Convergence presque sure des records

PAR A. IMLAHI *

Recibido: 13 de Octubre de 1993

Presentado por el Académico Numerario D. Francisco Javier Girón

Abstract

We establish almost sure convergences for k-th record times and k-th record values. Key tools are recent strong approximations of record times and record values due to Deheuvels (1988) and the Steinebach (1986) results on increments of partial sums of i.i.d. random variables.

AMS 1980 *Subject Classifications*: Primary 60F05, 60F15, 60F17, 62G30, Secondary 60G42.

Key words and phrases: Record values, record times, extreme values, almost sure convergence, strong approximations, Wiener processes.

1. Introduction

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ une suite de variables aléatoires (v.a.) indépentantes et identiquement distribuées (i.i.d) et de fonction de répartition continue $F(x) = P(X_1 \le x)$. On désigne par $X_{1,n} < X_{2,n} < \ldots < X_{n,n}$ la statistique d'ordre de $X_1, \ldots, X_n$ et soit $\{k_n, n \ge 1\}$ la suite des rangs correspondante définie par:

$k_1 = 1$ et $k_n = j$ si $X_{j-1,n-1} < X_{j,n-1}$ pour $n = 2,3, \ldots$.

Pour $k \ge 1$ un entier fixé, on définit deux suites notées par $\{\upsilon_j^{(k)}, j \ge 0\}$ et $\{n_j^{(k)}, j \ge 0\}$ et correspondantes aux temps de S-records (S pour strict) et temps de N-records. (N pour normal) par (voir Deheuvels (1988)):

* Département de Mathématiques. Faculté des Sciences de Tétouan.

$$\upsilon_o^{(k)} = n_o^{(k)} = k-1 \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \upsilon_j^{(k)} = min\left\{n > \upsilon_{j-1}^{(k)} : k_n = n-k+1\right\} \\ n_j^{(k)} = min\left\{n > n_{j-1}^{(k)} : k_n \geq n-k+1\right\}, \end{array}$$

Pour $k \geq 1$ fixé, on définit la suite $\left\{\rho_j^{(k)} \quad, j \geq 0\right\}$ des k-ièmes S-records et la suite $\left\{R_j^{(k)} \quad, j \geq 0\right\}$ des k-ièmes N-records par:

$$\rho_j^{(k)} = X_{n-k+1,n} \quad \text{avec} \quad n = \upsilon_j^{(k)},$$

$$\text{et} \quad R_j^{(k)} = X_{n-k+1,n} \quad \text{avec} \quad n = n_j^{(k)}, j = 0,1,2,\dots .$$

On peut définir les k-ièmes temps de N-records par:

$$\upsilon_j^{(k)} = k-1 \text{ et } n_j^{(k)} = min\left\{n > n_{j-1}^{(k)} : X_{n-k+1} > X_{n_{j-1}^{(k)}-k+1, n_{j-1}^{(k)}}\right\} \text{ pour } j = 1,2,\dots$$

(voir Dziubdziela et Kopocinski (1976)).

En d'autre termes, les N-records sont obtenus à partir de la suite des k-ièmes statistiques extrêmes $X_{1,k} \leq X_{2,k+1} \leq \dots \leq X_{n-k+1,n} \leq \dots$ .En éliminant les valeurs répétées, nous obtenons une suite strictement croissante appelée suite des k-ièmes N-records. Les instants n oú ces valeurs ont lieu sont appelés les k-ièmes temps de N-records, c'est à dire les indices n pour lesquels $k_n \geq n-k+1$. Les S-records correspondent à des observations X_n dont le rang k_n est exactement égale à $n-k+1$.

Il découle de ces définitions que les S-records et N-records coïncident pour $k = 1$. Nous notons ainsi les records et les temps de records par:

$n_j = n_j^{(1)} = \upsilon_j^{(1)}$ et $R_j = R_j^{(1)} = \rho_j^{(1)}, j = 1,2,\dots$ La suite $\left\{n_j, j \geq 1\right\}$ qui correspond aux instants d'accroissements des valeurs extrêmes $\left\{M_n = max\left(X_1,\dots,X_n\right), n \geq 1\right\}$ a été étudié en détail dans la littérature par Chandler (1952), Rényi (1962), Shorrock (1972, 1973), Galambos et Seneta (1975), Glick (1978), Pfeifer (1987), Deheuvels (1982 a, 1983 b), Nevzorov (1988), parmi d'autres.

