# *Un modelo normativo para las preferencias en problemas de decisión multiobjetivo*

POR J. GONZALEZ PACHON*

Recibido: 3 de Junio de 1992

*Presentado por el Académico Numerario D. Sixto Ríos García.*

## Resumen

Se introduce la estructura de preferencia racional como modelo normativo en análisis de decisiones con objetivos múltiples. En ella tiene cabida, además de la preferencia e indiferencia manifestada por el decisor, la actitud de duda.

Se asocia una estructura de preferencia racional a un caso general de representación de preferencias.

Finalmente, se introducen las nociones de aproximación lineal a una estructura de preferencia racional, junto con un teorema de caracterización de éstas.

## A normative model for preferences in multiobjective decision making problems

## Abstract

In this paper we introduce the rational preference structure as a normative model in a multiobjective decision making analysis. In this model we consider the doubt attitude, together with the preference and indifference attitudes revealed by the decision maker to the analyst.

A rational preference structure is associated to a general case of preference representation.

Finally, the linear approximations of a rational preference structure are introduced and we state a characterization theorem for them.

## 1. INTRODUCCION

En Teoría de la Decisión existe distinción entre los llamados modelos descriptivos y los modelos normativos. Los primeros centran su objetivo en describir cómo un individuo toma realmente una decisión, e interesan esencialmente a psicólogos, sociólogos y a personas que estudian de alguna forma el proceso de decisión humano. Los segundos, sin embargo, describen cómo debería un individuo tomar una decisión siguiendo unas pautas racionales. Seguir pautas racionales significa que dicha persona debe atenerse a ciertos axiomas o normas de racionalidad impuestas a priori (ver Ríos et al, 1989).

Uno de los puntos donde se bifurcan, en el tratamiento de un problema de decisión, algunos métodos descriptivos y normativos es en la propiedad

* Prof. de la Fac. de Informática de la Univ. Politécnica de Madrid.

transitiva atribuida a las actitudes que manifiesta el decisor al cotejar pares de alternativas. El problema surge, esencialmente, con la actitud de indiferencia. Mientras que la gran mayoría de métodos normativos definen la indiferencia como transitiva, los métodos descriptivos basan su postura contraria en casos reales del comportamiento cotidiano de una persona (p.e. añadir poca cantidad de azúcar a un café va resultando indiferente paso a paso, pero si se comparan las dos situaciones extremas la actitud no será de indiferencia).

Nuestro punto de partida aquí es el de un modelo normativo, como es la estructura de preferencia racional. En él atribuimos transitividad tanto a la actitud de preferencia, como a la actitud de indiferencia. Esta última la justificamos, como en French (1986), observando que en ciertas ocasiones lo que el decisor llama indiferencia no es más que una incapacidad real de comparar dos alternativas. Sin embargo, a diferencia del mencionado autor, no separamos los casos en donde el decisor actúa irracionalmente para volverlos posteriormente a examinar; tales casos pasarán a definir la denominada actitud de duda junto con los específicos de incomparabilidad.

Se logra así clasificar la información proporcionada por el decisor al analista, al comparar pares de alternativas, en tres actitudes racionales: preferencia, indiferencia y duda.

## 2. ESTRUCTURA DE PREFERENCIA RACIONAL

Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$ el conjunto que representa el espacio de objetivos o consecuencias en un problema de decisión multicriterio. Las actitudes del decisor, al comparar pares de elementos del conjunto $Y$, pueden ser de preferencia de una sobre otra (representada por $y_1 > y_2$ si $y_1, y_2 \in Y$), de indiferencia (representada por $y_1 \sim y_2$), o de duda, incluyendo lo que también se denomina incomparabilidad (representada por $y_1 \ ? \ y_2$).

En esta sección nuestro propósito es, una vez obtenida la información sobre las actitudes del decisor $(>, \sim, ?)$ frente a pares de elementos de $Y$, asociar un modelo normativo que permita actuar racionalmente a esta persona en el problema específico que se esté estudiando.

