La transformación estocástica de un modelo determinista de Samuelson de la macroeconomía

POR AGUSTÍN RAYA LÓPEZ *

Recibido: 13 de Enero de 1993

Presentado por el Académico Numerario D. Darío Maravall

Abstract:

Samuelson's deterministic model is transformed into a stochastic one and a solution is given to it. The resolution tecnique adopted can be used to solve the multiple models formulated by equations in finite differences which exist in Economic Dinamics and in Operative Research.

Fuera de la Física existen más campos de aplicación de las ecuaciones en diferencias finitas, entre las áreas de conocimiento más activas en este tema, figuran la Dinámica Económica, el Análisis de las existencias de almacén o Teoría de Inventarios (rama de la Investigación Operativa) y la Teoría del aprendizaje.

Vamos a enfocar desde la óptica de las probabilidades un famoso modelo determinista macroeconómico de Samuelson, y a resolverlo, porque ofrece resultados muy curiosos.

Samuelson obtuvo la ecuación en diferencias finitas que liga la renta nacional R_n al cabo de n períodos con la renta nacional en los dos períodos anteriores.

$$R_{n+2} = \alpha(1+\beta)R_{n+1} - \alpha\beta R_n + 1 \qquad (1)$$

donde α y β son dos constantes que significan la propensión marginal al consumo y el coeficiente de aceleración. El 1 de (1) significa el gasto público, que es constante, medido en unidades escogidas de modo que lo hagan igual a 1. (Goldberg, 1958).

* Dpto. de Física y Mecánica Fundamentales y Aplicadas a la Ingeniería Agroforestal. Univ. Politécnica de Madrid.

La ecuación (1) no es homogénea, ya que figura el término 1 que es independiente de la renta variable. Ahora bien, la solución de (1) puede escribirse como suma de la solución r_n de la ecuación homogénea.

$$r_{n+2} = \alpha(1+\beta)r_{n+1} - \alpha\beta r_n \tag{2}$$

y de la constante C solución de (1) que vale

$$C - \alpha(1+\beta)C + \alpha\beta C = 1 \Rightarrow C = 1/(1-\alpha) \tag{3}$$

de modo que

$$R_n = r_n + 1/(1-\alpha) \tag{4}$$

Dada la ecuación en diferencias finitas de segundo orden, lineal, y de coeficientes constantes:

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \tag{5}$$

Cuando los valores iniciales son aleatorios la función característica de la solución aleatoria de la ecuación (5) es la:(*)

$$\psi_n(z_1, z_2) = \psi_o\left[\frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}(r_1^{n-1} - r_2^{n-1})z_1 + \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}(r_1^n - r_2^n)z_2, \right.$$

$$\left. \frac{1}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)z_1 + \frac{1}{r_2 - r_1}(r_2^{n+1} - r_1^{n+1})z_2\right] \tag{6}$$

donde $\psi_o(z_1, z_2)$ es la función característica de los valores iniciales aleatorios y r_1 y r_2 las raíces de la ecuación característica.

En el caso en que las raíces r_1 y r_2 son complejas conjugadas, es decir:

$$r_1 = re^{i\alpha} \quad ; \quad r_2 = re^{-i\alpha} \tag{7}$$

(*) La fórmula (6) la he obtenido en mi tesis doctoral.

la (6) se escribe en forma de argumento real de la siguiente manera:

$$\psi_n(z_1,z_2)=\psi_o\left[-\frac{r^n \operatorname{sen}(n-1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_1-\frac{r^{n+1}\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_2,\right.$$

$$\left.\frac{r^{n-1}\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_1+\frac{r^n \operatorname{sen}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_2\right] \tag{8}$$

Obsérvese que

$$\psi_n(0,z_2=\psi_o\left[-\frac{r^{n+1}\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_2,\frac{r^n \operatorname{sen}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_2\right]$$

$$\psi_{n+1}(z_1,0)=\psi_o\left[-\frac{r^{n+1}\operatorname{sen} n\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_1,\frac{r^n \operatorname{sen}(n+1)\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}z_1\right] \tag{9}$$

es decir que las funciones características de las distribuciones marginales de z_2 y z_1 en n y n+1 son las mismas, como tenía que ser, porque x_n en n es igual a x_{n-1} en n+1.

