Un sistema de ecuaciones diferenciales caracterizador del equilibrio para variables aleatorias usuales

POR M. RUIZ ESPEJO

Recibido: 3 de Marzo de 1993

Presentado por el Académico Numerario D. Francisco Javier Girón

Resumen

En la construcción de una familia de estimadores robustos e invariantes lineales de la media poblacional, Ruiz [3] justificó la importancia de un sistema de ecuaciones de resolución no sencilla en general. En este artículo estudiamos propiedades del sistema, caracterizándolo por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y discutiendo, a la luz de estos resultados, la aplicación de diversas técnicas de análisis numérico para la resolución del sistema en la práctica.

Palabras clave: análisis numérico, equilibrio para variables aleatorias, sistema de ecuaciones diferenciales.

Summary

A system of differential equations characterizing the equilibrium for usual random variables: In the construction of a family of robust and linear invariant estimators of the population mean, Ruiz [3] justified the importance of a system of equations not generally of simple resolution. In this article we study the properties of the system, characterizing it by a system of non-linear differential equations, and discuss, in the light of the results, the application of different numerical analysis techniques for resolving the system in practice.

Key words: equilibrium of random variables, numerical analysis, system of differential equations.

AMS subject classifications: 62 F 10, 34 B 99.

Introducción

En un reciente trabajo, Ruiz [3] construye una familia de estimadores de la media poblacional que son robustos e invariantes lineales, basado en consideraciones de robustez de Andrews et al. [1]. La elaboración de tales estimadores pasa por la resolución de un sistema de ecuaciones de equilibrio, concretamente

$$\left.\begin{aligned} 1-p &= \int_x^y f(s)ds \\ (1-p)\mu &= \int_x^y sf(s)ds \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

donde x e y son dos incógnitas que dependen de la función de densidad de la población $f(s)$, $a< s < b$, y de $p\in [0,1)$, una constante fijada; siendo

$$\mu = \int_a^b sf(s)ds$$

la media poblacional. Llamamos X a la variable aleatoria cuya función de densidad es f. Para tener las condiciones de regularidad suficientes para lo siguiente vamos a suponer de aquí en adelante que X es una variable aleatoria usual.

Definición 1. Sea X una variable aleatoria absolutamente contínua con función de distribución F. Diremos que X es *variable aleatoria usual* si y sólo si satisface simultáneamente:

i) El recorrido de X es (a,b) de longitud finita o infinita.
ii) Existe $dF(z)/dz$ sobre (a,b).
iii) $(dF(z)/dz)_{x=z} > 0$ sobre (a,b) □

Vimos en Ruiz [3] que en este tipo de variable usual se encuentran familias de distribuciones muy empleadas en la inferencia clásica, y además demostrábamos que para toda variable aleatoria X usual, con $E(X) = \mu < \infty$ y todo $p \in [0,1)$, existe una única solución del sistema (1).

Hasta ahora hemos considerado que p es un valor fijado. Podemos, no obstante, considerarlo variable. Al variar p en el intervalo [0,1), las soluciones del sistema (1) serán un par de variables $(x(p), y(p))$.

Veamos algunas propiedades de estas soluciones del sistema (1).

2. Propiedades.

Tenemos el siguiente

Teorema 1. Sea X una variable aleatoria usual con $E(X) = \mu\langle\infty$. Entonces, considerando a p como variable independiente sobre [0,1), quedan determinadas $x(p)$ e $y(p)$, que son diferenciables, verificando

$$\frac{dx(p)}{dp}=\frac{y(p)-\mu}{[y(p)-x(p)]f[x(p)]}$$
$$\frac{dy(p)}{dp}=\frac{x(p)-\mu}{[y(p)-x(p)]f[y(p)]}$$

