Ideales de operadores absolutamente contínuos

J.A. LÓPEZ MOLINA*

E.A. SÁNCHEZ PÉREZ*

Recibido: 13 de octubre de 1993

Presentado por el Académico Correspondiente D. Manuel López Pellicer

Abstract

We give new characterizations of the (p,σ)-absolutely continuous operators of Matter, showing their relation with the interpolation spaces, and we present elementary new examples of (p,σ)-absolutely continuous operators which are not p-absolutely summing. We characterize also the (p,σ)-absolutely continuous operators for which a factorization theorem of Kwapien's type holds.

Introducción.

El ideal $\mathcal{AC}$ de los operadores abolutamente continuos fue introducido por Nicolescu en [10] como $\mathcal{AC} = \overline{\wp_1}^{inj}$, la envoltura inyectiva de la clausura uniforme del ideal $\wp_1$ de los operadores absolutamente sumantes. A partir de la caracterización general de Jarchow [4] de tal envoltura, Matter introdujo en [7] el ideal $\wp_{p\sigma}$ de los operadores (p,σ)-absolutamente continuos, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \sigma < 1$, como un proyecto de estratificación de los operadores absolutamente continuos cuyo objetivo a largo plazo sería mejorar las caracterizaciones del tipo y cotipo de un espacio de Banach que se encuentran en [9].

En este artículo presentamos nuevas caracterizaciones del ideal $\wp_{p\sigma}$ que completan de forma natural las obtenidas por Matter en [7], resolviendo por una

---

* E.T.S. Ingenieros Agrónomos. Camino de Vera. Valencia. Spain.

* La investigación del primer autor ha sido financiada parcialmente por la DGICYT, Proyecto PB91-0538 y la del segundo con una Beca de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia.

parte la dificultad presentada en la sección 4 de [6] y mostrando por otra parte la estrecha relación que existe entre el ideal $\wp_{p\sigma}$ y los espacios de interpolación. El resultado fundamental es el teorema 1.7 para el que se necesita la preparación de la sección 1. Es interesante resaltar que se pueden construir elementalmente ejemplos de operadores $T \in \wp_{p\sigma}$ tales que $T \notin \wp_p$ (el ideal de los operadores p-absolutamente sumantes) evitando los argumentos más complicados de [7]. En la sección 2, introducimos el ideal $\mathcal{D}_{p\sigma q\upsilon}$ de los operadores (p,σ,q,υ)-dominados como una generalización natural del ideal $\mathcal{D}_{pq}$ de los operadores (p,q)-dominados de Pietsch mediante las ideas consideradas en la sección 1. La principal característica del ideal $\mathcal{D}_{p\sigma q\upsilon}$ es la verificación de un teorema de factorización análogo al de Kwapien para $\mathcal{D}_{pq}$. Finalmente se prueba la maximalidad de $\mathcal{D}_{p\sigma q\upsilon}$ mediante la construcción explícita de su tensor norma asociada.

En general, la notación que usaremos será la habitual del Análisis Funcional. Cuando haya que enfatizar el espacio normado E en el que se calcula la norma $\|x\|$ de un vector x, se ecribirá $\|x\|_E$. Si E es normado, E' será el espacio de Banach dual de $E, T' \in \mathcal{L}(F',E')$el operador adjunto de $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y B_E la bola unidad de E. La bola $B_{E'}$, se considerará como espacio topológico compacto dotado de la topología $\sigma(E',E)$. Para cada medida de Radon μ en $B_{E'}$, y para cada $x \in E$, f_x designará el elemento de $L^\infty(B_{E'},\mu)$ (*clase* de funciones iguales μ-casi por todas partes) que posee entre sus representantes la función $f_x(a) = <x,a>$ para cada $a \in B_{E'}$. Así, si $y \in E'$, f_y será el correspondiente elemento de $L^\infty(B_{E''},\mu)$. Denotamos por $J_E: E \to L^\infty(B_{E'},\mu)$ la aplicación continua tal que $J_E(x) = f_x$ para cada $x \in E$, y se define $E_\mu = J_E(E)$, dotado de la norma cociente $\|.\|_\mu$ de E por Ker (J_E), es decir $\| f_x \|_\mu = \inf\{ \|y\| \; |y \in E, f_y = f_x\}$ para $x \in E$. Así pues E_μ

es un espacio de Banach si E es de Banach. $\hat{M}$ será la compleción de un espacio normado M. La clase de los espacios de Banach se denotará por BAN y la de los espacios normados por NOR. En los espacios $l^p(E)$ y $l^p[E]$ de las sucesiones débilmente p-absolutamente sumables y p-absolutamente sumables de E, utilizaremos respectivamente las normas

$$\varepsilon_p((x_i)) = \sup_{a\in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |<x_i,a>|^p \right)^{1/p}, \pi_p((x_i)) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{1/p}$$

si $1 \le p < \infty$ y con las obvias modificaciones para $p=\infty$. El número conjugado de p se designará por p'. En cuestiones referentes a tensor normas e ideales de operadores remitimos al lector a los textos de Defant y Floret [2] y Pietsch [11], y para temas de espacios de interpolación, a Bergh y Löfström [1]. La norma de $T \in \wp_r(E,F)$ se representa por $\Pi_r(T)$.

1. Operadores (p,σ)-absolutamente continuos.

Definición 1.1. (Matter [7]): Sean $E,F \in BAN$ y $1 \le p < \infty$, $0 \le \sigma < 1$. Se dice que un opeador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es (p,σ)-absolutamente continuo si existe $G \in BAN$ y un operador $S \in \wp_p(E,G)$ tal que $\| Tx \| \le \| Sx \|^{1-\sigma} \| x \|^{\sigma}$ para cada $x \in E$.

Designaremos este ideal de operadores por $\wp_{p\sigma}(E,F)$. Se define la norma de $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$ como $\Pi_{p\sigma}(T) = \inf\{\Pi_p(S)^{1-\sigma}\}$ tomado sobre las aplicaciones S que verifican la definición anterior. En [7], Matter da diversas formulaciones alternativas de $\Pi_{p\sigma}(T)$ y varias caracterizaciones de los operadores $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$.

El objeto de esta sección es dar nuevas equivalencias, que completan de modo natural las anteriores, en términos del comportamiento de los operadores con respecto a determinadas sucesiones del espacio E. Para ello necesitamos algunos resultados previos. Dado $E \in BAN$, definimos

$$H_E^p = \{ (x_i) \in E^{\mathbf{N}} \,|\, \delta_{p\sigma}((x_i)) := \sup_{a\in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(|<x_i,a>|^{1-\sigma} \| x_i \|^{\sigma} \right)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} < \infty \}$$

e introducimos la siguiente definición:

Definición 1.2. Se dice que una sucesión $(x_i) \in E^{\mathbf{N}}$ es (p,σ)-débilmente sumable si pertenece al espacio vectorial $l^{p\sigma}(E)$ generado por H_E^p .

Proposición 1.3. La función $\varepsilon_{p\sigma}$ definida en $l^{p\sigma}(E)$ por

$$\varepsilon_{p\sigma}((x_i)) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{k} \delta_{p\sigma}((x_i^j)) \,\middle|\, (x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x_i^j), (x_i^j)_{i=1}^{\infty 1} \in H_E^p, j = 1,\dots,k; k \in \mathbf{N} \right\}$$

es una norma en $l^{p\sigma}(E)$ tal que las inclusiones $l^{\frac{p}{1-\sigma}}[E] \subset l^{p\sigma}(E) \subset l^{\frac{p}{1-\sigma}}(E)$ son continuas y de norma ≤ 1. Además se verifica

$$\forall (x_i) \in l^{\frac{p}{1-\sigma}}[E],\ \varepsilon_{p\sigma}((x_i)) \leq \inf\left\{ \sum_{j=1}^{k} \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i^j))^{\sigma}\, \varepsilon_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i^j))^{1-\sigma} \,\middle|\, \right.$$

$$\left. (x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x_i^j),\ (x_i^j)_{i=1}^{\infty} \in l^{\frac{p}{1-\sigma}}[E], k \in \mathbf{N} \right\}.$$

Demostración: Dada $(x_i) \in l^{p\sigma}(E)$ y $\varepsilon > 0$, existe una representación $(x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x_i^j)$ tal que $\sum_{j=1}^{k} \delta_{p\sigma}((x_i^j)) \leq \varepsilon_{p\sigma}((x_i)) + \varepsilon$. Por la desigualdad de Minkowski

$$\varepsilon_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i)) \leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{a \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| < x_i^j, a > \right|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k} \sup_{a \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\left| < x_i^j, a > \right|^{1-\sigma} \| x_i^j \|^{\sigma} \right)^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \varepsilon_{p\sigma}((x_i)) + \varepsilon ,$$

y por tanto debe ser $\varepsilon_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i)) \leq \varepsilon_{p\sigma}((x_i))$. Por ser $\varepsilon_{\frac{p}{1-\sigma}}$ una norma, se deduce que si $\varepsilon_{p\sigma}((x_i)) = 0$, entonces $(x_i) = 0$.

