}_i,\ldots], \forall \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}$

Constituye la generalización natural de la independencia lineal de n vectores $\boldsymbol{a}_1\ldots,\boldsymbol{a}_n$, al pasar a una sucesión $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots$; decir sucesión minimal es decir sucesión topológicamente libre.

Es bien conocida la existencia de sucesiones mimimales completas, así como de *M-bases*, que añade la condición de *núcleo nulo*:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}[\boldsymbol{a}_n,\boldsymbol{a}_{n+1},\ldots]=\boldsymbol{0}$$

(base de Markushevich, 1943)

Equivalentemente, $(\boldsymbol{a}_i)$ M-base equivale a sistema biortogonal $(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_i^*)$, total.

La M-base $(\boldsymbol{a}_i)$ queda caracterizada por la siguiente condición, afectando a su geometría:

$W_S \cap W_T = \boldsymbol{0}, \forall S,T \subset \mathbb{N},\ S\cap T=\varnothing$ (v. [1], [14]).

La optimización, por esta línea geométrica, sería exigir la condición

$$W_S \cap W_T = W_{S\cap T}, \forall S,T \subset \mathbb{N}.$$

Llegamos así a la M-base *regular* ("strong M-basis").

Existen muchas caracterizaciones, destacamos la siguiente:

$$W_S = W_S^*, \forall S \subset \mathbb{N}.$$

Las propiedades de intersección en la geometría de una sucesión dan lugar a numerosos e interesantes tipos de sucesiones, obtenidos en esta línea geométrica (v. [4]).

De modo completamente análogo se puede definir la *M-base de subespacios* $(E^{(i)})$, dim $E^{(i)} < \infty, \forall \boldsymbol{i} \in \mathbb{N}$:

$$\left[E^{(i)}\right]=X, E^{(i)}\cap\left[\ldots,\hat{E}^{(i)},\ldots\right]=\boldsymbol{0}, \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[E^{(n)},E^{n+1)},\ldots\right]=\boldsymbol{0}$$

Asímismo la *M-base regular de subespacios*:

$$\left[(E^{(j)})_{j\in S}\right]\cap\left[(E^{(k)})_{k\in T}\right]=\left[(E^{(1)})_{1\in S\cap T}\right], \forall S,T \subset \mathbb{N}.$$

Poco antes de que Terenzi probase, en 1989, la existencia de la M-base regular en todo espacio de Banach separable, tenemos el siguiente resultado (v. [16]).

"Sea $(\boldsymbol{a}_i)$ una M-base. Existe una sucesión creciente de números naturales (p_n) tal que, $\forall S, T \subset \mathbb{N}$, saturados respecto de la partición $(1,\ldots,p_1),(p_1+1,\ldots,p_2),\ldots$ de $\mathbb{N}$, se verifica

$$\left[(\boldsymbol{a}_j)_{j\in S}\right]\cap\left[(\boldsymbol{a}_k)_{k\in T}\right]=\left[(\boldsymbol{a}_p)_{p\in S\cap T}\right] ".$$

Esto significa precisamente que *toda M-base es regular por bloques.*

Indirectamente quedaba demostrada la existencia de la M-base regular de subespacios, $\left\{E^{(i)}=\left[\boldsymbol{a}_{p_{i-1}+1},\ldots,\boldsymbol{a}_{p_i}\right]\right\}_{i\in N}$

Dicho resultado se apoya en el siguiente, de Terenzi (v. [26]): "Teorema I. Para todo sistema biortogonal $(\boldsymbol{x}_n, f_n)$ de X, existe una sucesión creciente de números naturales (q_n) tal que

$$\boldsymbol{x}=\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{q_m} f_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_n+\sum_{n=q_m+1}^{q_{m+1}} a_n\boldsymbol{x}_n\right),$$

para todo $\boldsymbol{x}\in\left[(\boldsymbol{x}_n)\right]$, donde $(a_n)_{n>q_1}$ es una sucesión que depende de **x**.

Nótese que en este Teorema I, la sucesión (q_n) *no depende de* $\boldsymbol{x}$."