y además

$$\lim_{p\to 1} x(p)=\lim_{p\to 1} y(p)=\mu$$

con $x(p)<\mu<y(p)$ para todo $p\in(0,1)$ □

Demostración

Sea $A=(0,1)x(a,b)^2$ un conjunto abierto de $\mathbf{R}^3$=$\mathbf{R}$x$\mathbf{R}^2$.Definimos la función $\Phi\colon A\to\mathbf{R}^2$ del modo siguiente

$$\Phi(p,x,y)=\left((1-p)-\int_x^y f(s)ds,\quad (1-p)\mu-\int_x^y sf(s)ds\right).$$

a) es evidente que Φ es contínuamente diferenciable en A, $\Phi\in C^1(A)$, pues las derivadas parciales

$$\frac{\partial\Phi(p,x,y)}{\partial p}=(-1,-\mu),$$
y
$$\frac{\partial\Phi(p,x,y)}{\partial x}=(f(x),xf(x))$$

$$\frac{\partial\Phi(p,x,y)}{\partial y}=(-f(y),-yf(y))$$

existen y son contínuas en A$\subset\mathbf{R}^3$, por ser f contínua.

b) En Ruiz [3], hemos probado que dado $p\in(0,1)$, existe un par $(x,y)\in(a,b)^2$ que satisface el sistema de ecuaciones (1), es decir que cumplen

$$\Phi(p,x,y)=(0,0). \qquad (2)$$

c) Además si Γ_j^i es la derivada parcial de la componente i-ésima respecto a la variable j-ésima, la matriz

$$d_2\Phi(p,(x,y)) = \begin{pmatrix} \Phi_2^1 & \Phi_3^1 \\ \Phi_2^2 & \Phi_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) & -f(y) \\ xf(x) & -yf(y) \end{pmatrix}$$

tiene inversa, pues su determinante en el punto (p,x,y) que satisface (2), es

$$-yf(x)f(y) + xf(x)f(y) = (x-y)f(x)f(y) \langle 0$$

pues de ser igual o mayor que cero contradiría la relación (12) de Ruiz [3].

Nos encontramos así en los postulados requeridos por el teorema de la función implícita, y por tanto deducimos que

$$\forall p \in (0,1) \quad \exists!(x(p),y(p)) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \Phi[p,x(p),y(p)] = (0,0).$$

O, en otra expresión, $\exists! \varnothing:(0,1) \to (a,b)^2 \,/\, \varnothing(p) = (x(p),y(p))$ que cumple la condición

$$\Phi(p,\varnothing(p)) = 0$$

y, además, $\varnothing$ es contínuamente diferenciable en (0,1) con

$$d\varnothing(p) = -d_2\Phi(p,\varnothing(p))^{-1}.d_1\Phi(p,\varnothing(p))$$

(Spivak, [4]) donde

$$d_1\Phi(p,\varnothing(p) = \begin{pmatrix} \Phi_1^1 \\ \Phi_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\mu \end{pmatrix}$$

y

$$d_2\Phi(p,\varnothing(p))^{-1} = \frac{-1}{[x(p)-y(p)]f[x(p)]f[y(p)]} \begin{pmatrix} -y(p)f[y(p)] & f[y(p)] \\ -x(p)f[x(p)] & f[x(p)] \end{pmatrix}$$

con lo que

$$d\varnothing(p)=\begin{pmatrix}\varnothing_1^1\\ \varnothing_1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'(p)\\ y'(p)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{y(p)-\mu}{[y(p)-x(p)]f[x(p)]}\\ \dfrac{x(p)-\mu_e}{[y(p)-x(p)]f[y(p)]}\end{pmatrix} \qquad (3)$$

Para terminar queda probar que $\lim\limits_{p\to 1} x(p)=\lim\limits_{p\to 1} y(p)=\mu$.

De (3) tenemos que

$x'(p)>0\ \ \forall p\in(0,1)\Rightarrow x(p)$ es estrictamente creciente en (0,1),

$y'(p)<0\ \ \forall p\in(0,1)\Rightarrow y(p)$ es estrictamente decreciente en (0,1).