Diferentes autores parten de axiomáticas para describir el problema de decisión como un problema de decisión racional: Fishburn (1970), French (1986), Ríos Insua (1990) ...

La definición básica para nuestro modelo es la de estructura de preferencia racional. Este concepto está basado en la estructura de preferencia que aparece en Yu (1985) y que posteriormente ha sido generalizado en Chien et al (1990). La diferencia con estos consiste en las propiedades atribuidas a las relaciones binarias que aparecen en la axiomática.

### Definición 2.1

Una *estructura de preferencia racional* en el conjunto $Y$ es un par de relaciones binarias en dicho conjunto, $(R_1, R_2)$, que verifican los siguientes axiomas.

**E1.** $R_1$ es asimétrica y transitiva, y se denominará preferencia racional en $Y$.

**E2.** $R_2$ es una relación de equivalencia, y se denominará indiferencia racional en $Y$.

**E3.** $R_1$ y $R_2$ son disjuntas ($R_1 \cap R_2 = \emptyset$).

**E4.** Si $(y_1, y_2) \in R_1$ e $(y_2, y_3) \in R_2 \Rightarrow (y_1, y_3) \in R_1$.

**E5.** Si $(y_1, y_2) \in R_2$ e $(y_2, y_3) \in R_1 \Rightarrow (y_1, y_3) \in R_1$.

En la definición hemos hecho mención a dos relaciones binarias. Sin embargo, a partir de ellas podríamos completar una partición del conjunto $Y \times Y$, considerando las relaciones binarias: $R_1^S$ (el conjunto simétrico de $R_1$ respecto de $\Delta$, la diagonal de $Y \times Y$) y $R_{12}^C$ (el conjunto complementario de $R_1 \cup R_1^S \cup R_2$ en $Y \times Y$).

La cuaterna de relaciones binarias $(R_1, R_1^S, R_2\, R_{12}^C)$ ha sido denominada cuaterna de relaciones binarias asociada a una estructura de preferencia racional en Pachón (1990) y Pachón et al (1991a). La relación $R_{12}^C$ se correspondería con una tercera actitud racional del decisor que sería la duda racional. Este calificativo de racional se le dará a causa de las siguientes proposiciones, que son consecuencia de los axiomas anteriores.

### Proposición 2.1

$R_{12}^C$ es irreflexiva y simétrica.

### Definición

Es irreflexiva, pues, $R_2 \cap R_{12}^C = \emptyset$ y $\Delta \subset R_2$ y por tanto $R_{12}^C \cap \Delta = \emptyset$. La propiedad de simetría es fácil de deducir, pues $R_{12}^C$ es el complementario en $Y \times Y$ de un conjunto simétrico, como es $R_1 \cup R_1^S \cup R_2$; por tanto es simétrica.

### Proposición 2.2

Se verifican las siguientes relaciones entre $R_2$ y $R_{12}^C$

1. Si $(y_1, y_2) \in R_2$ e $(y_2, y_3) \in R_{12}^C \implies (y_1, y_3) \in R_{12}^C$

2. Si $(y_1, y_2) \in R_{12}^C$ e $(y_2, y_3) \in R_2 \implies (y_1, y_3) \in R_{12}^C$

### Demostración

Vamos a demostrar la relación 1 pues la 2 se obtendría análogamente. Supongamos que $(y_1, y_2) \in R_2$ e $(y_2, y_3) \in R_{12}^C$

- Si $(y_1, y_3) \in R_1$, como $(y_2, y_1) \in R_2$, por el axioma E5 tendríamos que $(y_2, y_3) \in R_1$, lo cual es absurdo.

- Si $(y_1, y_3) \in R_2$, debido a que $(y_1, y_2) \in R_2$, por E2 tendríamos que $(y_2, y_3) \in R_2$, que es absurdo.