En otra dirección geométrica, se obtiene también una mejora de la M-base $(\boldsymbol{a}_i)$ al exigir la acotación inferior de la inclinación de $\boldsymbol{a}_i$ respecto al hiperplano correspondiente $\left[\ldots,\hat{\boldsymbol{a}}_i,\ldots\right]$:

$$\inf_{i\in N}\partial\left(\boldsymbol{a}_i,\left[\ldots,\hat{\boldsymbol{a}}_i,\ldots\right]\right)>0.$$

Tenemos así la *M-base uniforme*. Expresado de otra manera,

$$\sup_{i\in N}\|\boldsymbol{a}_i\|\,\|\boldsymbol{a}_i^*\|<\infty.$$

Su existencia quedó probada, precisando además que $\forall\varepsilon>0$, se puede conseguir $\|\boldsymbol{a}_i\|\,\|\boldsymbol{a}_i^*\|<1+\varepsilon$ (v. [13]).

Siguiendo en esta línea de condiciones de inclinación en la geometría de una M-base $(\boldsymbol{a}_i)$, podemos imponer la condición

$$\inf_{i\in N} \partial\left(\left[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{p_n}\right],\left[\boldsymbol{a}_{p_{n+1}},\boldsymbol{a}_{p_{n+1}+1},\ldots\right]\right)>0,$$

para una cierta sucesión creciente de números naturales (p_n). Tenemos así intrínsecamente caracterizada la M-base normante. $\left(\left[(a_i^*)\right]\ \textit{es normante}\right)$. Es conocida su existencia en todo espacio de Banach separable. Si éste es reflexivo, toda M-base es normante.

La M-base uniforme dada anteriormente (v.[13]) puede tomarse normante.

Con una mayor exigencia en las condiciones de inclinación impuestas a una M-base $(\boldsymbol{a}_i)$, tenemos:

$$\inf_{n\in N} \partial\left(\left[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{p_n}\right],\left[\boldsymbol{a}_{p_n+1},\ldots\right]\right)>0,$$

para una cierta sucesión creciente $(p_n)\subset\mathbb{N}$.

Tenemos así caracterizada la *base con paréntesis*: $\forall \boldsymbol{x}\in X, \exists (p_n)\subset\mathbb{N}$ tal que

$$\boldsymbol{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p_n+1}^{p_{n+1}}\boldsymbol{a}_i^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_i\right).$$

Caso particular cualificado es la *base* (base de Schauder):

$$(p_n=n)_{n\in N};\forall \boldsymbol{x}\in X, \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{a}_i^*(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_i\ ,$$

caracterizada por la condición

$$\inf_{n\in N}\partial\left(\left[\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n\right],\left[\boldsymbol{a}_{n+1},\ldots\right]\right)>0.$$

La base con paréntesis, fijados éstos por la sucesión $(p_n)\subset\mathbb{N}$, tiene asociada una "*finite decomposition*" (v. [24]):

$$\left\{E^{(n)} = \left[\boldsymbol{a}_{p_{n-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{p_n}\right]\right\}_{n \in N}.$$

De forma unívoca, todo $\boldsymbol{x} \in X$ admite entonces la representación

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{x}_n \in E^{(n)}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomando ahora como punto de partida una sencilla propiedad geométrica en dimensión finita, de carácter proyectivo, definiremos el sistema de apoyo de subespacios, caracterizado vectorialmente por regularidad de sucesiones, como más adelante se verá.

"Dados los subespacios $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$, independientes, que subtienden S_n, espacio proyectivo de dimensión n, si $a \in S_n$ y $a \notin \left[\ldots, \hat{S}^{(j)}, \ldots\right] (1 \leq j \leq p)$, existe un único subespacio

$$S_{p-1} = \left[a_1, \ldots, a_p\right]$$

que pasa por el punto a y está subtendido por los puntos $a_1, \ldots, a_p$, donde $a_j \in S^{(j)}, 1 \leq j \leq p$." (v. "Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi", E. Bertini, 1907).

Se puede llamar a un tal subespacio S_{p-1}, *espacio de apoyo* del punto a, en los subespacios $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$, siendo $a_1, \ldots, a_p$ los *puntos de apoyo* de S_{p-1} en los subespacios $S^{(1)}, \ldots, S^{(p)}$, respectivamente.

El resultado anterior puede enunciarse de forma vectorial, ya que la geometría proyectiva de dimensión n es precisamente la geometría del espacio vectorial $(n+1)$-dimensional, $\mathfrak{G}(E_{n+1})$.

De forma natural, puede generalizarse la anterior situación a dimensión infinita.

Definición. Una M-base de subespacios $(E^{(n)})$ se dirá *sistema de apoyo* si para todo $\boldsymbol{x} \in X$, se verifica $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n, \ldots]$, siendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{x}'_n, \boldsymbol{x}_n \in E^{(n)}, \boldsymbol{x}'_n \in \left[\ldots, \hat{E}^{(n)}, \ldots\right], \forall n \in \mathbb{N}$ (v. [20]).