Sea ahora $(x_i) \in l^{\frac{p}{1-\sigma}}[E]$. Como $\delta_{p\sigma}((x_i)) \leq \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i))$, se tiene que $(x_i) \in H_E^p$. Por tanto $(x_i) \in l^{p\sigma}(E)$ y $\varepsilon_{p\sigma}((x_i)) \leq \delta_{p\sigma}((x_i)) \leq \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i))$.

Por otra parte, dadas $(x_i), (y_i) \in l^{p\sigma}(E)$ y $\varepsilon > 0$, existen representaciones

$$(x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x_i^j), \quad (y_i) = \sum_{j=1}^{l} (y_i^j) \quad \text{tales que } (x_i^j) \in H_E^p,\ j = 1, \ldots, k,$$

$$(y_i^j) \in H_E^p,\ j = 1, \ldots, l \text{ y}$$

$$\sum_{j=1}^{k} \delta_{p\sigma}((x_i^j)) \leq \varepsilon_{p\sigma}((x_i^j)) + \varepsilon \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{l} \delta_{p\sigma}((y_i^j)) \leq \varepsilon_{p\sigma}((y_i^j)) + \varepsilon \; .$$

Entonces

$$\varepsilon_{p\sigma}((x_i) + (y_i)) \leq \sum_{1}^{k} \delta_{p\sigma}((x_i^j)) + \sum_{1}^{l} \delta_{p\sigma}((y_i^j)) \leq \varepsilon_{p\sigma}((x_i^j)) + \varepsilon_{p\sigma}((y_i^j)) + 2\varepsilon \; .$$

El resto de las condiciones de norma se comprueban fácilmente. Para acabar basta probar que

$$\delta_{p\sigma}((x_i)) \leq \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i))^{\sigma} \varepsilon_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i))^{1-\sigma} \quad \forall (x_i) \in l^{\frac{p}{1-\sigma}}[E].$$

Y en efecto, aplicando la desigualdad de Hölder con exponentes conjugados $1/(1-\sigma)$ y $1/\sigma$ a la definición de $\delta_{p\sigma}((x_i))$, se tiene

$$\delta_{p\sigma}((x_i)) \leq \sup_{a \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|< x_i, a >|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{(1-\sigma)^2}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{(1-\sigma)\sigma}{p}} =$$

$$= \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i))^{\sigma} \varepsilon_{\frac{p}{1-\sigma}}((x_i))^{1-\sigma}. \qquad \blacksquare$$

En la siguiente proposición damos una descripción de los elementos de la compleción del espacio $l^{p\sigma}(E)$, que será básica para resultados posteriores. Seguiremos denotando por $\varepsilon_{p\sigma}$ a la norma en $\hat{l}^{p\sigma}$.

Proposición 1.4. Sea $E \in BAN$. Para cada $\varphi \in \hat{l}^{p\sigma}(E)$, existe una sucesión en H_E^p $x^n = (x_i^n), n \in \mathbb{N}$, tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{p\sigma}(x^n) < \infty$ y $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ en $\hat{l}^{p\sigma}$. Además, $\varepsilon_{p\sigma}(\varphi) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{p\sigma}(x^n) \right\}$, tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de φ de este tipo. Recíprocamente, cada serie de este tipo converge en $\hat{l}^{p\sigma}(E)$.

Demostración. Sea $\varphi \in \hat{l}^{p\sigma}(E)$. Existe una sucesión $(z^n)_{n=1}^{\infty} \subset l^{p\sigma}(E)$, tal que $\lim_{n\to\infty} z^n = \varphi$ en $\hat{l}^{p\sigma}(E)$. Dado $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathbb{N}$, tomando una subsucesión si es necesario, se puede suponer que

$$\varepsilon_{p\sigma}(z^1) \le \varepsilon_{p\sigma}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad \forall n \ge 2,\ \varepsilon_{p\sigma}(z^n - z^{n-1}) \le \frac{\varepsilon_{p\sigma}(\varphi)}{2^{n+h}}.$$

Entonces, si definimos $z^o = 0$, se tiene

$$\varphi = \lim_{n\to\infty} z^n = \sum_{n=2}^{\infty} (z^n - z^{n-1}) \tag{1}$$

Para cada $n \ge 1$ existe una representación $z^n - z^{n-1} = \sum_{j=1}^{k(n)} (x_i^{jn})$, con $(x_i^{jn}) \in H_E^p$ para cada j ,y tal que

$$\sum_{j=1}^{k(n)} \delta_{p\sigma}(x_i^{jn}) \leq \varepsilon_{p\sigma}(z^n - z^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} .$$

Llevando esta representación a (1) y cambiando convenientemente los superíndices, obtenemos $\varphi = \sum_{l=1}^{\infty}(x_i^l)$, que verifica

$$\sum_{l=1}^{\infty} \delta_{p\sigma}(x_i^l) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{k(n)} \delta_{p\sigma}(x_i^{jn}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_{p\sigma}(z^n - z^{n-1}) + \frac{\varepsilon}{2^n}) \leq$$

$$\leq \varepsilon_{p\sigma}(\varphi) + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon_{p\sigma}(\varphi)}{2^{n+h}} + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \leq \varepsilon + \left(1 + \frac{1}{2^{h+1}} \right) \varepsilon_{p\sigma}(\varphi) < \infty.$$

Además,

$$\varepsilon_{p\sigma}(\varphi) = \lim_{k \to \infty} \varepsilon_{p\sigma}(\sum_{l=1}^{k}(x_i^l)) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \delta_{p\sigma}(x_i^l) \leq \varepsilon + \left(1 + \frac{1}{2^{h+1}} \right) \varepsilon_{p\sigma}(\varphi)$$

de donde se deduce el resultado anunciado al ser $\varepsilon > 0$ y $h \in \mathbb{N}$ arbitrarios.

Por otra parte, si $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_{p\sigma}(x_i^n) < \infty$, $y (x_i^n) \in H_E^p, n \in \mathbb{N}$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall h \in \mathbb{N} \qquad \varepsilon_{p\sigma}\left(\sum_{n=k}^{k+h} (x_i^n) \right) \leq \sum_{n=k}^{k+h} \delta_{p\sigma}((x_i^n)) < \varepsilon .$$

Por tanto, $(\sum_{n=1}^{k}(x_i^n))_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $l^{p\sigma}(E)$, y su límite $\sum_{n=1}^{\infty}(x_i^n)$ pertenece a $\hat{l}^{p\sigma}(E)$. ■

A continuación introducimos un nuevo espacio. Dado $E \in BAN$, una probabilidad de Radon μ en $B_{E'}$ y $1 \leq p < \infty$, definimos $M_{p\sigma}(E) = J_E(E)$ dotado de la norma $\| \ \|_{p\sigma}$ tal que para cada $f_x \in M_{p\sigma}(E)$,

$$\| f_x \|_{p\sigma} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_E^{\sigma} \; \| f_{x_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} \;\middle|\; x = \sum_{i=1}^{n} x_i \,, x_i \in E, i = 1,2,\ldots,n; n \in N \right\}$$

siendo $\| f_x \|_{L^p}$ la norma de f_x en $L^p((B_{E'}, \mu)$. La demostración de que $\| \ \|_{p\sigma}$ es efectivamente una norma, es análoga a la de 1.3 observando que se verifica $\| f_x \|_{L^p} \leq \| f_x \|_{p\sigma} \leq \| x \|$ para cada $f_x \in M_{p\sigma}$, y que por tanto, si $\| f_x \|_{p\sigma} = 0$ debe ser $f_x = 0$. Seguiremos denotando la norma de los elementos φ de la complección $\hat{M}_{p\sigma}(E)$ por $\| \varphi \|_{p\sigma}$. Se tiene

Proposición 1.5. Si $\varphi \in \hat{M}_{p\sigma}(E)$, existe una sucesión $(f_{x_n})_{n=1}^{\infty}$ en $M_{p\sigma}(E)$, tal que

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x_n} \text{ en } \hat{M}_{p\sigma}(E) \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|_E^{\sigma} \; \| f_{x_n} \|_{L^p}^{1-\sigma} < \infty \,.$$

Además, $\| f \|_{p\sigma} = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|_E^{\sigma} \| f_{x_n} \|_{L^p}^{1-\sigma} \right\}$ tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de f de este tipo. Recíprocamente, cada serie de esta clase define un elemento de $\hat{M}_{p\sigma}(E)$.

Demostración. Es análoga a la de la proposición 1.4. ■

Sea $I : M_{p\sigma}(E) \to L^p(B_{E'})$ la inclusión canónica e $\hat{I} : \hat{M}_{p\sigma}(E) \to L^p(B_{E'})$ su extensión continua a la complección. Sea $K_{p\sigma}(E)$ el conjunto $\hat{I}(\hat{M}_{p\sigma}(E))$ dotado de la norma cociente N_c de $\hat{M}_{p\sigma}(E)/Ker(\hat{I})$.