- Finalmente, si $(y_1, y_3) \in R_1^S$, o lo que es igual $(y_3, y_1) \in R_1$, como $(y_1, y_2) \in R_2$, por el axioma E4 tendríamos que $(y_3, y_2) \in R_1$. Por tanto $(y_2, y_3) \in R_1^S$, que es absurdo. De esta forma $(y_1, y_3) \notin R_1 \cup R_2 \cup R_1^S$, y por tanto $(y_1, y_3) \in R_{12}^C$

Estas proposiciones permiten atribuir propiedades a la actitud de duda que intuitivamente pueden entenderse como racionales, y que surgen de los axiomas impuestos a la preferencia e indiferencia racional.

Se nos plantea ahora el siguiente problema: Si el analista posee la información de las actitudes que, sobre pares de elementos de $Y$, toma una persona $(>, \sim, ?)$ ¿cuál sería la estructura de preferencia racional que debe utilizar dicho analista para construir un modelo normativo en ese caso particular?

Vamos a plantear el problema anterior de una forma más abstracta. Dadas dos relaciones binarias $R$ y $S$ sobre el espacio de objetivos $Y$, tal que la diagonal del producto $Y \times Y$ esté contenida en $S(\Delta \subset S)$, veamos cómo se puede generar a partir de ellas una estructura de preferencia racional.

**Teorema 2.1**

Sea $C_i$ un subconjunto maximal de $R \cup S \subset Y \times Y$ que verifica las siguientes propiedades:

1. $R_{1i}^* = R \cap C_i$ es asimétrica y transitiva.

2. $R_{2i}^* = S \cap C_i$ es una relación de equivalencia.

3. En $C_i$ las relaciones $R_{1i}^*$ y $R_{2i}^*$ verifican los axiomas E4 y E5.

Se verifica que $(R_{1i}^* \backslash R_{2i}^*, R_{2i}^*)$[1] es una estructura de preferencia racional. A esta estructura se le denomina estructura de preferencia racional generada por $R$, $S$ y $C_i$, y se representa por $(R_1, R_2)_{R,S,C_i}$.

**Demostración**

Vamos a demostrar que el par $(R_{1i}^* \backslash R_{2i}^*, R_{2i}^*)$[1] verifica los 5 axiomas de la Definición 2.1.

[1]La notación $R_{1i}^* \backslash R_{2i}^*$ representa la diferencia de conjuntos.

Axioma E1.

a) $R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$ es asimétrica. Esto es consecuencia de que $R^*_{1i}$ lo es.

b) $R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$ es transitiva. Sea $(y_1, y_2) \in R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$ e $(y_2, y_3) \in R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$, vamos a demostrar que $(y_1, y_3) \in R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$. Sabemos que $(y_1, y_3) \in R^*_{1i}$, debido a que $R^*_{1i}$ es transitiva; veamos entonces que $(y_1, y_3) \notin R^*_{2i}$. Por reducción al absurdo, si $(y_1, y_3) \in R^*_{2i}$ entonces $(y_3, y_1) \in R^*_{2i}$. Como $(y_1, y_2) \in R^*_{1i}$, por el axioma E5, que se verifica en $C_i$, tendremos que $(y_3, y_2) \in R^*_{1i}$; lo cual es absurdo, pues $R^*_{1i}$ es asimétrica.

Axiomas E2 y E3.
Estos se siguen de forma inmediata de las definiciones $R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$ y $R^*_{2i}$.

Axiomas E4 y E5.
Vamos a demostrar el E4, ya que demostrar E5 se haría de forma análoga. Supongamos que $(y_1, y_2) \in R^*_{1i} \backslash R^*_{2i}$ y $(y_2, y_3) \in R^*_{2i}$. Sabemos que $(y_1, y_3) \in R^*_{1i}$ puesto que $R^*_{1i}$ y $R^*_{2i}$ verifican en $C_i$ el axioma E4. Veamos entonces que $(y_1, y_3) \notin R^*_{2i}$. Por reducción al absurdo, si $(y_1, y_3) \in R^*_{2i}$, por ser $R^*_{2i}$ transitiva, $(y_1, y_2) \in R^*_{2i}$, lo cual es una contradicciónl. c.q.d.