Por otro lado $\forall p\in(0,1){:}\,x(p)<y(p)$ pues de lo contrario, si fuera $x(p)\geq y(p)$ tendríamos

$$0<1-p=p[x(p)<X<y(p)]=\int_{x(p)}^{y(p)} f(s)ds\leq 0,$$

contradicción que sólo es evitable siendo

$$x(p)<y(p) \quad \forall p\in(0,1).$$

Naturalmente $x(p)<\mu<y(p)$ $\forall p\in(0,1)$, pues de lo contrario nuevamente contradiríamos que

$$\int_{x(p)}^{y(p)} sf(s)ds=\mu(1-p).$$

Tomando límites, si se diera la desigualdad

$$x(1-)=\lim_{p\to 1} x(p)<\lim_{p\to 1} y(p)=y(1-)$$

se verificaría que

$$0=\lim_{p\to 1}(1-p)=\lim_{p\to 1}\int_{x(p)}^{y(p)} f(s)ds=\int_{x(1-)}^{y(1-)} f(s)ds=f^*.(y(1-)-x(1-))>0$$

con $f^* = f(c)$ / $c \in (x(1\text{-}), y(1\text{-}))$ en virtud del teorema del valor medio ponderado para integrales, lo cual es una nueva contradicción, y por tanto concluímos que

$$x(1-) = y(1-) = \mu \qquad \square$$

Corolario 1. En las hipótesis del teorema anterior, podemos extender $x(p)$ e $y(p)$ al valor $x(1) = y(1) = \mu$, conservando la continuidad de $x(.)$ e $y(.)$ $\square$

Corolario 2. En las hipótesis del teorema anterior, se cumple

$$x'(1) = -y'(1) = \frac{1}{2f(\mu)} \qquad \square$$

Demostración. Por un lado tenemos que

$$x'(1) = \lim_{p \to 1-} \frac{y(p) - \mu}{[y(p) - x(p)] f[x(p)]} = \frac{1}{f(\mu)} \lim_{p \to 1-} \frac{y'(p)}{y'(p) - x'(p)} =$$
$$= \frac{1}{f(\mu)} \cdot \frac{y'(1)}{y'(1) - x'(1)}$$

e

$$y'(1) = \frac{1}{f(\mu)} \cdot \frac{x'(1)}{y'(1) - x'(1)}$$

aplicando en las últimas igualdades la regla de l'Hôpital, y por consiguiente de ambas ecuaciones obtenemos el sistema

$$\left. \begin{aligned} x'(1) - y'(1) &= \frac{1}{f(\mu)} \\ x'(1) + y'(1) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que resolviendo rutinariamente nos proporciona el resultado enunciado. $\square$

3. El sistema de ecuaciones diferenciales

Teorema 2. Dada la variable aleatoria usual X, con $E(X) = \mu < \infty$, entonces son equivalentes las soluciones funcionales x e y para los siguientes sistemas.

a) Sistema (1).
b) Sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$\left.\begin{array}{l} x'(p)\{[y(p)-x(p)]f[x(p)]\} = y(p)-\mu \\ y'(p)\{[y(p)-x(p)]f[y(p)]\} = x(p)-\mu \end{array}\right\} \qquad (4)$$

siendo $x(p) \neq y(p)$ $\forall p \in [0,1)$ y con las condiciones de contorno $x(0)=a$, $y(0)=b$ □

Demostración. Las soluciones del sistema (1) dado en a) existen y son únicas (Ruiz, |3|). Si $x(p)$ e $y(p)$ son la solución del sistema a) entonces hemos visto que $x(p) \neq y(p)$ $\forall p \in [0,1)$ por el teorema 1, y además $x(0)=a$ e $y(0)=b$, pues dado $p=0$ el sistema a) queda

$$1 = \int_{x(0)}^{y(0)} f(s)ds$$

$$\mu = \int_{x(0)}^{y(0)} sf(s)ds$$

siendo las soluciones únicas.