Nótese que si $dim\ E^{(n)} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, encontramos precisamente la M-base regular.

La "finite decomposition", vista anteriormente, puede considerarse como caso particular cualificado de sistema de apoyo.

Sucesiones finitamente asociadas a una sucesión dada.

A lo largo de las anteriores consideraciones, vemos asociadas sucesiones vectoriales y sucesiones de subespacios de dimensión finita, llegando a tener unas y otras el mismo significado geométrico, expresado en términos de sucesiones vectoriales o bien, en términos de sucesiones de subespacios (recordemos por ejemplo, la base con paréntesis y la "finite decomposition"). Esto sugiere técnicas, de carácter finito, que permitan construir nuevas sucesiones vectoriales a partir de una sucesión dada, a través de sucesiones de subespacios asociadas a ella. Tendremos también así procedimientos que permitirán *mejorar* la sucesión de partida.

a) *Sucesión bloque* $(\boldsymbol{c}_j)$ de una sucesión $(\boldsymbol{a}_i)$: existe una sucesión creciente $(q_n) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\boldsymbol{c}_1 \in \left[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_1}\right],$$

$$\boldsymbol{c}_2 \in \left[\boldsymbol{a}_{q_1+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_2}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{c}_j \in \left[\boldsymbol{a}_{q_{j-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_j}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

b) *Sucesión perturbación bloque* $(\boldsymbol{b}_j)$ de una sucesión $(\boldsymbol{a}_i)$, ("BP" de $(\boldsymbol{a}_i)$): existe una sucesión creciente $(q_n) \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\left[\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{q_1}\right] = \left[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_1}\right],$$

$$\left[\boldsymbol{b}_{q_1+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{q_2}\right] = \left[\boldsymbol{a}_{q_1+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_2}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\boldsymbol{b}_{q_{j-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{b}_{q_j}\right] = \left[\boldsymbol{a}_{q_{j-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{q_j}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Observemos que, por construcción, la BP conserva la envoltura lineal cerrada: $\left[(b_j)_{j\in N}\right]=\left[(a_i)_{i\in N}\right]$.

A continuación aplicamos ambas técnicas para obtener nuevos resultados conducentes al mejoramiento de una sucesión.

Definición. Una sucesión completa $(\boldsymbol{a}_i)$ es una *"block strong M-basis"* si toda sucesión bloque de $(\boldsymbol{a}_i)$ es regular (en particular, $(\boldsymbol{a}_i)$ tiene que ser regular) (v. [5]).

Existen M-bases regulares que *no* son de este tipo (v. [25]).

Dada una sucesión completa $(\boldsymbol{a}_i)$, podemos exigir o demostrar la existencia de BP regulares ($(\boldsymbol{a}_i)$ tiene que ser, al menos, una M-base). De este modo, obtendremos distintos tipos de sucesiones y se podrán resolver problemas de existencia.

Supongamos ahora que exista una sucesión creciente $(p_n)\subset\mathbb{N}$ tal que toda BP correspondiente a los bloques por ella determinados

$$(1,\dots,p_1),(p_1+1,\dots,p_2),\dots,(p_{n-1}+1,\dots,p_n),\dots$$

sea *regular* (en particular $(\boldsymbol{a}_i)$ tiene que ser regular),

Esto equivale exactamente a afirmar que la sucesión de subespacios

$$\left\{E^{(n)}=\left[\boldsymbol{a}_{p_{n-1}+1},\dots,\boldsymbol{a}_{p_n}\right]\right\}_{n\in N}$$

es un *sistema de apoyo*, por lo cual diremos que $(\boldsymbol{a}_i)$ es una *M-base regular de apoyo*.

Si además exigimos que sea regular toda BP correspondiente a la subsucesión $\left(p_{r_n}\right)\subset\left(p_n\right)$, describiendo $\left(p_{r_n}\right)$ el conjunto de todas ellas, tenemos caracterizada la base con paréntesis, correspondientes éstos a $\left(p_n\right)$. Y sabemos que la base con paréntesis determina unívocamente una "finite decomposition" de X. Se advierte así que la base con paréntesis es más exigente que el sistema de apoyo.