La r_n solución de (2) se obtiene aplicando a las (5) y (6) los valores particulares correspondientes a (2) es decir haciendo:

$$a=\alpha(1+\beta) \qquad b=-\alpha\beta \tag{10}$$

Para fijar ideas vamos ahora a resolver un caso considerado por los economistas y es aquél en que

$$\alpha=1/2 \quad ; \quad \beta=1 \tag{11}$$

lo que da para R_n el valor

$$R_n=r_n+2 \tag{12}$$

y r_n es la solución de (2) con los valores de α y β dados por (11) que en este caso es:

$$r_{n+2} = r_{n+1} - r_n / 2 \tag{13}$$

La ecuación característica de (13) es:

$$\rho^2 - \rho + 1/2 = 0 \tag{14}$$

cuyas raíces son:

$$\rho_1 = (1+i)/3 = (\cos\pi/4 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/4)/\sqrt{2}$$
$$\rho_2 = (1-i)/2 = (\cos\pi/4 - i\,\mathrm{sen}\,\pi/4)/\sqrt{2} \tag{15}$$

Como el argumento de las raíces (15) es $\pi/4$ que está contenido *ocho* veces en 2π habrá un conjunto de *ocho funciones características que se repiten periódicamente con un período igual a ocho.* Estas ocho funciones características son las que se obtienen sustituyendo en la ecuación (8) r y α por:

$$r = 1/\sqrt{2} \quad ; \quad \alpha = \pi/4 \tag{16}$$

son por tanto, siendo k un número entero

$$\begin{aligned}
n &= 8k & &\psi_0\left[(1/\sqrt{2})^n z_1, (1/\sqrt{2})^n z_2\right]\\
n &= 8k+1 & &\psi_0\left[-(1/\sqrt{2})^{n+1} z_2, (1/\sqrt{2})^{n-1}(z_1+z_2)\right]\\
n &= 8k+2 & &\psi_0\left[-(1/\sqrt{2})^{n}(z_1+z_2), (1/\sqrt{2})^{n-2}(z_1+2z_2)\right]\\
n &= 8k+3 & &\psi_0\left[-(1/\sqrt{2})^{n-1}(z_1+2z_2), (1/\sqrt{2})^{n-1} z_1\right]\\
n &= 8k+4 & &\psi_0\left[-(1/\sqrt{2})^n z_1, -(1/\sqrt{2})^n z_2\right]\\
n &= 8k+5 & &\psi_0\left[(1/\sqrt{2})^{n+1} z_2, -(1/\sqrt{2})^{n-1}(z_1+z_2)\right]\\
n &= 8k+6 & &\psi_0\left[(1/\sqrt{2})^{n}(z_1+z_2), -(1/\sqrt{2})^{n-2}(z_1+2z_2)\right]\\
n &= 8k+7 & &\psi_0\left[(1/\sqrt{2})^{n-1}(z_1+2z_2), -(1/\sqrt{2})^{n-1} z_1\right]
\end{aligned} \tag{17}$$

las 8 funciones características para r_n y r_{n-1}

Cuando $n \to \infty$ el resultado de multiplicar r por $(\sqrt{2})^n$ tiene por funciones características las ocho que resultan de multiplicar en (17) z_1 y z_2 por $(\sqrt{2})^n$, o lo que es lo mismo suprimir en las (17) el factor $(1/\sqrt{2})^n$.

Se ve así como para n infinito sí tiene sentido distinguir entre sí los n que son congruentes módulo 8, que quedan separados en ocho clases distintas aún valiendo n infinito.

Si en (17) se hace $z_2 = 0$ se obtiene la función característica de la distribución marginal de r_n.

Se puede observar que $\psi_{n+1}(z_1, 0)$ es igual a $\psi_n(0, z_2)$.

De la forma de las ocho (17) se deducen muchas consecuencias. Por ejemplo, si $\psi_0(z_1, z_2)$ es producto de dos funciones características $\psi_{01}(z_1)$ $\psi_{02}(z_2)$ es decir las rentas nacionales de los dos primeros períodos son v.a. independientes, entonces por (17) cualquiera que sea k, si n=8k ó n=8k+4 las rentas de dos períodos consecutivos permanecen independientes, y en los demás casos están correlacionadas positivamente, como resulta de observar el signo de las covarianzas de $\psi_n(z_1, z_2)$

Cuando el tiempo n tiende a infinito las ocho ψ_n (17) tienden a $\psi_0(0,0) = 1$, es decir las r_n convergen a cero y por tanto las R_n convergen al valor constante 2 por (12).

Obsérvese que las r_n pueden ser negativas. Las que son siempre positivas son las R_n y que para n=8k y n=8k+4 los signos de las v.a. r_n están cambiados de signo.