El sistema de ecuaciones diferenciales (4) es deducible del sistema (1), por lo visto en el teorema 1.

Veamos ahora la propiedad recíproca. Si tenemos dos funciones $x(p)$ e $y(p)$ que satisfagan las características exigidas en b), entonces verifican simultáneamente

$$x'(p)[y(p)-x(p)]f[x(p)] = y(p)-\mu \qquad (5)$$

$$y'(p)[y(p)-x(p)]f[y(p)] = x(p)-\mu \qquad (6)$$

Este sistema equivale (en el sentido de que conserva todas las soluciones posibles y sólo sus soluciones) al sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (5) \\ [y(p)-x(p)][f(x(p))x'(p)-f(y(p))y'(p)] = y(p)-x(p) \end{array}\right. \qquad (7)$$

donde a la última ecuación la denotamos por (7) y equivale a (5) menos (6); y a su vez, el sistema (5) y (7) equivale, teniendo en cuenta que $x(p) \neq y(p)$ para todo $p \in [0,1)$, al sistema

$$\begin{cases} (5) \\ f(x(p))x'(p) - f(y(p))y'(p) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

siendo la última ecuación (8) equivalente a (7) dividida por $[y(p)-x(p)]$.
Pero (8) tiene la propiedad de que

$$f(x(p))x'(p) - f(y(p))y'(p) = \frac{d}{dp}\int_{y(p)}^{x(p)} f(s)ds = 1 \tag{9}$$

Luego integrando los dos miembros de la última igualdad, tenemos que

$$\int_{y(p)}^{x(p)} f(s)ds = p + C \quad \forall p \in [0,1) \tag{10}$$

y al imponer las condiciones de contorno, $x(0) = a$ e $y(0) = b$, determinamos la constante C

$$1 = \int_a^b f(s)ds = -C$$

pues p=0. Por tanto, de (10), nos queda

$$\int_{x(p)}^{y(p)} f(s)ds = 1 - p \tag{11}$$

siendo (11) equivalente a (8) por las condiciones de contorno. Con esto el sistema equivalente, tras las últimas consideraciones, es

$$\begin{cases} (5) \\ (11) \end{cases}$$

Ahora, modificando (5) obtenemos

$$y(p)f(x(p))x'(p) - y(p) + \mu = x(p)f(x(p))x'(p) \tag{12}$$

donde (12) equivale a (5). Análogamente a lo obtenido en (9), ahora tenemos

$$y(p)\frac{d}{dp}\left[\int_a^{x(p)} f(s)ds\right] - y(p) + \mu = \frac{d}{dp}\left[\int_a^{x(p)} sf(s)ds\right] \qquad (13)$$

donde (13) equivale a (12).
Como f es una función de densidad se verificará que

$$1 = \int_a^b f(s)ds = \int_a^{x(p)} f(s)ds + \int_{x(p)}^{y(p)} f(s)ds + \int_{y(p)}^b f(s)ds \qquad (14)$$

El segundo sumando del último trinomio, por (11), puede sustituirse por 1-p con lo que derivando ambos miembros de la igualdad (14) resulta

$$\frac{d}{dp}\left[\int_a^{x(p)} f(s)ds\right] = 1 + f(y(p))y'(p),$$

que sustituída en el segundo factor del primer sumando de (13), obtenemos

$$y(p) - y(p)f(y(p))y'(p) - y(p) + \mu = \frac{d}{dp}\left[\int_a^{x(p)} sf(s)ds\right] \qquad (15)$$

donde (15) es equivalente a considerar (13) por ser f la función de densidad, y simplificando $y(p)$, y despejando nos queda

$$\mu = \frac{d}{dp}\left[\int_a^{x(p)} sf(s)ds\right] - y(p)f(y(p))y'(p) = \frac{d}{dp}\left[\int_a^{x(p)} sf(s)ds + \int_{y(p)}^b sf(s)ds\right].$$