L'étude des records pour $k \geq 2$ est plus récente. Elle a, pour l'essentiel été introduite par Dziubdziela et Kopocinski (1976) et a été développé plus tard par Deheuvels (1982 a, 1982 b) et (1988).

L'objet de ce travail est d'etablir des résultats sur la convergence presque sûre des valeurs et temps de records $(k \geq 1)$. Nous nous basons d'une part, sur les approximations fortes de ces éléments dûes à Deheuvels (1988), d'autre part sur les mèthodes utilisèes par Steinebach (1986) pour l'étude de la généralisation de la loi forte des grands nombres de Hanson et Russo (1981). Nous terminons ce papier par des applications.

Nous remarquons que $\{-\log(1-F(X_n)), n \geq 1\}$ définit une suite de v.a. exponentielle de paramètre 1. Par conséquent nous pouvons supposer sans perte de généralité que les v.a. $X_1, X_2, \ldots$ sont i.i.d exponentielle $E(1)$ ($E(1)$ i.e. de fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-x}, x > 0$).

2. Convergence presque sûre des valeurs de records.

Considérons d'abord une fonction réelle $H(x)$ définie pour $x > 0$, qui satisfait:

(i) $H(x)$ $(x > 0)$ est positive et continue.

(ii) $\dfrac{H(x)}{x^{2+\gamma}}$ est croissante pour une certaine valeur de $\gamma > 0$.

iii) $\dfrac{\log H(x)}{x}$ est décroissante.

iv) $lim\ \inf_{x \to +\infty} \dfrac{H(\varepsilon x)}{H(x)} > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Les résultats que nous exposons dans la suite font appel aux conditions suivantes:

$$(C_1)\quad k_n / \frac{(inv\, H(n))^2}{\log n} \to +\infty, n \to +\infty,$$

et (C_2) $k_n \approx C.\dfrac{(inv\,H(n))^2}{\log n}, n \to +\infty$ pour une valeur de $C > 0$, oú $(k_n)_{n=1,2,...}$ est une suite d'entiers vérifiant $1 \leq k_n \leq n$. Ici, inv$H(n)$ désigne la fonction inverse de H.

Remarque

a) invH existe puisque d'aprês (i) et (ii) H est continue et strictement croissante.
b) La condition (iv) est satisfaite pour toute fonction à variation lente à l'infini.

2.1. Convergence presque sûre des k-ièmes S-records.

Posons

$$\rho^{(k)}(n,j) = \left| \rho_n^{(k)} - \rho_{n-j}^{(k)} - j \right| / d(n,j),$$

où $d(t,s) = (2s(\log\left(\dfrac{t}{s}\right) + \log\log S))^{1/2}, 0 < S \leq t.$

Thèoréme 2.1. On suppose que les hypohèses (i) - (iii) sont satisfait. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(1) $EH(\varepsilon\rho_1^{(k)}) < +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$;

(2) $\lim\sup\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{k_n \leq j \leq n} \rho^{(k)}(n,k_n) = 1$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1).

(3) $\lim\sup\limits_{n\to+\infty} \rho^{(k)}(n,k_n) = 1$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1).

Théorème 2.2. On suppose que les hypothèses (i) - (iv) sont satisfaites. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(4) $EH(\rho_i^{(k)}) < +\infty$;

(5) $\lim\sup\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{k_n \leq j \leq n} \rho^{(k)}(n,j) = 1$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2).

(6) $lim \sup_{n\to+\infty} \rho^{(k)}(n,k_n)=1$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2).

Remarque. (4) implique (5) et (6) pour toute suite $(k_n)_{n=1,2,...}$ dèntiers satisfaisant

$$lim \inf_{n\to+\infty} \frac{k_n \log n}{(invH(n))^2}>0$$

Tout d'abord, nous énonçons le lemme suivant:

Lemme 1. Désignons pour $k \geq 1$ entier fixé par $N_k(t)=\#\{\rho_j^{(k)} \leq t, j\geq 1\}$ et $N^{(k)}(t)=\#\{R_j^{(k)} \leq t, j\geq 1\}, t\geq 0$ les fonctions de comptage des processus ponctuels $\{\rho_j^{(k)}, j\geq 1\}$ et $\{R_j^{(k)}, j\geq 1\}$; (ici # A est le nombre d'éléments contenu dans l'ensemble A). Alors $N_1(.), N_2(.),...$ sont des processus de Poisson standard indépendants, et $N^{(k)}(.)=\sum_{l=1}^{k} N_l(.)$.