Tiene interés calcular las varianzas $\sigma_{1n}^2, \sigma_{2n}^2$ de r_n y r_{n+1} y la covarianza σ_{12n} de las (17), en especial para cuando resulta difícil calcular las funciones características. Estos valores se obtienen efectuando en

$$\sigma_{10}^2 z_1^2 + 2\sigma_{120} z_1 z_2 + \sigma_{20}^2 z_2^2 \qquad (18)$$

los cambios indicados por los argumentos de las (17); así por ejemplo para n=8k+1, estos cambios son

$$z_1 \to -(1/\sqrt{2})^{n+1} z_2 \quad ; \quad z_2 \to (1/\sqrt{2})^{n-1}(z_1 + z_2) \qquad (19)$$

e identificar los coeficientes de z_1^2, z_1z_2 y z_2^2 del polinomio del segundo miembro de (20) a los del polinomio del primer miembro

$$\sigma_{1n}^{2} z_1^2 + 2\sigma_{12n} z_1 z_2 + \sigma_{2n}^2 z_2^2 =$$
$$= \sigma_{10}^2 z_2^2 / 2^{n+1} - 2\sigma_{120} z_2 (z_1 + z_2) / 2^n + \sigma_{20}^2 (z_1 + z_2)^2 / 2^{n-1} \quad (20)$$

así es que en este caso sería:

$$\sigma_{1n}^2 = \sigma_{20}^2 / 2^{n-1}$$
$$\sigma_{12n} = (2\sigma_{20}^2 - \sigma_{120}) / 2^n$$
$$\sigma_{2n}^2 = \left[\sigma_{10}^2 + 4(\sigma_{20}^2 - \sigma_{120})\right] / 2^{n+1} \quad (21)$$

De la misma manera se efectuan los cálculos para las otras siete (17)

De la segunda (21) se sigue que para n=8k+1 las rentas r_n y r_{n+1} están correlacionadas positivamente si

$$2\sigma_{20}^2 > \sigma_{120} \quad (22)$$

y negativamente si

$$2\sigma_{20}^2 < \sigma_{120} \quad (23)$$

Como los cálculos a realizar son largos si bien en las aplicaciones numéricas se pueden realizar éstos con ordenadores con lo que el riesgo de error o equivocación es muy pequeño, prácticamente nulo, por el contrario, cuando se realizan cálculos literales con objeto de comprobar que no hay error aparte de repasar los cálculos efectuados, conviene comprobar que los resultados obtenidos por distintos métodos coinciden o también que se cumplen ciertas condiciones que han de cumplir los coeficientes literales. A continuación damos un ejemplo de una de estas comprobaciones: las varianzas deben de ser siempre positivas por tanto σ_{2n}^2 de la tercera (21) ha de ser siempre positiva lo que no es inmediato de la inspección de su valor dado en dicha fórmula. Vamos a demostrar ahora que siempre es positiva: su signo es el mismo que el de

$$\sigma_{10}^2 / \sigma_{20}^2 - 4\sigma_{120} / \sigma_{20}^2 + 4 \qquad (24)$$

si σ_{120} es negativo entonces (24) obviamente es positivo y si σ_{120} es positivo como en valores absolutos es:

$$\sigma_{120} < \sigma_{10}\sigma_{20} \qquad (25)$$

se cumple que

$$(\sigma_{10}^2 / \sigma_{20}^2 - 4\sigma_{120} / \sigma_{20}^2 + 4))(\sigma_{10}^2 / \sigma_{20}^2 - 4\sigma_{10} / \sigma_{20} + 4) =$$
$$= (\sigma_{10} / \sigma_{20} - 2)^2 \geq 0 \qquad (26)$$

luego:

$$\sigma_{2n}^2 > 0 \qquad (27)$$

Se ve así cómo el modelo estocástico tiene mucha mayor riqueza de matices que el determinista clásico. La técnica de resolución seguida sirve de norma para la resolución de los múltiples modelos formulados por ecuaciones en diferencias finitas que existen en la Dinámica Económica y en la Investigación Operativa.

Bibliografía

[1] BOROVKOV: *Estadística Matemática*, Ed. Mir 1988.

[2] CAUMEL: *Probabilités. Théorie et Applications*. Eyrolles 1988.

[3] CHOW, G.P.: *Analysis and Control of Dynamic Economic Systems*. John Wiley & Sons, New York. 1975.

[4] DUDEWICZ & MISHRA STAYTA: *Modern Mathemátical Statistics*. John Wiley 1988.

[5] GOLDBERG, S.: *Introduction to Difference Equations*. John Wiley & Sons, New York. 1958.

[6] KLIMOV: *Probability Theory and Mathemátical Statistics*. Mir 1986.

[7] KMENTA, J.: *Elementos de Econometría*. Vicens Universidad, Barcelona 1977.

[8] MALINVAUD, E.: *Leçons de Théorie Microéconomique.* Dunod, París. 1968.

[9] MARAVALL, D.: *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos.* Paraninfo, Madrid. 1974.

[10] MILNE-THOMSON, L.M.: *The Calculus of Finite Differences.* Macmillan and Co. London 1951.

[11] PINDYCK, R.S., RUBINFELD, D.L.: *Econometric Models and Economic Forecasts.* McGraw-Hill, New York (Segunda Edición). 1981.

[12] VENTSEL et LOVTCHAROV: *Problèmes appliqués de la théorie des probabilités.* Mir 1988.

[13] WILLIAM SHER y RUDY PINOLA: *Teoría Microeconómica.* Alianza Universidad 1985.