Por tanto $K_{p\sigma}(E) \in BAN$. Obsérvese que la aplicación $I: M_{p\sigma}(E) \to K_{p\sigma}(E)$ es inyectiva, pues si $I(f_x) = 0$ en $K_{p\sigma}(E)$, sería $\| f_x \|_{L^p} = 0$ y por tanto $f_x = 0$.

Proposición 1.6. Sea $E \in BAN$. $M_{p\sigma}(E)$ y $K_{p\sigma}(E)$ son espacios de interpolación exactos de exponente $1-\sigma$ entre E_μ y $L^p(B_{E'}, \mu)$.

Demostración. Todas las *inclusiones*
$E_\mu \to M_{p\sigma}(E) \to K_{p\sigma}(E) \to L^p(B_{E'}, \mu)$ son continuas y $M_{p\sigma}(E)$ y $K_{p\sigma}(E)$ son espacios intermedios respecto al par de interpolación $(E_\mu, L^p(B_{E'}, \mu))$. En efecto: Dado $x \in E$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $f_x = f_y$ y $\| y \| \leq \| f_x \|_\mu + \varepsilon$, con lo cual

$$\| f_x \|_{p\sigma} = \| f_y \|_{p\sigma} \leq \| y \|_E^\sigma \| f_y \|_{L^p}^{1-\sigma} \leq \| y \|_E \leq \| f_x \|_\mu + \varepsilon ,$$

y por tanto, $\| f_x \|_{p\sigma} \leq \| f_x \|_\mu$. Por otra parte, sea $g \in K_{p\sigma}(E)$. Si $\varphi \in \hat{M}_{p\sigma}(E)$ es tal que $g = \hat{I}(\varphi)$, existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_{x_n}$ convergente a φ en $\hat{M}_{p\sigma}(E)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|_E^\sigma \| f_{x_n} \|_{L^p}^{1-\sigma} < \infty$. Como $\hat{I}$ es continua, $g = \hat{I}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{x_n}$ en $L^p(B_{E'}, \mu)$ y

$$\| g \|_{L^p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| f_{x_n} \|_{L^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \| f_{x_n} \|_{L^p}^\sigma \| f_{x_n} \|_{L^p}^{1-\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|_E^\sigma \| f_{x_n} \|_{L^p}^{1-\sigma}$$

y por tanto $\| g \|_{L^p} \leq \| \varphi \|_{p\sigma}$. Tomando infimos sobre φ, se llega a $\| g \|_{L^p} \leq N_c(g)$.

Sea ahora una aplicación continua $T: L^p(B_{E'},\mu) \to L^p(B_{E'},\mu)$ con restricción $T_{|E_\mu}: E_\mu \to E_\mu$ continua con la topología de E_μ. Denotemos por $\| T \|_\mu$ y $\| T \|_{L^p}$ a las normas de $T_{|E_\mu} \in \mathcal{L}(E_\mu, E_\mu)$ y de $T \in \mathcal{L}(L^p(B_{E'},\mu), L^p(B_{E'},\mu))$ y escribamos únicamente L^p en vez de $L^p(B_{E'},\mu)$ puesto que no hay lugar a confusión. Es evidente que $T(M_{p\sigma}(E)) \subset M_{p\sigma}(E)$. Obsérvese que para cada $x \in E$ existe $\bar{x} \in E$ tal que $T(f_x) = f_{\bar{x}}$. Sea $g \in K_{p\sigma}(E)$. Para cada $f \in \hat{M}_{p\sigma}(E)$ tal que $g = \hat{I}(f)$, existe una serie $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_{x_i}$ convergente en $\hat{M}_{p\sigma}(E)$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|_E^\sigma \| f_{x_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} < \infty$. Por continuidad de $\hat{I}$, esta serie converge en L^p y como $T \in \mathcal{L}(L^p, L^p)$

$$T(g) = T(\hat{I}(f)) = T\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_{\bar{x}_i} \tag{2}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $i \in \mathbb{N}$, existe $\bar{y}_i \in E$ tal que, $f_{\bar{x}_i} = f_{\bar{y}_i}$, y $\| \bar{y}_i \|_E \leq \| f_{\bar{x}_i} \|_\mu + \varepsilon$. Por otra parte, teniendo en cuenta las hipótesis sobre T, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} \| \bar{y}_i \|_E^\sigma \| f_{\bar{y}_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} \leq \sum_{i=1}^{n} \| \bar{y}_i \|_E^\sigma \| f_{\bar{x}_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} \leq \| T \|_{L^p}^{1-\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left(\| T \|_\mu \| f_{x_i} \|_E + \varepsilon \right)^\sigma \| f_{x_i} \|_{L^p}^{1-\sigma}$$

y tomando infimos para $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \| \bar{y}_i \|_E^\sigma \| f_{\bar{y}_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} \leq \| T \|_\mu^\sigma \| T \|_{L^p}^{1-\sigma} \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_E^\sigma \| f_{x_i} \|_{L^p}^{1-\sigma}$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \| \bar{y}_i \|_E^{\sigma} \| f_{\bar{y}_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} \leq \| T \|_{\mu}^{\sigma} \| T \|_{L^p}^{1-\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|_E^{\sigma} \| f_{x_i} \|_{L^p}^{1-\sigma} < \infty. \qquad (3)$$

Por la proposición 1.5, $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\bar{y}_i} = \sum_{i=1}^{\infty} f_{\bar{x}_i}$ es convergente en $\hat{M}_{p\sigma}(E)$. Por la continuidad de $\hat{I}$ y (2), resulta que $\hat{I}\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{\bar{x}_i} \right) = T(g)$ pertenece a $K_{p\sigma}(E)$. Entonces, usando (2) de nuevo y (3)

$$N_c(T(g)) \leq \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_{\bar{x}_i} \right\|_{p\sigma} \leq \| T \|_{\mu}^{\sigma} \| T \|_{L^p}^{1-\sigma} \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|_E^{\sigma} \| f_{x_i} \|_{L^p}^{1-\sigma}$$

y tomando ínfimos sobre las representaciones de f y después sobre f , obtenemos $N_c(T(g)) \leq \| T \|_{\mu}^{\sigma} \| T \|_{L^p}^{1-\sigma} N_c(g)$, con lo que la restricción de T a $K_{p\sigma}(E)$ también es continua con la topología de este espacio y $K_{p\sigma}(E)$ es un espacio de interpolación. La demostración para $M_{p\sigma}(E)$ se hace con un desarrollo análogo, trabajando con la definición de norma en $M_{p\sigma}(E)$. ■

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección y contiene la caracterización anunciada de los operadores de $\wp_{p\sigma}$. Necesitamos introducir otra definición. Dado $T \in \mathcal{L}(E,F)$, definimos la aplicación $\overline{T}: \hat{l}^{p\sigma}(E) \to F^{\mathbb{N}}$ del siguiente modo: si $(x_i)_{i=1}^{\infty} \in l^{p\sigma}(E)$ se define $\overline{T}((x_i)) = (T(x_i))_{i=1}^{\infty}$; si $\phi \in \hat{l}^{p\sigma}(E)$ y $\phi = \lim_{n\to\infty} (x_i^n)$ en $\hat{l}^{p\sigma}(E)$ con $(x_i^n)_{i=1}^{\infty} \in l^{p\sigma}(E)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se define $\overline{T}(\phi) = (\lim_{n\to\infty} x_i^n)_{i=1}^{\infty}$. $\overline{T}$ está bien definida porque la convergencia en $\hat{l}^{p\sigma}(E)$ de una sucesión de $l^{p\sigma}(E)$ implica la convergencia en E de cada sucesión de componentes. Se tiene entonces

Teorema 1.7. Sean $E, F \in BAN$ y $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Es equivalente:

1) $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$.

2) $\overline{T}(\hat{l}^{p\sigma}(E)) \subset l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F]$.

3) Existe una medida de Radon μ en $(B_{E'}, \sigma(E', E))$ tal que T factoriza a través de la complección del espacio *normado* de interpolación $M_{p\sigma}(E)$ en la forma $T = BJ_E$.

Demostración. 1)$\Rightarrow$2 Notemos en primer lugar que si $(x_j) \in H_E$ y $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$,

$$\left(\sum_{i=1}^{h} \|Tx_i\|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \Pi_{p\sigma}(T)\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{h}) \leq \Pi_{p\sigma}(T)\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{\infty}), \forall h \in \mathbb{N}$$

por el teorema 4.1 de Matter [7], luego $\pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((\|Tx_i\|)) \leq \Pi_{p\sigma}(T)\delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i=1}^{\infty})$.