Preuve. Voir Deheuvels (1983 a). Ce théorème a été énoncé sans démonsration par Ignatov en 1978. Une première conséquence de ce lemme est que la suite $\{\rho_j^{(k)}, j\geq 1\}$ sont pour $k\geq 1$ indépendantes et ayant la même distribution que $\{R_j, j\geq 1\}$. Une autre conséquence et que $kR_j^{(k)}$ suit pour $k\geq 1$ et $j\geq 1$ la loi Gamma $\Gamma(j)$; ce résultat a été prouvé directement pour k = 1 par Chandler (1952) et pour $k\geq 2$ par Dziubdziela et Kopocinski (1976).

Preuve des théorèmes.

Il résulte du Lemme 1, que $\rho_n^{(k)}=\xi_1^{(k)}+...+\xi_n^{(k)}$ avec $\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},...,\xi_n^{(k)}...$, est une suite de v.a (i.i.d) exponentielle de paramètre 1 définie par: $\xi_1^{(k)}=\rho_1^{(k)}, \xi_j^{(k)}=\rho_j^{(k)}-\rho_{j-1}^{(k)}, j=2,3,...$.

En appliquant les théorèmes 2.1 et 2.2 de Steinebach (1986) à la suite des variables aléatoires $\left(\xi_n^{(k)}\right)_{n=1,2,\ldots}$ nous obtenons directement les résultats annoncés.

2.2. Convergence presque sûre des k-ièmes N-records.

On note

$$M^{(k)}(n,j)=\left| R_n^{(k)}-R_{n-j}^{(k)}-\frac{j}{k}\right| / d(n,j)$$

Théorème 2.3. Sous les hypothèses (i) - (iii), les énoncès suivants sont èquivalents:

(1) $EH(\varepsilon R_1^{(k)})<+\infty$ por un certain $\varepsilon>0$;

(2) $\lim\sup_{n\to+\infty} \max_{k_n\le j\le n} M^{(k)}(n,j)=\frac{1}{k}$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1);

(3) $\lim\sup_{n\to+\infty} M^{(k)}(n,k_n)=\frac{1}{k}$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1).

Théorème 2.4. Sous les hypothèses (i)-(iv), on a l'èquivalence entre:

(4) $EH(R_1^{(k)})<+\infty$;

(5) $\lim\sup_{n\to+\infty} \max_{k_n\le j\le n} M^{(k)}(n,j)=\frac{1}{k}$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2);

(6) $\lim\sup_{n\to+\infty} M^{(k)}(n,k_n)=\frac{1}{k}$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2).

Preuve. Le Lemme 1 nous permet d'ècrire que:

$R_n^{(k)}=\omega_1^{(k)}+\omega_2^{(k)}+\ldots+\omega_n^{(k)}$, où $(\omega_n^{(k)})_{n\ge1}$ est une suite de v.a. exponentielle de paramètre k idem-distribuées définie par:

$\omega_1^{(k)}=R_1^{(k)}$ et $\omega_j^{(k)}=R_j^{(k)}-R_{j-1}^{(k)}$, $j=2,3,\ldots$.

En appliquant le Théorème 2.1 (respectivement le Théorème 2.2) de Steinebach (1986), aux sommes partielles $R_n^{(k)}, n \geq 1$ on en déduit les résultats désirés.

3. Convergence presque sûre des temps de records.

3.1. Convergence presque sûre des k-ièmes temps de S-records.

On pose

$$A^{(k)}(n,j) = \left| \log \upsilon_n^{(k)} - \log \upsilon_{n-j}^{(k)} - j \right| / d(n,j)$$

Théorème 3.1. On suppose que les hypothèses (i)-(iii) son vérifiées. Alors on a l'équivalence des énoncés suivants:

(1) $EH(\varepsilon\rho_1^{(k)}) < +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$

(2) $\lim \sup\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{k_n \leq j n} A^{(k)}(n,j) = 1$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1);

(3) $\lim \sup\limits_{n \to +\infty} A^{(k)}(n,k_n) = 1$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1).

Théorème 3.2. On suppose que les hypothèses (i)-(iv) sont satisfaites. Alors on a l'équivalences des énoncés suivants:

(1*) $EH(\rho_1^{(k)}) < +\infty$;

(2*) $\lim \sup\limits_{n \to +\infty} \max\limits_{k_n \leq j \leq n} A^{(k)}(n,j) = 1$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2);

(3*) $\lim \sup\limits_{n \to +\infty} A^{(k)}(n,k_n) = 1$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2).