Si en lo dicho anteriormente hacemos $p_n=n,\forall n\in\mathbb{N}$, exigimos entonces que *toda perturbación bloque de* $(\boldsymbol{a}_i)$ *sea regular.* Esto caracteriza precisamente la *base* de X.

Este resultado, que permite definir la base a través de la regularidad, al exigir un notable mejoramiento de la intersección en la geometría de sucesiones, fue obtenido por Indurain-Terenzi en 1986 (v.[6]). Anteriormente fue demostrado sólo para espacios de Banach reflexivos (v.[15]).

En términos de sistemas de apoyo, también podemos definir la base como una sucesión completa $(\boldsymbol{a}_i)$ tal que para *toda* sucesión creciente de números naturales (p_n), la sucesión de subespacios

$$\left\{E^{(n)} = \left[\boldsymbol{a}_{p_{n-1}+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{p_n}\right]\right\}_{n \in N}$$

es un *sistema de apoyo.*

En 1989, Terenzi, partiendo de una M-base normante y de su teorema de representación, ya anteriormente mencionado, construye una perturbación bloque regular, que como tal BP conserva el carácter normante. Quedaba así probado por Terenzi el siguiente resultado:

"Every separable Banach space has a norming stron M-basis",

dando así respuesta afirmativa a la pregunta, formulada en 1981, por Singer (v.[24]):

"Does there exist in every Banach space a strong M-basis?".

Con ello Terenzi daba un gran paso en la línea de *mejoramiento geométrico* de las sucesiones completas, al cerrar afirmativamente el problema de existencia de la M-base regular, largo tiempo abierto.

En fecha posterior a 1989, Terenzi conseguía el resultado siguiente:

"Every separable Banach space has a fundamental strong norming bounded biorthogonal sequence".

Y recientemente, en el II Symposium sobre sucesiones y operadores en espacios de Banach, Jaca 1992, mejoraba el resultado anterior:

"Every separable Banach space has a fundamental strong norming bounded sequence (a_n), which is also Steinitz basis:

$\forall \boldsymbol{x}^* \in X^*, \forall \boldsymbol{x} \in X$, existe $\{\pi(n)\}$ tal que

$$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{x}) = \sum_{\pi(n)} \boldsymbol{a}^*_{\pi(n)}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}_{\pi(n)}(\boldsymbol{x}^*)",$$

donde π designa una permutación.

En la línea del mejoramiento de una sucesión completa en cuanto a la *representación* de los elementos del espacio X, ocupa un lugar destacado el llamado *problema de la base*.

Problema de la base

Un espacio de Banach X posee la *propiedad de aproximación* (p.a.) si todo operador compacto de un espacio de Banach en X puede ser aproximado, en la topología de la norma para operadores, mediante operadores de rango finitodimensional.

Es sabido que todo espacio de Banach con base posee la p.a.

Enflo (v.[3]), en 1973, dio un ejemplo de espacio de Banach, reflexivo y separable, que no posee la p.a., con lo cual dicho espacio *no podía tener base*. Por consiguiente

Desde 1973, el problema de la base se ha cerrado negativamente.

De la existencia de una base con paréntesis, en un espacio de Banach separable, se sigue la validez de la p.a. (v.[24], [26]). Por tanto

En general, un espacio de Banach separable no admite una base con paréntesis.

Vemos así que, en cuanto a la representación del espacio de Banach, la optimización de una M-base se sitúa por debajo de la base con paréntesis.

Algunas cuestiones abiertas.

1.- Existencia de una "block strong M-basis".

2.- Existencia de una M-base regular de apoyo, con la correspondiente sucesión (p_n) verificando $p_{n+1} - p_n > p, \forall n \in \mathbb{N}$, donde p es un número natural, dado al arbitrio.

3.- Existencia del sistema biortogonal total uniforme $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i^*)$, con $\|\boldsymbol{a}_i\| \, \|\boldsymbol{a}_i^*\| = 1$.

4.- Para toda M-base, existencia de una perturbación bloque regular (esto ya se verifica en un espacio de Banach reflexivo).

5.- En 1981, Singer plantea el siguiente problema (v.[24]):

"Does every Banach space with a basis with parentheses have a basis?".

Bibliografía

[1] COURAGE, W.H., DAVIS, W.J. *A characterization of M-bases.* Math. Annalen, 197, 1-4 (1972).

[2] DUBREIL-JACOTIN, M.L., LESIEUR, L. *Leçons sur la Thèorie des Treillis, des Structures algébriques ordonnées et des Treillis géométriques.* Gauthier-Villars, 385 págs., París (1953).