Sea ahora $(x_i) \in l^{p\sigma}(E)$ y $\varepsilon > 0$. Existe una representación $(x_i) = \sum_{j=1}^{k} (x_i^j)$ de modo que $(x_i^j) \in H_E^p$ y $\sum_{j=1}^{k} \delta_{p\sigma}((x_i^j)) \leq \varepsilon_{p\sigma}((x_i)) + \varepsilon$. Por la desigualdad de Minkowski

$$\pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((\|T(x_i)\|)) \leq \sum_{j=1}^{k} \pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((\|T(x_i^j)\|)) \leq \Pi_{p\sigma}(T)\sum_{j=1}^{k} \delta_{p\sigma}((x_i^j)_{i=1}^{\infty}) \leq \Pi_{p\sigma}(T)(\varepsilon_{p\sigma}((x_i)) + \varepsilon)$$

y tomando el ínfimo para $\varepsilon > 0$ se tiene que T: $l^{p\sigma}(E) \to l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F]$ está bien definida y es continua con norma $\leq \Pi_{p\sigma}(T)$. Pero entonces, su extensión continua a las complecciones coincide con la aplicación $\overline{T}: \hat{l}^{p\sigma}(E) \to F^{\mathbb{N}}$ ya definida, y por tanto se tiene $\overline{T}(\hat{l}^{p\sigma}(E)) \subset l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F]$.

2)$\Rightarrow$1) Consideremos la sucesión $(\varphi_n, \overline{T}(\varphi_n))_{n=1}^{\infty} \subset \hat{l}^{p\sigma}(E) \times l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F]$ convergente a $(\varphi, (y_i)) \in \hat{l}^{p\sigma}(E) \times l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F]$. Por la proposición 1.4,

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{\infty} (x_i^{nj}),\ (x_i^{nj}) \in H_E^p,\ \varphi = \sum_{j=1}^{\infty} (x_i^j),\ (x_i^j) \in H_E^p .$$

Veamos que $\overline{T}(\varphi) = (y_i)$, es decir, $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} T(x_i^j)$ si $i \in \mathbb{N}$. Sea $\hat{J}: \hat{l}^{p\sigma}(E) \to l^{\frac{p}{1-\sigma}}(E)$ la extensión continua de la inclusión $l^{p\sigma}(E) \subset l^{\frac{p}{1-\sigma}}(E)$ (proposición 1.3). Como φ_n tiende a φ en $\hat{l}^{p\sigma}(E)$, también lo hace en $l^{\frac{p}{1-\sigma}}(E)$, luego para cada $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i^{nj} = \sum_{j=1}^{\infty} x_i^j$. Como T es continua se tiene

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \left\| \sum_{j=1}^{\infty} T(x_i^{nj} - x_i^j) \right\|_F \leq \| T \| \left\| \sum_{j=1}^{\infty} (x_i^{nj} - x_i^j) \right\|_E$$

y por tanto, para cada $i \in \mathbb{N}$, $y_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} T(x_i^{nj}) = \sum_{j=1}^{\infty} T(x_i^j)$. La gráfica es cerrada, con lo que $\overline{T}$ es continua. Consideremos ahora una sucesión finita $(x_i)_{i=1}^m \subset E$. Entonces $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots) \in H_E^p$, y por la continuidad de $\overline{T}$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \| T(x_i) \|^{\frac{p}{1-\sigma}} \right)^{\frac{1-\sigma}{p}} \leq \left\| \overline{T} \right\| \varepsilon_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^m) \leq \left\| \overline{T} \right\| \delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^m).$$

Por el teorema 4.1 de Matter [7], $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$.

1)$\Rightarrow$3) $J_E: E \to M_{p\sigma}(E)$ es continua por la proposición 1.6. Definimos $B: M_{p\sigma}(E) \to F$ por $B(f_x) = T(x)$ para $x \in E$. B está bien definida ya que si $f_x = f_y$, $x, y \in E$, al ser $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$ se tiene

$$\| T(x-y) \| \le \Pi_{p\sigma}(T) \| x-y \|_E^{\sigma} \| f_{x-y} \|_{L^p(B_{E'})}^{1-\sigma} = 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, si $f_x = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}$, $x, x_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_E^{\sigma} \| f_{x_i} \|_{L^p(B_{E'})}^{1-\sigma} \le \| f_x \|_{p\sigma} + \varepsilon ,$$

se tiene que

$$\| B(f_x) \| = \left\| B\left(\sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \right) \right\| = \| B(f_{x_1 + .. + x_n}) \| \le \sum_{i=1}^{n} \| Tx_i \| \le$$

$$\le \Pi_{p\sigma}(T) \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|_E^{\sigma} \| f_{x_i} \|_{L^p(B_{E'})}^{1-\sigma} \le \| f_x \|_{p\sigma} + \varepsilon$$

por ser $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$ y tomando ínfimos para $\varepsilon > 0$, $\| B(f_x) \| \le \Pi_{p\sigma}(T) \| f_x \|_{p\sigma}$ con lo cual B es continua. Extendiéndola por continuidad a la complección $\hat{M}_{p\sigma}(E)$ y denotando la extensión por el mismo símbolo, se verifica $T = BJ_E$.

3) $\Rightarrow$1) Si T factoriza a través de $\hat{M}_{p\sigma}(E)$ mediante $T = BJ_E$ y $x \in E$, se tiene

$$\| Tx \| \le \| B \| \, \| f_x \|_{p\sigma} \le \| B \| \, \| x \|_E^{\sigma} \| f_x \|_{L^p}^{1-\sigma}$$

luego $T \in \wp_{p\sigma}(E,F)$ por el teorema 4.1 de Matter [7]. ■

En [7], Matter da ejemplos de operadores (p,σ)-absolutamente continuos que no son p-absolutamente sumantes. Sin embargo es relativamente sencillo dar ejemplos explícitos mucho más fáciles de esta situación, y éste es nuestro próximo objetivo. Para ello comenzamos con el siguiente resultado:

Proposición 1.8. Sean $E,F \in BAN$, $T \in \mathcal{L}(E, l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F])$, $P_i : l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F] \to F$ la proyección sobre el eje i-ésimo y $A_i = P_i T$, $i \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Si $A_i \in \wp_{p\sigma}(E,F)$, $i \in \mathbb{N}$, y $(\Pi_{p\sigma}(A_i))_{i=1}^{\infty} \in l^{\frac{p}{1-\sigma}}$, entonces $T \in \wp_{p\sigma}(E, l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F])$.

Demostración. De 1) $\Rightarrow$2) del teorema 1.7 se deduce que para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^{p\sigma}(E)$ se verifica

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \| A(x_n) \|^{\frac{p}{1-\sigma}} \;\middle|\; T \in \wp_{p\sigma}(E,F), \Pi_{p\sigma}(A) \le 1\right\} \le \varepsilon_{p\sigma}((x_n))^{\frac{p}{1-\sigma}} \qquad (4).$$

Sea ahora $k \in \mathbb{N}$ y $(x_n)_{n=1}^{k} \subset E$. Entonces $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \in H_E^p$ y por (4)

$$\left(\pi_{\frac{p}{1-\sigma}}((T(x_n))_{n=1}^{k}\right)^{\frac{p}{1-\sigma}} = \sum_{n=1}^{k} \sum_{i=1}^{\infty} \| A_i(x_n) \|^{\frac{p}{1-\sigma}} = \sum_{i=1}^{\infty} (\Pi_{p\sigma}(A_i))^{\frac{p}{1-\sigma}} \sum_{n=1}^{k} \frac{\| A_i(x_n) \|^{\frac{p}{1-\sigma}}}{(\pi_{p\sigma}(A_i))^{\frac{p}{1-\sigma}}} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\Pi_{p\sigma}(A_i))^{\frac{p}{1-\sigma}}\right) \sup\left\{\sum_{n=1}^{k} \| B(x_n) \|^{\frac{p}{1-\sigma}} \;\middle|\; B \in \wp_{p\sigma}(E,F), \Pi_{p\sigma}(B) \le 1\right\}$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\Pi_{p\sigma}(A_i))^{\frac{p}{1-\sigma}}\right) \varepsilon_{p\sigma}((x_n)_{n=1}^{k})^{\frac{p}{1-\sigma}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\Pi_{p\sigma}(A_i))^{\frac{p}{1-\sigma}}\right) \delta_{p\sigma}((x_n)_{n=1}^{k})^{\frac{p}{1-\sigma}}.$$

Por el teorema 4.1 de Matter en [7] obtenemos que $T \in \wp_{p\sigma}(E, l^{\frac{p}{1-\sigma}}[F])$.
■

Ejemplo 1.9. Sean p y σ tales que $p > 1$, $0 < \sigma < 1$ y $p' \le \dfrac{p}{1-\sigma}$. Sea $(e^i)_{i=1}^{\infty}$ la base canónica de $l^{p'}$. Se define el operador T: $l^{p'} \to l^{\frac{p}{1-\sigma}}$, tal que

$T(e^i)=\left(\frac{1}{i}\right)^{1/p} e^i$ para cada $i\in\mathbb{N}$. T está bien definido por la condición $p'\leq\frac{p}{1-\sigma}$. Veamos que $T\in\wp_{p\sigma}(l^{p'},l^{\frac{p}{1-\sigma}})$ pero $T\notin\wp_p(l^{p'},l^{\frac{p}{1-\sigma}})$.