Pour montrer ces résulats, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2. On suppose que les conditions (i)-(iii) et (1) (ou (1*)) sont vérifiées. Alors, sans perte de généralité, il existe un processus de Wiener $\{W(t), t \geq 0\}$ tel que:

$$\rho_n^{(k)} - n - W(n) = O(inv\, H(n)) \quad \text{p.s., } n \to +\infty$$

Si de plus (iv) est satisfaite, nous avons:

$$\rho_n^{(k)} - n - W(n) = o(inv\, H(n)) \quad \text{p.s., } n \to +\infty.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer un résultat sur les approximations fortes de Komlós, Major, Tusnády (1975/76) et Major (1976a), voir aussi Csörgö et Révész (1981) (Théorème 2.6.6., Lemmes (2.6.1,, 2.6.2)) aux v.a.$\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}$, ... définie auparavant.

Preuve du Théorème 3.1.

Observons d'abord que sous la condition (C_1), lorsque $n \to \infty$,

(3.1) $invH(n) = o\,(min\{(k_n \log n)^{1/2}, n^{\beta}\}$, pour un certain $0 < \beta < \frac{1}{2}$,

et sachant que *d(t,s)* est croissante en *s* pour $t \geq e^e$ et $0 < s \leq t$, nous en déduisons que:

(3.2) $invH(n) = o\,(d(n, k_n))$, quand $n \to +\infty$.
En effet, pour *n* grand

$$d(n,k_n) \geq \left(2 k_n \log \frac{n}{k_n}\right)^{1/2} \geq a\left(k_n \log n\right)^{1/2}, \text{ si } k_n \leq n^{\alpha}, 2\beta \leq \alpha < 1,$$

et $d(n,k_n) \geq d(n,n^{\alpha}) \geq b n^{\alpha/2} (\log n)^{1/2}$, sinon. Où *a* et *b* sont des constantes positives.
A l'aide de la relation (3.1) on en déduit (3.2).
Supposons que (1) est satisfaite. D'après le Lemme 2, sans perte de généralité, il existe un processus de Wiener $\{W(t), t \geq 0\}$ tel que:

$$\rho_n^{(k)} - n - W(n) = O(inv\, H(n)) \quad p.s., n \to +\infty.$$

D'après le Corollaire 3 de Deheuvels (1988), nous avons

$$\log \upsilon_n^{(k)} - \rho_n^{(k)} = O(\log n) \quad p.s., n \to +\infty$$

D'autre part, si l'on pose $G(t) = invH(t),\ t > 0$, il résulte des hypothèses (i)-(iii) que $G(t)\uparrow, \dfrac{G(t)}{t}\downarrow 0$ et $\log t = O(G(t))$.

Par conséquent, on en déduit que:

(3.3) $\log \upsilon_n^{(k)} - n - W(n) = O(invH(n)) \quad p.s., n \to +\infty$.

Nous pouvons écrire alors pour tout $k_n \leq j \leq n$,

$(\log \upsilon_n^{(k)} - \log \upsilon_{n-j}^{(k)} - j) = (\log \upsilon_n^{(k)} - n - W(n)) - (\log \upsilon_{n-j}^{(k)} - (n-j) - W(n-j)) +$
$+(W(n) - W(n-j))$.

Comme $\limsup\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{k_n\leq j\leq n} \dfrac{|W(n)-W(n-j)|}{d(n,j)} \leq 1\, p.s.$, (voir Hanson et Russo (1983a), Théorème 3.1), il découle alors de (3.2) et (3.3) que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{k_n\leq j\leq n} A^{(k)}(n,j) \leq 1$ p.s., pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1).