El teorema proporciona toda una familia de estructuras de preferencia racional, dependiendo del $C_i$ elegido. La siguiente definición permite asignar a cada $R$ y $S$ una única estructura de preferencia racional.

**Definición 2.2**

Dadas $R$ y $S$ relaciones binarias definidas en $Y$ tal que $\Delta \subset S$, se define la *estructura de preferencia racional generada por R y S* como $(R_1, R_2)_{R,S,C}$, donde $C = \cap C_i$, siendo $\{C_i\}_{i \in I}$ la familia de conjuntos maximales definidos en el teorema 2.1.

## 3. ESTRUCTURAS DE APROXIMACION LINEAL

La estructura de preferencia racional constituye un buen marco para transformar las actitudes comunicadas por el decisor al analista en actitudes racionales. Sin embargo, la dificultad de manejar en ocasiones las relaciones binarias hace que el concepto no sea operativo. En estos casos la estructura de preferencia racional aparece como una mera abstracción, difícil de ser utilizada en la búsqueda de soluciones de un problema de decisión. En esta sección se van a definir conceptos que, además de ayudar a describir y aproximar una estructura de preferencia racional, gozan de una mayor operatividad en la búsqueda de soluciones óptimas. Para definir éstos usaremos las nociones de conos de preferencia, dominación, indiferencia y duda, tanto locales como globales, basadas en las introducidas en Chien et al (1990).

**Definición 3.1**

Sea $(R_1, R_2)$ una estructura de preferencia racional definida en $Y \subset \mathbb{R}^n$.

a) El vector $d \in \mathbb{R}^n$ es una *dirección global de preferencia, dominación, indiferencia o duda racional* para $y_0 \in Y$ si $\forall \alpha > 0$ tal que $(y_0 + \alpha d, y_0) \in Y \times Y$ se verifica que $(y_0 + \alpha d, y_0)$ pertenece a $R_1, R_1^S, R_2$ ó $R_{12}^C$, respectivamente. La colección de todas las direcciones globales de preferencia, dominación, indiferencia o duda racional originará los conos de preferencia, dominación, indiferencia o duda racional global para $y_0$, representados por $P(y_0)$, $D(y_0)$, $I(y_0)$, $DD(y_0)$, respectivamente.

b) El vector $d \in \mathbb{R}^n$ es una *dirección local de preferencia, dominación, indiferencia o duda racional* para $y_0 \in Y$ fijo, si $\forall \alpha > 0$ tal que $0 < \alpha < \alpha_0$ y $(y_0 + \alpha d, y_0) \in Y \times Y$ se verifica que $(y_0 + \alpha d, y_0)$ pertenece a $R_1, R_1^S, R_2$ ó $R_{12}^C$, respectivamente. La colección de todas las direcciones locales de preferencia, dominación, indiferencia o duda racional originará los conos de preferencia, dominación, indiferencia o duda racional local para $y_0$, representados por $LP(y_0)$, $LD(y_0)$, $LI(y_0)$, $LDD(y_0)$.

A partir de estas definiciones, pasamos a introducir tres tipos de estructuras de aproximación lineal a una estructura de preferencia racional dada.