En efecto: Sea $\alpha_n^i=P_n(T(e^i))$, $i,n\in\mathbb{N}$. Como

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_i^n|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{p}{(\frac{p}{1-\sigma})}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}$$

es divergente, por el ejemplo 9 de la proposición 6.18 de De Grande-De Kimpe en [3], se tiene que $T\notin\wp_p(l^{p'},l^{\frac{p}{1-\sigma}})$. Comprobemos ahora las condiciones de la proposición 1.8 con $F=\mathbb{K}$. Sea $s^n=(s_i^n)_{i=1}^{\infty}\in l^{p'}$, $n=1,2,..,k$ con $k\in\mathbb{N}$. Se cumple

$$\left(\sum_{n=1}^{k}|A_i(s^n)|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}=\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{k}|s_i^n|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}=\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{k}|<s^n,e^i>|^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}\leq$$

$$\leq\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{a\in B_{l^{q'}}}\left(\sum_{n=1}^{k}(|<s^n,a>|^{1-\sigma}\|s^n\|^{\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

Por el teorema 4.1 de Matter en [7], se tiene que $A_i\in\wp_{p\sigma}(l^{p'},\mathbb{K})$ y $\Pi_{p\sigma}(A_i)\leq\left(\frac{1}{i}\right)^{1/p}$ para cada $i\in\mathbb{N}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\Pi_{p\sigma}(A_i))^{\frac{p}{1-\sigma}}\leq\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{1-\sigma}}=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}<\infty.$$

y por la proposición 1.8, $T\in\wp_{p\sigma}(l^{p'},l^{\frac{p}{1-\sigma}})$. ■

En relación con este ejemplo, es interesante observar que en cambio $\wp_{1\sigma}(l^1,l^2) = \wp_1(l^1,l^2) = \mathcal{L}(l^1,l^2)$ por la célebre desigualdad de Grothendieck. y que $\wp_2(l^\infty,E) = \wp_{2\sigma}(l^\infty,E) = \mathcal{L}(l^\infty,E)$ si E es un espacio de cotipo 2 (por ejemplo, todo $L^p(\mu)$ con $1 \le p \le 2$ y una medida μ cualquiera) como consecuencia de un resultado de Maurey en [8].

2. Los operadores (p,σ,q,ν)-dominados.

El ideal $\mathcal{D}_{pq}$ de los operadores (p,q)-dominados de Pietsch [11] (con $1/p + 1/q \le 1$) es un ideal especialmente importante formado por operadores p-absolutamente sumantes. El camino natural para generalizarlo substituyendo $\wp_p$ por $\wp_{p\sigma}$ viene sugerido por la siguiente sencilla proposición:

Proposición 2.1. Sean $E,F \in BAN$ y $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Es equivalente:

1) $T \in \mathcal{D}_{pq}(E,F)$.

2) Existen G y H en BAN, operadores $S_1 \in \wp_p(E,G)$ y $S_2 \in \wp_q(F',H)$ y $C > 0$ tales que:

$$\forall x \in E,\ \forall b \in F' \quad |<Tx,b>| \le C \| S_1(x) \| \| S_2(b) \|$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Sea $G = \hat{M}_{p0}(E)$, $H = \hat{M}_{q0}(F')$, $S_1 = J_E$ y $S_2 = J_{F'}$. G y H son entonces subespacios de $L^p(B_{E'})$ y $L^q(B_{F''})$ respectivamente. Es inmediato comprobar que $S_1 \in \wp_p$, $S_2 \in \wp_q$ por el teorema de Grothendieck-Pietsch de caracterización de los operadores de $\wp_r$. El resto de la tesis se deduce del teorema 17.4.2 de [11] de caracterización de los operadores (p,q)-dominados.

2) $\Rightarrow$ 1) Basta utilizar los mismos teoremas antes citados. ■

Sea $1 \le p,q < \infty$ y $0 \le \sigma,\nu < 1$ tales que

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{p}{1-\sigma}} + \frac{1}{\frac{q}{1-\nu}} = 1 \tag{5}$$

con $1 \leq r < \infty$ .Introducimos entonces la definición siguiente:

Definición 2.2. Sean $E, F \in NOR$. Diremos que un operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es (p,σ,q,ν)-dominado y escribiremos $T \in \mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$ si existen $G, H \in BAN$, operadores $S_1 \in \wp_p(E,G)$, y $S_2 \in \wp_q(F',H)$ y $C>0$ de modo que

$$|<Tx,b>| \leq C\| x \|^{\sigma} \| S_1(x) \|^{1-\sigma} \| b \|^{\nu} \| S_2(b) \|^{1-\nu} \ \forall x \in E, \forall b \in F'. \qquad (6)$$

Definimos

$$D_{p\sigma q\nu}(T) = \inf \left\{ C\Pi_p(S_1)^{(1-\sigma)} \Pi_q(S_2)^{(1-\nu)} \right\}$$

tomando el ínfimo sobre el conjuno de constantes C y de operadores S_1 y S_2 que cumplen (6).

Proposición 2.3. Sean $E, F \in NOR$. Entonces $D_{p\sigma q\nu}$ es una norma en $\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$.

Demostración. Como $\| S \| \leq \Pi_h(S)$ para cada $S \in \wp_h$, la única cuestión no trivial es la desigualdad triangular. Sea $i=1,2$ y $T_i \in \mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$. Para cada $\varepsilon > 0$, existen $C_i > 0$, $G_i, H_i \in BAN$, $A_i \in \wp_p(E,G_i)$ y $B_i \in \wp_q(F',H_i)$, tales que

$$|<T_i(x),b>| \leq C_i \| x \|^{\sigma} \| A_i(x) \|^{1-\sigma} \| b \|^{\nu} \| B_i(b) \|^{1-\nu} \quad \forall x \in E, \forall b \in F' \qquad (7)$$

y

$$C_i \Pi_p(A_i)^{(1-\sigma)} \Pi_q(B_i)^{(1-\nu)} \leq D_{p\sigma q\nu}(T_i) + \varepsilon \ . \qquad (8)$$

Como para $x \in E$ y $b \in F'$ se verifica

$$|<T_i(x),b>| \leq C_i \| x \|^{\sigma} \|A_i(x)\|^{1-\sigma} \| b \|^{\nu} \| B_i(b)\|^{1-\nu} = \overline{C}_i \| x \|^{\sigma} \| \overline{A}_i(x) \|^{1-\sigma} \| b \|^{\nu} \| \overline{B}_i(b) \|^{1-\nu}$$

siendo

$$\overline{C}_i = C_i^{\frac{1}{r}} \Pi_p(A_i)^{\frac{(1-\sigma)}{r}} \Pi_q(B_i)^{\frac{(1-\nu)}{r}} \qquad \overline{A}_i = C_i^{\frac{1}{p}} \Pi_p(A_i)^{\frac{(1-\sigma)}{p}} \Pi_q(B_i)^{\frac{(1-\nu)}{p}} \frac{A_i}{\Pi_p(A_i)}$$

$$\overline{B}_i = C_i^{\frac{1}{q}} \Pi_p(A_i)^{\frac{(1-\sigma)}{q}} \Pi_q(B_i)^{\frac{(1-\nu)}{q}} \frac{B_i}{\Pi_q(B_i)},$$

se puede suponer en (7) y (8) que

$$C_i < (D_{p\sigma q\nu}(T_i)+\varepsilon)^{1/r}$$

$$\Pi_p(A_i) \leq (D_{p\sigma q\nu})(T_i)+\varepsilon)^{1/p} \text{ y } \Pi_q(B_i) \leq (D_{p\sigma q\nu}(T_i)+\varepsilon)^{1/q}. \qquad (9)$$

Sea G el espacio de Banach obtenido como suma directa en sentido l^p de G_1 y G_2 y H la suma directa en sentido l^q de H_1 y H_2. Sea $A: E \to G$ tal que $A(x) = (A_i(x))_{i=1}^2$ para $x \in E$ y $B: F \to H$ tal que $B(b) = (B_i(b))_{i=1}^2$ si $b \in F$. Para cada sucesión $(x_j)_{j=1}^n \subset E$, se verifica que

$$\pi_p((A(x_j)) = \left(\sum_{j=1}^n \| A(x_j) \|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^2 \| A_i(x_j) \|^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^2 \Pi_p(A_i)^p \varepsilon_p((x_j))^p \right)^{1/p} = \varepsilon_p((x_j)) \left(\sum_{i=1}^2 \Pi_p(A_i)^p \right)^{1/p}$$

y por tanto, usando (9)

$$\Pi_p(A) \leq \left(\sum_{i=1}^2 \Pi_p(A_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(D_{p\sigma q\nu}(T_1) + D_{p\sigma q\nu}(T_2) + 2\varepsilon \right)^{1/p}. \qquad (10)$$