D'après le Théorème 6 de Deheuvels (1988), nous avons

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\log \upsilon_n^{(k)} - n|}{(2n\log\log n)^{1/2}} = 1\, p.s. \,.$$

Comme

$$\max_{k_n\leq j\leq n} \frac{|\log \upsilon_n^{(k)} - \log \upsilon_{n-j}^{(k)} - j|}{d(n,j)} \geq \frac{|\log \upsilon_n^{(k)} - n - (k-1)|}{(2n\ \log\log n)^{1/2}},$$

il en résulte que

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{k_n\leq j\leq n} A^{(k)}(n,j) \geq 1 \text{ p.s.,} \quad \text{d'où (2).}$$

Le raisonnement est analogue pour (3).
Supposons maintenat que (2) ou (3) est satisfaite. Prenons par exemple (2).
Nous avons:

$(\rho_n^{(k)} - \rho_{n-j}^{(k)} - j) = (\rho_n^{(k)} - \log \upsilon_n^{(k)}) - (\rho_{n-j}^{(k)} - \log \upsilon_{n-j}^{(k)}) + (\log \upsilon_n^{(k)} - \log \upsilon_{n-j}^{(k)} - j)$

A partir des approximations suivantes:

(3.4) $\log \upsilon_n^{(k)} - \rho_n^{(k)} = O(\log n) \quad p.s., n \to +\infty,$
et

(3.5) $\log n = O(invHn))$, lorsque $n \to +\infty$, on en déduit facilement de (3.2)

que:

(3.6) $lim \sup_{n\to\infty} \; max_{k_n \le j \le n} \dfrac{\left| \rho_n^{(k)} - \rho_{n-j}^{(k)} - j \right|}{d(n,j)} = 1$ p.s. pour toute suite (k_n) satisfaisant (C_1).

Notons que $\rho_o^{(k)} = 0$ et, par la loi du logarithme itéré nous avons,

$$lim \sup_{n\to\infty} \frac{\left| \rho_n^{(k)} - n \right|}{(2n \log\log n)} = 1 \text{ p.s.}$$

(3.6) implique alors (1).

Preuve du Théorème 3.2:

Supposons (1*) et montrons alors (2*) et (3*).
Nous utilisons le même raisonnement que dans la preuve du Thèoréme 3.1 ($(1) \Rightarrow (2)$ et (3)). Notons que sous l'hypothèse (iv), la relation (3.3) s'écrit d'après les Lemmes 2.6.1 et 2.6.2 de Csörgo et Révész (1981), sous la forme: $\log \upsilon_n^{(k)} - n - W(n) = o(invH(n)) \quad p.s., \; n \to +\infty$, et sous la condition (C_2), nous avons:

(3.7) $inH(n) = O(min\{(k_n \log n)^{1/2}, n^{\beta}\})$, pour un certain $0 < \beta < \dfrac{1}{2}$.

Pour cette partie de la démonstration il suffit de supposer que:

$$lim \inf_{n\to+\infty} \frac{k_n \log n}{(invH(n))^2} > 0.$$

Inversement, supposons que (2*) ou (3*) ait lieu. D'après le Théorème 2.2 précédent et la Remarque 5 de Steinebach (1987), pour démontrer (1*), il suffit de prouver que,

$$\lim \sup_{n\to+\infty} \frac{\left|\rho_n^{(k)} - \rho_{n-k_n}^{(k)} - k_n\right|}{d(n,k_n)} \le C_0 \quad p.s.,$$

pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2) et une certaine constante $C_0 > 0$. Ceci est immédiate. En effet,

$$\frac{\left|\rho_n^{(k)} - \rho_{n-k_n}^{(k)} - k_n\right|}{d(n,k_n)} \le \frac{\left|\rho_n^{(k)} - \log \upsilon_n^{(k)}\right| + \left|\rho_{n-k_n}^{(k)} - \log \upsilon_{n-k_n}^{(k)}\right|}{d(n,k_n)} +$$

$$+ \frac{\left|\log \upsilon_n^{(k)} - \log \upsilon_{n-k_n}^{(k)} - k_n\right|}{d(n,k_n)}$$

En combinant (3.4), (3.5), (3.7) et (3*) on trouve le résultat annoncé.

3.2. Convergence presque sûre des k-iémes temps de N-records.

On trouve des résultats semblables à ce qui précède. Nous énonçons les théorémes suivants.

Thèorème 3.3. On suppose que les hypothèses (i)-(iii) sont satisfaites. Alors les énoncés suivants sont équivalents:

(1) $EH(\varepsilon R_1^{(k)}) < +\infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$;

(2) $\lim \sup_{n\to+\infty} \max_{k_n \le j \le n} \dfrac{\left|\log n_n^{(k)} - \log n_{n-j}^{(k)} - \dfrac{j}{k}\right|}{d(n,j)} = \dfrac{1}{k}$ $p.s.$ pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1);

(3) $\lim \sup_{n\to+\infty} \dfrac{\left|\log n_n^{(k)} - \log n_{n-k_n}^{(k)} - \dfrac{k_n}{k}\right|}{d(n,k_n)} = \dfrac{1}{k}$ p.s. pour toute suite (k_n) vérifiant (C_1).