[3] ENFLO, P. *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math., 130, 309-317 (1973).

[4] GARCÍA-CASTELLÓN, F., INDURAIN, E. *Properties of intersection in the Geometry of sequences in Banach spaces.* Collectanea Math., 36, 253-262 (1985).

[5] GARCÍA.CASTELLÓN, F. *A note on block strong M-basic sequences and basic sequences.* Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 34, 115-120, (1985-86).

[6] INDURAIN, E., TERENZI, P. *A characterization of basic sequences in Banach spaces.* Rendiconti Accad. Naz. Sci., X, 207-212 (1986).

[7] INDURAIN, E., PLANS, A., REYES, A. *Notas sobre Geometría de sucesiones en espacios de Banach.* Publ. Depto. Matemáticas, Universidad de Extremadura, 262 págs., (1987).

[8] MACKEY, G.W. *Note on a Theorem of Murray.* Bull. Am. Math. Soc., 52, 322-325 (1946).

[9] MARTI, J.T. *Introduction to the Theory of Bases.* Springer Verlag, Berlín (1969).

[10] MIL'MAN, V.D. *Geometric Theory of Banach spaces I.* Russian Math. Surveys, 25, 111-170 (1970).

[11] MUEL, E. *Geometría* de una sucesión en un espacio de Banach. Coordenadas en una M-base.* Tesis doctoral, Zaragoza, Pub. Sem. Mat. García de Galdeano, Sec. 2, nº 30, 130 págs. (1991).

[12] OVSEPIAN, R.I., PELCZYNSKI, A. *On the existence of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence in every separable Banach space, and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in* L^2. Studia Math. 54, 149-159 (1975).

[13] PELCZYNSKI, A. *All separable Banach spaces admit for every* $\varepsilon > 0$ *fundamental total and bounded by* $1+\varepsilon$ *biorthogonal sequences.* Studia Math., 55, 295-304 (1976).

[14] PLANS, A. *Dependencias lineales en el espacio de Hilbert.* Pub. Sem. Mat. García de Galdeano, nº 10, 153-161, Zaragoza (1969).

[15] PLANS, A. *A Characterization of basic sequences in Banach spaces.* Semesterbericht Funktionalanalysis, Tübingen (1985).

[16] PLANS, A. *An intersection property for M-bases of a separable Banach space.* Trends in Functional Analysis and Approximation Theory, Acquafredda di Maratea (1989).

[17] PLANS, A., RODES, A. *Sobre una representación, por convergencia asociada a una M-base, de un espacio de Banach.* XV Jornadas Luso-espanholas de Matemática, Evora (1990).

[18] PLANS, A. *Die Verbesserung einer M-base im Banachraum in Zusammenhang mit der Terenzi-Darstellung.* Math. Kolloquium, FernUniversität, Hagen (1990).

[19] PLANS, A. *Sobre propiedades de intersección en la Geometría de una M-base.* Aportaciones Matemáticas, en memoria del Prof. Víctor M. Onieva, 245-255, Santander (1991).

[20] PLANS, A. *Espacios de Apoyo* (en elaboración).

[21] PLANS, A. *Properties of an M-basis in a Banach space related with the representation of Terenzi* (en prensa).

[22] REYES, A. *Aspectos reticulares y geométricos de sistemas de vectores en espacios de Banach y Hilbert. Problema de la intersección.* Tesis doctoral, Universidad de Zargoza (1980).

[23] REYES, A. *On a classification of sequences in Banach spaces.* Arch. Math. 43, 535-541 (1984).

[24] SINGER, I. *Bases in Banach spaces, II.* Springer Verlag, Berlin (1981).

[25] TERENZI, P. *Block sequences of strong M-bases in Banach spaces.* Collectanea Math., 35, 93-114 (1984).

[26] TERENZI, P. *Representation of the space spanned by a sequence in a Banach space.* Arch. Math., 43, 448-459 (1984).

[27] TERENZI, P. *On the properties of the strong M-bases in Banach spaces.* Pub. Sem. Mat. García de Galdeano, nº 117 (1987).

[28] TERENZI, P. *Particular M-basic sequences in Banach spaces. Geometric Aspects of Banach Spaces.* Lect. Notes. Series 140, Cambridge Univ. Press, 54-72 (1989).

[29] TERENZI, P. *Every separable Banach space has a fundamental strong norming bounded biorhogonal sequence* (en prensa).