Análogamente se obtendría

$$\Pi_q(B) \leq \left(D_{p\sigma q\nu}(T_1) + D_{p\sigma q\nu}(T_2) + 2\varepsilon \right)^{1/q}. \qquad (11)$$

Entonces, por la desigualdad de Hölder con exponentes deducidos de (5) se obtiene

$$|<(T_1+T_2)(x),b>|\leq\sum_{i=1}^{2}C_i\|x\|^{\sigma}\|A_i(x)\|^{1-\sigma}\|b\|^{\nu}\|B_i(b)\|^{1-\nu}\leq$$

$$=\|x\|^{\sigma}\|b\|^{\nu}\left(\sum_{i=1}^{2}C_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{2}\|A_i(x)\|^p\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}\left(\sum_{i=1}^{2}\|B_i(x)\|^q\right)^{\frac{1-\nu}{q}}=$$

$$=\|x\|^{\sigma}\|b\|^{\nu}\left(\sum_{i=1}^{2}C_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\|A(x)\|^{1-\sigma}\|B(b)\|^{1-\nu}.$$

Por tanto, teniendo en cuenta (9), (10) y (11)

$$D_{p\sigma q\nu}(T_1+T_2)\leq\left(\sum_{i=1}^{2}C_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\Pi_p(A)^{1-\sigma}\Pi_q(B)^{1-\nu}\leq$$

$$\leq\left(D_{p\sigma q\nu}(T_1)+D_{p\sigma q\nu}(T_2)+2\varepsilon\right)^{\frac{1}{r}+\frac{1-\sigma}{p}+\frac{1-\nu}{q}}$$

y como $\varepsilon>0$ es arbitrario, se llega a $D_{p\sigma q\nu}(T_1+T_2)\leq D_{p\sigma q\nu}(T_1)+D_{p\sigma q\nu}(T_2)$ y $(\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F),D_{p\sigma q\nu})$ es un espacio vectorial normado. ■

A continuación presentamos varias caracterizaciones de los operadores de $\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$ en la clase *BAN*, de las que se deducirá que la clase $\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}$ es un ideal en el que se cumple un teorema de factorización análogo al clásico de Kwapien referente a los operadores (p,q)-dominados. Obsérvese que $\mathcal{D}_{p0q0}=\mathcal{D}_{pq}$.

Teorema 2.4. Sean $E,F\in BAN$ y $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Es equivalente

1) T es (p,σ,q,ν)-dominado.

2) Existe $C>0$, y existen probabilidades regulares μ y τ en $B_{E'}$ y $B_{F''}$ tales que para todo $x\in E$ y todo $b\in F'$, se verifica:

$$|<T(x),b>| \leq C\left(\int_{B_{E'}} (|<x,a>|^{1-\sigma} \| x \|^{\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(a)\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

$$\left(\int_{B_{F''}} (|<b,y>|^{1-\nu} \| b \|^{\nu})^{\frac{q}{1-\nu}} d\tau(y)\right)^{\frac{1-\nu}{q}}$$

3) Existe $C>0$ tal que para todo par de sucesiones finitas $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ y $(b_i)_{i=1}^n \subset F'$, $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$\pi_{r'}((<T(x_i),b_i>)_{i=1}^n \leq C\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^n)\delta_{q\nu}((b_i)_{i=1}^n)$$

4) Teorema de factorización: Existen $G \in BAN$ y operadores $A \in \wp_{p\sigma}(E,G)$, y $B \in \mathcal{L}(G,F)$ tales que $B' \in \wp_{q\nu}(F',G')$ y $T = BA$.

Además, $D_{p\sigma q\nu}(T) = \inf C = \inf \Pi_{p\sigma}(A)\Pi_{q\nu}(B')$ tomando los ínfimos sobre las constantes C de 2) y 3) sobre los operadores de 4).

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$. Es inmediato a partir de la definición y del teorema de Grothendieck-Pietsch sobre $\wp_r$.

$2) \Rightarrow 1)$ Es análoga a la demostración de $1) \Rightarrow 2)$ de la proposición 2.1.

$2) \Rightarrow 3)$ Sea $(x_i)_{i=1}^n \subset E$ y $(b_i)_{i=1}^n \subset F', n \in \mathbb{N}$. Por ii), y por la desigualdad de Hölder (con los exponentes deducidos de (5)), se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^n |<T(x_i),b_i>|^{r'}\right)^{1/r'} \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{i=1}^n \left(\int_{B_{E'}} (|<x_i,a>|^{1-\sigma} \| x_i \|^{\sigma})^{\frac{p}{1-\sigma}} d\mu(a)\right)\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{B_{F''}}\left(|<b_i,y>|^{1-\nu}\|b_i\|^{\nu}\right)^{\frac{q}{1-\nu}}d\tau(y)\right)\right)^{\frac{1-\nu}{q}}\leq$$

$$\leq C\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{n})\,\delta_{q\nu}((y)_{i=1}^{n})$$

3)$\Rightarrow$ 2) Consideremos los espacios de Banach $C(B_{E'})$ y $C(B_{F''})$ de las funciones escalares continuas en $B_{E'}$ y $B_{F''}$ y los conjuntos $W(B_{E'})$ y $W(B_{F''})$ de todas las probabilidades regulares definidas en los mismos. El conjunto $W(B_{E'})\times W(B_{F''})$ es convexo y compacto en $(C(B_{E'})\times C(B_{F''}))'$ dotado de la topología $\sigma((C(B_{E'})\times C(B_{F''}))', C(B_{E'})\times C(B_{F''}))$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada par de sucesiones finitas $(x_i)_{i=1}^{n}\subset E$ y $(b_i)_{i=1}^{n}\subset F'$, se define la función $\phi: W(B_{E'})\times W(B_{F''})\rightarrow\mathbb{R}$ tal que

$$\phi(\mu,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{r'}|<Tx_i,b_i>|^{r'}-\frac{C^{r'}}{\frac{p}{1-\sigma}}\|x_i\|^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}}<|f_{x_i}|^{p},\mu>-\frac{C^{r'}}{\frac{q}{1-\nu}}\|b_i\|^{\frac{\nu q}{1-\nu}}<|f_{b_i}|^{q},\tau>\right)$$

que es continua y convexa en $W(B_{E'})\times W(B_{F''})$. Por la compacidad de $B_{E'}$ y $B_{F''}$, existen $a_o\in B_{E'}$ y $b_o\in B_{F''}$ tales que, si $\xi=\delta_{p\sigma}((x_i)_{i=1}^{n})$ y $\beta=\delta_{q\nu}((b_i)_{i=1}^{n})$, se verifica

$$\xi=\left(\sum_{i=1}^{n}|<x_i,a_o>|^{p}\|x_i\|^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}}\right)^{\frac{1-\sigma}{p}}\quad\text{y}\quad\beta=\left(\sum_{i=1}^{n}|<b_i,y_o>|^{q}\|b_i\|^{\frac{\nu q}{1-\nu}}\right)^{\frac{1-\nu}{q}}.$$

Tomando las medidas de Dirac en a_o y en y_o, y usando la conocida desigualdad $uv\leq\zeta u^{1/\zeta}+(1-\zeta)v^{1/(1-\zeta)}$ para $0<\zeta<1$ y $u\geq 0, v\geq 0$, tenemos

$$\phi(\delta(a_o),\delta(y_o))=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r'}|<Tx_i,b_i>|^{r'}\right)-C^{r'}\left(\frac{1-\sigma}{p}\xi^{\frac{p}{1-\sigma}}+\frac{1-\nu}{q}\beta^{\frac{q}{1-\nu}}\right)\leq$$

$$\leq\frac{1}{r'}\sum_{i=1}^{n}|<Tx_i,b_i>|^{r'}-\frac{C^{r'}}{r'}(\xi\beta)^{r'}\leq 0,$$

por hipótesis.La familia de funciones $\mathcal{F}=\{\phi\,|\,(x_i)_{i=1}^n\subset E,(b_i)_{i=1}^n\subset F',n\in\mathbb{N}\}$ así construida es cóncava, es decir, dadas $(\phi_i)_{i=1}^k\subset\mathcal{F}$ y $\alpha_i\geq 0, i=1,2,\dots,k,$

tales que $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=1$, existe $\phi\in\mathcal{F}$ tal que $\phi(\mu,\tau)\geq\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\phi_i(\mu,\tau)$ para todo (μ,τ) en $W(B_E)\times(B_{F''})$. Por el lema de Ky Fan (ver [11, E.4.2]), existe $(\mu_o,\tau_o)\in W(B_{E'})\times(B_{F''})$ tal que para todo $\phi\in\mathcal{F}$, $\phi(\mu,\tau)\leq 0$. Construyendo el particular las funciones asociadas a dos elementos $x\in E,\ b\in F'$, obtenemos

$$\frac{1}{r'}|<T(x),b>|^{r'}-\frac{C^{r'}}{\frac{p}{1-\sigma}}\|x\|^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}}<|f_x|^p,\mu>-\frac{C^{r'}}{\frac{q}{1-\nu}}\|b\|^{\frac{\nu q}{1-\nu}}<|f_b|^q,\tau>\leq 0.$$