Théorème 3.4. Sous les hypothèses (i)-(iv), les énoncés suivants sont équivalents:

(1*) $EH(R_1^{(k)}) < +\infty$;

(2*) $\displaystyle lim \sup_{n\to+\infty} \max_{k_n \le j \le n} \frac{\left|\log n_n^{(k)} - \log n_{n-j}^{(k)} - \frac{j}{k}\right|}{d(n,j)} = \frac{1}{k}$ p.s. por une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2);

(3*) $\displaystyle lim \sup_{n\to\infty} \frac{\left|\log n_n^{(k)} - \log n_{n-k_n}^{(k)} - \frac{k_n}{k}\right|}{d(n,k_n)} = \frac{1}{k}$ p.s. pour une certaine suite (k_n) vérifiant (C_2).

4. Applications.

Nous nous intéressons ici à l'application des résultats obtenus lors des paragraphes précédents. Nous nous précisons les fonctions H dignes d'intérêt.

1° / Des cas particuliers des Théorèmes 2.1, 2.3, 3.1 et 3.3 sont donnés dans les exemples suivants:

a) $H(x) = exp(S_0\, x), S_0 > 0$. On a alors:

$$invH(x) = \frac{\log x}{S_0}, x > 0.$$

et la condition (C_1) est équivalente à $\dfrac{k_n}{\log n} \to +\infty,\ n \to +\infty$.

Comme $E\ (exp(\varepsilon\, S_0\, \rho_1^{(k)})) < +\infty$, pour $0 < \varepsilon \dfrac{1}{S_0}$, $S_0 > 0$, on a, par conséquent le résultat suivant:

Proposition 1. Si (k_n) est une suite d'entiers vérifiant $1 \leq k_n \leq n$ et

$\dfrac{k_n}{\log n} \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$, alors les résultats des Théorèmes 2.1 et 3.1 sont satisfaits.

De même, puisque $E\, exp(\varepsilon S_0 R_1^{(k)}) < +\infty$, pour $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{S_0 k}, S_0 > 0$, on a alors:

Proposition 2. Si (k_n) est une suite d'entiers vérifiant $1 \leq k_n \leq n$ et

$\dfrac{k_n}{\log n} \to +\infty$, lorsque $n \to +\infty$, alors les résultats des Théorèmes 2.3 et 3.3 sont satisfaits.

b) $H(x) = exp(x^p), 0 < p < 1.$

$$inv\, H(x) = (\log x)^{1/p},$$

et la condition (C_1) est équivalente à $\dfrac{k_n}{(\log n)^{\frac{2}{p}-1}} \to +\infty, n \to +\infty.$

2° / Nous donnons maintenant des cas particuliers des Théorèmes 2.2, 2.4, 3.2 et 3.4 correspondants aux fonctions H définies par:

a) $H(x) = x^{\frac{2}{r}}(1+\log^+ x)^{-\frac{1}{r}}, 0 < r < 1, \log^+ x = \log(max(x,1)).$

On a alors, $$invH(x) = \frac{r}{2} x^{\frac{r}{2}} (\log x)^{1/2}$$

et la condition (C_2) est équivalente à $k_n = cn^r, c > 0.$
Ce cas a été étudié dans Lai (1974), Théorème 2, Csörgo et Révész (1981) Remarque 3.2.2 et Bingham-Maejima (1985), Théorème 2.

Il est clair que $E\left((\rho_1^{(k)})^{\frac{2}{r}} (1+\log^+ \rho_1^{(k)}) \right) < +\infty,\ 0 < r < 1.$ Par conséquent, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3. Si (k_n) est une suite dentiers satisfaisant $1 \leq k_n \leq n$ et $\lim\inf_{n\to+\infty} \frac{k_n}{n^r} > 0,\ 0 < r < 1$ alors nous avons les mêmes résultats que les Théorèmes 2.2 et 3.2.

Exemples:

(1) $k_n = [cn^r],\ c > 0,\ 0 < r < 1$

2) $k_n \geq n^r, 0 < r < 1.$

b) $H(x) = x^p, p > 2$. On a alors,

$$inv\, H(x) = x^{\frac{1}{p}},$$

et (C_2) est équivalente à $k_n \approx \frac{cn^{\frac{2}{p}}}{Logn}$, pour un certain $c > 0$.