Como por hipótesis,

$$\mu = \int_a^b sf(s)ds$$

sumando y restando

$$\frac{d}{dp}\left[\int_{x(p)}^{y(p)} sf(s)ds\right]$$

en el último miembro de la cadena de igualdades, se verifica que

$$\mu = \frac{d}{dp}\left[\mu - \int_{x(p)}^{y(p)} sf(s)ds\right] = x(p)f(x(p))x'(p) - y(p)f(y(p))y'(p)$$

e integrando los miembros primero y tercero de las últimas igualdades

$$p.\mu + C = -\int_{x(p)}^{y(p)} sf(s)ds$$

con C una constante que se determina por las condiciones de contorno, si p=0

$$C = -\int_{x(0)}^{y(0)} sf(s)ds = -\int_{a}^{b} sf(s)ds = -\mu$$

resultando la ecuación

$$(1-p)\mu = \int_{x(p)}^{y(p)} sf(s)ds \qquad (16)$$

siendo (16) equivalente a (15), teniendo en cuenta el significado de μ y las condiciones de contorno. Por tanto resulta que el sistema

$$\begin{cases} (5) \\ (6) \end{cases}$$

tiene las mismas soluciones que el nuevo sistema

$$\begin{cases} (11) \\ (16) \end{cases}$$

y de aquí se concluye que toda solución del sistema b), lo es del sistema a) $\square$

4. Discusión

Las ecuaciones vistas en este artículo en general no son sencillas de resolver directamente. Sin embargo vamos a indicar qué técnicas de análisis numérico pueden utilizarse para la resolución de los sistemas tratados.

Para cada valor de p fijo, el sistema de ecuaciones (1) puede expresarse como

$$G(x,y) = 1 - p - \int_x^y f(s)ds = 0$$

$$H(x,y) = (1-p)\mu - \int_x^y sf(s)ds = 0$$

pudiéndose resolver por el método de Newton (o modificaciones) para sistemas de ecuaciones (Henrici, [2]).

Pero al ver que el sistema de ecuaciones diferenciales dado en el teorema 2 tiene soluciones equivalentes, podemos escribir (4) del modo

$$\frac{dx}{dp} = J(x(p), y(p))$$

$$\frac{dy}{dp} = -J(y(p), x(p))$$

siendo

$$J(x,y) = \frac{y-\mu}{(y-x)f(x)}.$$

Además si $x' = x'(y) = \dfrac{dx}{dy}$,

$$J(x,y) = \frac{dx}{dp} = \frac{dx}{dy}.\frac{dy}{dp} = x'[-J(y,x)].$$

Pudiendo resolver la ecuación diferencial planteada, al ser de tipo separable, mediante la ecuación directa

$$\int (y-\mu)f(y)dy = \int (x-\mu)f(x)dx$$

con la condición de contorno $x(b) = a$. O en cualquier caso, como

$$x' = -\frac{J(x,y)}{J(y,x)} \quad \text{e} \quad y' = -\frac{J(y,x)}{J(x,y)},$$

se pueden utilizar métodos del tipo Runge-Kutta, el algoritmo de Taylor, el método de Adams-Bashforth o el método de Adams-Moulton (Henrici, [2]).

Referencias

[1] ANDREWS, D.F., BICKEL, P.J., HAMPEL, F.R., HUBER, P.J., ROGERS, W.H. y TUKEY, J.W. (1972). *Robust Estimates of Location*. Princeton University Press. Princeton.

[2] HENRICI, P. (1964). *Elements of Numerical Analysis*. Wiley. Nueva York.

[3] RUIZ, M. (1990). *Una clase de estimadores de la media poblacional robustos e invariantes lineales*. Metron 48, 55-66.

[4] SPIVAK, M. (1970). *Calculus on Manifolds*. W.A. Benjamin, Inc. Nueva York.