Definamos ahora $M=<|f_x|^p,\mu_o>^{\frac{p}{1-\sigma}}\|x\|^{\sigma}$ y $N=<|f_b|^q,\tau_o>^{\frac{q}{1-\nu}}\|b\|^{\nu}$. Se verifica

$$\frac{1}{r'}|<T(x),b>|^{r'}=\frac{1}{r'}M^{r'}N^{r'}|<T(M^{-1}x),(N^{-1}b)>|^{r'}\leq$$

$$\leq M^{r'}N^{r'}\left(\frac{1-\sigma}{p}\|M^{-1}x\|^{\frac{\sigma p}{1-\sigma}}<\left|\frac{1}{M}f_x\right|^p,\mu_o>+\frac{1-\nu}{q}\|N^{-1}b\|^{\frac{\nu q}{1-\nu}}<\left|\frac{1}{N}f_b\right|^q,\tau_o>\right)=$$

$$=M^{r'}N^{r'}C^{r'}\left(\frac{1-\sigma}{p}+\frac{1-\nu}{q}\right)$$

De estas desigualdades obtenemos que

$$|< T(x), b >| \leq MNC \left(\frac{r'(1-\sigma)}{p} + \frac{r'(1-\nu)}{q} \right)^{1/r'} = MNC ,$$

lo que concluye la prueba.

4) $\Rightarrow$ 2) Como $|< Tx, b >| = |< Ax, B' b >|$, basta usar el teorema 4.1 de Matter [7].

2) $\Rightarrow$ 4) Consideremos $G = \hat{M}_{p\sigma}(E)$ y la factorización $T = BJ_E$ del teorema 1.7, 3). Se tiene que J_E pertenece a $\wp_{p\sigma}(E, \hat{M}_{p\sigma}(E))$ por la definición de la norma de $M_{p\sigma}(E)$ y por el teorema 4.1 de Matter [7]. Veamos que $B' \in \wp_{q\nu}(F', E')$. Para cada $\varepsilon > 0$ y $b \in F'$ se tiene

$$\| B' b \| = \sup_{f_x \in B_{M_{p\sigma}}} |< B'(b), f_x >| = \sup_{f_x \in B_{M_{p\sigma}}} |< T(x), b >| \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \left| < \sum_{i=1}^{n} T(x_i), b > \right| \ \middle| \ x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^{\sigma} \| f_{x_i} \|_{L^p(B_{E'})}^{1-\sigma} < 1 + \varepsilon, n \in \mathbb{N} \right\} \leq$$

$$\leq (1+\varepsilon) C \| b \|^{\nu} \| f_b \|_{L^q(B_{F''})}^{1-\nu}$$

por la condición 2). Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario se llega a que $B' \in \wp_{q\nu}(F', G')$.

Finalmente, que $D_{p\sigma q\nu}(T) = \inf \{ C |$ se cumple 2)$\}$ es inmediato a partir del teorema de Pietsch Grothendieck sobre los operadores de $\wp_r, r \geq 1$; que $D_{p\sigma q\nu}(T) = \inf \{ C |$ se cumple 3)$\}$ es inmediato a partir de la propia demostración de que 2) $\Leftrightarrow$ 3) y de la anterior igualdad; la última parte es consecuencia de la demostración 2) $\Rightarrow$ 4), de la definición de $D_{p\sigma q\nu}(T)$ a través de 2) y del teorema 4.1 de Matter en [7] y de la definición de la norma en $\wp_{p\sigma}$ en él contenida. ■

Corolario 2.5 Si $E,F\in BAN,(\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F),D_{p\sigma q\nu})$ es de Banach y $(\mathcal{D}_{p\sigma q\nu},D_{p\sigma q\nu})$ es un ideal normado en *BAN*.

Demostración. Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F),D_{p\sigma q\nu})$. De la definición de $D_{p\sigma q\nu}$, se deduce que también lo es en $\mathcal{L}(E,F)$ y por tanto converge a $T\in\mathcal{L}(E,F)$. Por 2) del teorema 2.4, dado $\varepsilon>0$, existe $n_o\in\mathbb{N}$ tal que, para cada $n,m\in\mathbb{N}$, $n,m\geq n_o$, existen probabilidades $\mu_{nm}\in W(B_{E'})$ y $\tau_{nm}\in W(B_{F''})$ tales que, para cada $x\in E$ y $b\in F'$

$$|<(T_n-T_m)(x),b>|\leq\varepsilon\|x\|^{\sigma}\|b\|^{\nu}<|f_x|^p,\mu_{nm}>^{1-\sigma}<|f_b|^q,\tau_{nm}>^{1-\nu}.$$

Fijado $n\geq n_o$, por la compacidad débil de $W(B_{E'})$ y $W(B_{F''})$, existe una subred $(\mu_{nm(a)},\tau_{nm(a)})_{a\in A}$ convergente a $(\mu_n,\tau_n)\in W(B_{E'})\times W(B_{F''})$ en la topología $\sigma((C(B_{E'})\times C(B_{F''}))',\ C(B_{E'})\times C(B_{F''}))$. Entonces, existe $a_o\in A$ tal que para cada $x\in E, b\in F'$ y $a\in A$ con $a\geq a_o$ se tiene

$$|<(T_n-T_{m(a)})(x),b>|\leq$$

$$\leq\varepsilon\|x\|^{\sigma}\|b\|^{\nu}\left(<|f_x|^p,\mu_{nm(a)}-\mu_n>+<|f_x|^p,\mu_n>\right)^{1-\sigma}\left(<|f_b|^q,\tau_{nm(a)}-\tau_n>+<|f_b|^q,\tau_n>\right)^{1-\nu}$$

y tomando límites cuando $a\in A$

$$|<(T_n-T)(x),b>|\leq\varepsilon\|x\|^{\sigma}\|b\|^{\nu}<|f_x|^p,\mu_n>^{1-\sigma}<|f_b|^q,\tau_n>^{1-\nu}\ \forall x\in E,b\in F'$$

con lo cual $T_n-T\in\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$ y por tanto $T\in\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$. De la última desigualdad se deduce que $D_{p\sigma q\nu}(T_n-T)\leq\varepsilon$ si $n\geq n_o$ y $\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}(E,F)$ es de Banach. Que $\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}$ es un ideal en *BAN*, se deduce fácilmente del teorema 2.4,4). ■

Nuestro próximo objetivo es probar que $\mathcal{D}_{p\sigma q\nu}$ es un ideal maximal. Para ello el método que usaremos consistirá en hallar la tensor norma asociada con él porque, además, esto nos permitirá describir explícitamente una nueva familia de tensor normas que contendrá a las clásicas de Lapresté [5] como caso particular.

Definición 2.6. Sean $E,F \in BAN$. Para cada par de números $p,q \in [1,\infty]$ y cada par $\sigma,\nu \in [0,1[$, tomamos $r \in [1,\infty]$ tal que

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\frac{p'}{1-\sigma}}+\frac{1}{\frac{q'}{1-\nu}}=1. \tag{12}$$

Entonces, para cada $z=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\, x_i \otimes y_i . \in E\otimes F$, definimos

$$\alpha_{p\sigma q\nu}(z)=\inf \pi_r((\lambda_i)_{i=1}^n)\,\delta_{q'\nu}((x_i)_{i=1}^n)\,\delta_{p'\sigma}((y_i)_{i=1}^n)$$

tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de z de la forma citada.

Proposición 2.7. $\alpha_{p\sigma q\nu}$ es una tensor norma finitamente generada en *NOR*.

Demostración. 1) Sean $E,F \in NOR$. Para ver que $\alpha_{p\sigma q\nu}$ es una seminorma en $E\otimes F$ basta comprobar la desigualdad triangular. Sea $z^j \in E\otimes F$, $j=1,2$. Existen representaciones $z^j=\sum_{i=1}^{n_j}\lambda_i^j\, x_i^j \otimes y_i^j$, $j=1,2$ de modo que

$$\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon \geq \pi_r((\lambda_i^j))\,\delta_{q'\nu}((x_i^j))\,\delta_{p'\sigma}((y_i^j)) \quad j=1,2.$$

Definamos $(j=1,2,\ i=1,2,\dots,n_j)$

$$\bar{\lambda}_i^{jo}=\frac{(\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}}{\pi_r((\lambda_i^j))}\lambda_i^j, \qquad x_i^{jo}=\frac{(\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)^{\frac{1-\nu}{q'}}}{\delta_{q'\nu}((x_i^j))}x_i^j,$$

$$y_i^{jo}=\frac{(\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)^{\frac{1-\sigma}{p'}}}{\varepsilon_{q'\nu}((z_i^j))}y_i^j \qquad \lambda_i^{jo}=\frac{\pi_r((z_i^j))\delta_{p'\sigma}((z_i^j))\delta_{q'\nu}((z_i^j))}{(\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)}\bar{\lambda}_i^{jo}.$$

Entonces se tiene una nueva representación $z^j = z^{jo} = \sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^{jo} x_i^{jo} \otimes y_i^{jo}$ tal que

$$\delta_{q'\nu}((x_i^{jo})) = (\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)^{\frac{1-\nu}{q'}}, \delta_{p'\sigma}((y_i^{jo})) = (\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)^{\frac{1-\sigma}{p'}},$$

$$\pi_r((\lambda_i^{jo})) \leq (\alpha_{p\sigma q\nu}(z^j)+\varepsilon)^{\frac{1}{r}}. \qquad (13)$$

Usando la representación $z^1 + z^2 = z^{1o} + z^{2o}$ y (6) se tiene

$$\alpha_{p\sigma q\nu}(z^1+z^2) \leq \left(\alpha_{p\sigma q\nu}(z^1)+\alpha_{p\sigma q\nu}(z^2)+2\varepsilon\right)^{\frac{1}{r}+\frac{1-\nu}{q'}+\frac{1-\sigma}{p'}}$$

y por (12) y la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, tenemos el resultado deseado.