Références:

1. BINGHAM, N.H. and MAEJIMA, M.: *Summability methods and almost sur convergence.* Z. Wahrsch. Verw. Geb. 68, 383-392 (1985).
2. CHANDLER, K.N.: *The distribution and frequency of record values.* J.R. Stat. Soc. B 14, 220-228 (1952).
3. CSÖRGO, M., RÉVÉSZ, P.: *Strong approximations in probability and statistics.* New York: Academic Press 1981.
4. DEHEUVELS, P.: *Strong approximation in extreme value theory and applications.* Coll. Math. Soc. Jànos Bolyai 36. In: Révész, P. (ed) limite theorems in probability and statistics, 369-404. Amsterdam: North Holland (1982 a).
5. DEHEUVELS, P.: *On record times associated with k-the extremes.* Proc. of the 3rd Pannonian symp. on Math. Stat., pp. 43-51. Mogyorodi, J., Wincze, Wertz, W. (eds). Budapest: Akadémiai Kiado (1982 b).
6. DEHEUVELS, P.: *The strong approximation of extremal processes* (II).Z. Wahrsch. verw. Geb. 62, 7-15 (1983 a).

7. DEHEUVELS, P.: *The complete characterization of the upper and lower class of the record and inter-record times of an i.i.d sequence.* Z, Wahrsch. Verw. Geb. 62, 1-6 (1983 b).

8. DEHEUVELS, P.: *Strong approximations of k-the records and k-the Record times by Wiener Processes.* Prob: Th. Rel. Fields, 195-209 (1988).

9. DZIUBDZIELA, W., KOPOCINSKI, B.: *Limiting properties of the k-record values.* Applications Math. 15, 187-190 (1976).

10. GALAMBOS, J., SENETA, E.: *Record times.* Proc. Am. Math. Soc. 50, 383-387 (1975).

11. GLICK, N.: *Breaking records and breaking boards*, Amer. Math. Monthly 85 (1), 2-26 (1978).

12. HANSON, D.L., RUSSO, R.R.: *On the law of large numbers.* An. Probab. 9, 513-519 (1871).

13. IGNATOV, Z.: *Point process generated by order statistics and their applications.* Coll, Math. Soc. János Bolyai 24. In: Bártfai, P., Tomkó, J. (eds), Point processes and queuing problems, pp. 109-116. Amsterdam: North Holland (1978).

14. KOMLÓS, J., MAJOR, P., TUSNÁDY, G.: *An approximation of partial sums of independant r.v's and the sample df. I.*Z. Wahrsch. Verw. Geb. 32, 111-131 (1975).

15. KOMLÓS, J., MAJOR, P., TUSNÁDY, G.: *An approximation of partial sums of independent r.v's and the sample df.II.* Z Wharsch. Verw. Geb. 34, 33-58 (1976).

16. LAI, T.L.: *Limit theorems for delayed sums.* Ann. Prob 2, 432-440 (1974).

17. MAJOR, P.: *The approximation of partial sums of independent r.v's Z Wahrsch.* Verw. Geb. 35, 213-220 (1976).

18. NEVZOROV, V.B.: *Records.* Theory. Prob. Appl. Vol. 32, N° 2, (1987).

19. PFEIFER, D.: *On the joint strong approximation theorem for record and inter-record times.* Prob. Th. Rel. Fields, 75, 213-221 (1987).

20. RÉNYI, A.: *Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations.* Colloquium on combinatorial Mathods in Probability Theory, pp. 104-117. Matematiisk Institut, Aarus Anuversitet, Denmark, (1962).

21. SHORROCK, R.W.: *A limit theorem for inter-record times*, J. Appl. Probability 9, 219-223 (1972).

22. SHORROOCK, R.W.: *On record values and record times*, J. Appl. Probability 9, 316-326 (1972).

23. SHORROCK, R.W.: *Record values and inter-record times,* J. Appl. Probability 1O, 543-555 (1973).

24. STEINEBACH, J.: *Some remarks on strong approximations and the Hanson-Russo law of large numbers.* Statistics $ Decisions 4, 237-249 (1986).

25. STEINEBACH, J.: *Almost sure convergence of delayed renewal processes.* The Journal . London. Math. soc. (2). Vol. 36, 569-576 (1987).