2) Sea $z = 1\otimes 1 \in \mathbb{K}\otimes \mathbb{K}$. Si $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \otimes \beta_i, \lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, 2, ..., n$, debe ser

$$1 = \langle z, 1\otimes 1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \beta_i . \qquad (14)$$

Es fácil ver que $\delta_{q'\nu}((\alpha_i)) = \pi_{\frac{q'}{1-\nu}}((\alpha_i))$ y $\delta_{p'\sigma}((\beta_i)) = \pi_{\frac{p'}{1-\sigma}}((\beta_i))$. De (12) y (14) se deduce entonces (desigualdad de Hölder) que

$$1 \leq \pi_r((\lambda_i))\delta_{q'\nu}((\alpha_i))\delta_{p'\sigma}((\beta_i)) \qquad (15)$$

y como el miembro derecho de (15) da exactamente el valor 1 para la representación $z = 1\otimes 1$, se tiene $\alpha_{p\sigma q\nu}(1\otimes 1) = 1$.

3) Propiedad métrica de las aplicaciones: Sea $T_1 \in \mathcal{L}(E_1, F_1)$, $T_2 \in \mathcal{L}(E_2, F_2)$ y $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \in E_1 \otimes E_2$. Se tiene (supuesto $T_1 \neq 0$ y $T_2 \neq 0$)

$$\delta_{q'\nu}((T_1(x_i))) \leq \left\| T_1 \right\|^{1-\nu} \sup_{b_1 \in B_{F_1'}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left| < x_i, \frac{T_1'(b_1)}{\left\| T_1 \right\|} > \right|^{1-\nu} \left\| T_1 \right\|^{\nu} \left\| x_i \right\|^{\nu} \right)^{\frac{q'}{1-\nu}} \right)^{\frac{1-\nu}{q'}} \leq$$

$$\leq \left\| T_1 \right\| \delta_{q'\nu}((x_i))$$

y análogamente, $\delta_{p'\sigma}((T_2(y_i))) \leq \left\| T_2 \right\| \delta_{p'\sigma}((y_i))$. Por tanto

$$\alpha_{p\sigma q\nu}((T_1 \otimes T_2)(z)) \leq \left\| T_1 \right\| \left\| T_2 \right\| \pi_r((\lambda_i)) \delta_{q'\nu}((x_i)) \delta_{p'\sigma}((y_i))$$

y tomando ínfimos sobre las representaciones de z

$$\alpha_{p\sigma q\nu}((T_1 \otimes T_2)(z)) \leq \left\| T_1 \right\| \left\| T_2 \right\| \alpha_{p\sigma q\nu}(z).$$

Por el criterio 12.2 de [2], $\alpha_{p\sigma q\nu}$ es una tensor norma en la clase *NOR*, finitamente generada por construcción. ■

Finalmente se tiene el resultado ya anunciado:

Teorema 2.8. a) Si $E, F \in BAN$, se verifica $(E \otimes_{\alpha_{p\sigma q\nu}} F)' = \mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}(E, F')$ isométricamente.

b) $\mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}$ es un ideal maximal cuya tensor norma asociada es la tensor norma dual $\alpha'_{p\sigma q\nu}$.

Demostración. a) Sea $T \in \mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}(E, F') \subset \mathcal{L}(E, F'), T = BA$ su factorización deducida del teorema 2.4,4) y ϕ_T la forma lineal sobre $E \otimes_{\alpha_{p\sigma q\nu}} F$ asociada. Si $z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i \in E \otimes F$, por el teorema 4.1 de Matter [7] se tiene

$$\left| < \phi_T, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i > \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| < \lambda_i T(x_i), y_i > \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| < \lambda_i A(x_i), B'(y_i) > \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \, \|Ax_i\| \, \|B' y_i\| \leq \pi_r((\lambda_i))\pi_{\frac{q'}{1-\nu}}((\|A(x_i)\|))\pi_{\frac{p'}{1-\sigma}}((\|B'(y_i)\|)) \leq$$

$$\leq \pi_r((\lambda_i))\Pi_{q'\nu}(A)\delta_{q'\nu}((x_i))\Pi_{p'\sigma}(B')\delta_{p'\sigma}((y_i))$$

y tomando infimos sobre las representaciones de z

$$\left| < \phi_T, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i > \right| \leq \Pi_{q'\nu}(A)\Pi_{p'\sigma}(B')\alpha_{p\sigma q\nu}(z)$$

y por tanto $\phi_T \in (E \otimes_{\alpha_{p\sigma q\nu}} F)'$. Recíprocamente, sea $\varphi \in (E \otimes_{\alpha_{p\sigma q\nu}} F)'$. Se define $T_\varphi \in \mathcal{L}(E, F')$ de modo que $< T_\varphi(x), y > = \varphi(x \otimes y)$ si $(x, y) \in E \times F$. Entonces, si $(x_i)_{i=1}^n \subset E$, $(y_i'')_{i=1}^n \subset F''$, $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\pi_{r'}((< T_\varphi(x_i), y_i'' >)) = \sup_{(\lambda_i) \in B_l r} \left| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < T_\varphi(x_i), y_i'' > \right| = \sup_{(\lambda_i) \in B_l r} \left| \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i''\right) \right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\| \sup_{(\lambda_i) \in B_l r} \alpha_{p\sigma q\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i''\right) \leq \|\varphi\| \delta_{q'\nu}((x_i))\delta_{p'\sigma}((y_i''))$$

y por el teorema 2.4.3) se tiene $T_\varphi \in \mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}(E, F')$. Como $\varphi = \phi_{(T_\varphi)}$, se deduce de las desigualdades anteriores y del teorema 2.4 la isometría anunciada.

b) Para todo E y F en BAN, la igualdad

$$\mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}(E, F) = E \otimes_{\alpha_{p\sigma q\nu}} F')' \cap \mathcal{L}(E, F)$$

es consecuencia directa de a). Por el ejercicio 17.2 de [2], $\mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}$ es maximal. Si E y F son de dimensión finita, por a) es

$$\mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}(E, F) = (E \otimes_{\alpha_{p\sigma q\nu}} F')' = (E' \otimes_{\alpha'_{p\sigma q\nu}} F)$$

isométricamente. Por tanto $\alpha'_{p\sigma q\nu}$ es la tensor norma asociada a $\mathcal{D}_{q'\nu p'\sigma}$ ∎

Referencias

[1] BERGH, J., LÖFSTRÖM, J.: *Interpolation Spaces.* Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New York (1976).

[2] DEFANT, A., FLORET, K.: *Tensor norms and operators ideals.* North Holland. Amsterdam. London. New York. Tokio. (1993).

[3] DE GRANDE-DE KIMPE, N.: *Generalized sequence spaces.* Bull. Soc. Math. Belgique, XXIII, 123-166, (1971).

[4] JARCHOW, H.: *Locally convex spaces.* Teubner. Stuttgart. (1981).

[5] LAPRESTÉ, J.T.: *Opérateurs sommantes et factorisations à travers les espaces* L^p. Studia Math. 56, 47-83, (1976).

[6] MATTER, U.: *Absolutely continuous operators and super-reflexivity.* Inaugural Dissertation. Zürich. (1985).

[7] MATTER, U.: *Absolute continuous operators and super-reflexivity.* Math. Nachr. 130, 193-216, (1987).

[8] MAUREY, B.: *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs lineaires à valeurs dans les spaces* L^p. Asterisque 11, (1974).

[9] MAUREY, B. et PISIER, G.: *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendents et propietés géométriques des spaces de Banach.* Studia Math. 58, 45-90, (1976).

[10] NICOLESCU, C.: *Absolute continuity and weak compactness.* Bull. Amer. Math. Soc. S1 1064-1066, (1975).

[11] PIETSCH, A.: *Operator Ideals.* Amsterdam. Oxford. New York. (1980).