**Definición 3.2**

Sea $(R_1, R_2)$ una estructura de preferencia racional definida en $Y \subset \mathbb{R}^n$.

a) Se define la *estructura de aproximación lineal inferior* a $(R_1, R_2)$ como la cuaterna de relaciones binarias $(L_1, L_2, L_3, L_4)$ definidas en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ mediante la siguiente expresión

$$L_i = \bigcup_{\substack{y_0 \in Y \\ d \in K_i(y_0) \\ \alpha > 0}} \{(y_0 + \alpha d, y_0)\}$$

donde $K_i(y_0)$ $i = 1, 2, 3, 4$, son iguales a $P(y_0)$, $D(y_0)$, $I(y_0)$, y $DD(y_0)$, respectivamente.

b) La *estructura de aproximación lineal superior* se define del mismo modo, pero considerando $K_i(y_0)$ $i = 1, 2, 3, 4$, como los conos formados por aquellas direcciones $d \in \mathbb{R}^n$, tales que existe algún $\alpha' > 0$ verificando que $(y_0 + \alpha' d, y_0)$ pertenece a $R_1, R_1^S, R_2, R_{12}^C$, respectivamente. A esta estructura se la denotará por $(L_1', L_2', L_3', L_4')$.

c) Finalmente, si hubiésemos considerado $K_i(y_0)$ $i = 1, 2, 3, 4$ como los conos $LP(y_0)$ $LD(y_0)$ $LI(y_0)$ y $LDD(y_0)$, respectivamente, hubieramos obtenido la definición de la *estructura de aproximación lineal local.* A esta estructura se la denotará por por $(L_1^*, L_2^*, L_3^*, L_4^*)$.

Veamos como estas estructuras aproximan la estructura de preferencia $(R_1, R_2)$ a la cual van asociadas.

### Proposición 3.1

Sea $(R_1, R_2)$ una estructura de preferencia racional sobre $Y \subset \mathbb{R}^n$ y $(L_1, L_2, L_3, L_4)$ $(L_1', L_2', L_3', L_4')$ sus estructuras de aproximación lineal inferior y superior, respectivamente. Se verifican las siguientes inclusiones.[2]

$$\begin{array}{ll} L_1 \cap (Y \times Y) \subseteq R_1 \subseteq L_1' \cap (Y \times Y) & L_2 \cap (Y \times Y) \subseteq R_1^S \subseteq L_2' \cap (Y \times Y) \\ L_3 \cap (Y \times Y) \subseteq R_2 \subseteq L_3' \cap (Y \times Y) & L_4 \cap (Y \times Y) \subseteq R_{12}^C \subseteq L_4' \cap (Y \times Y) \end{array}$$

### Demostración

Veamos, en primer lugar, las inclusiones inferiores. Para ello demostraremos la relación $L_1 \cap (Y \times Y) \subseteq R_1$, ya que las restantes se demostrarían de modo análogo. Sea $(y_1, y_2) \in L_1 \cap (Y \times Y)$, por ser $(y_1, y_2) \in L_1$ tendremos que $y_1 - y_2 \in P(y_2)$. Por tanto, a partir de la definición de $P(y_1)$, y tomando $\alpha = 1$, tendremos que $(y_1, y_2) \in R_1$. Veamos ahora las inclusiones superiores, demostrando para ello que $R_1 \subseteq L_1' \cap (Y \times Y)$. Sea $(y_1, y_2) \in R_1$, podemos asegurar, por tanto, que $(y_1, y_2) \in Y \times Y$. Veamos que $(y_1, y_2) \in L_1$. Para ello demostraremos que la dirección $d = y_1 - y_2$ verifica que existe un $\alpha$ tal que $(y_1 + \alpha d, y_2) \in R_1$, lo cual se demuestra tomando $\alpha = 1$. c.q.d.

### Observación 3.1

A la estructura de aproximación lineal local se le da el calificativo de aproximación, debido a que $\forall y_0 \in Y$ existirá un entorno de $y_0$ en $\mathbb{R}^n$, $V$, tal que

$$\begin{array}{ll} L_1^* \cap (V \times \{y_0\}) \subseteq \{R_1 y_0\} \times \{y_0\} & \text{o bien } L_1^* \cap (V \times \{y_0\}) \supseteq \{R_1 y_0\} \times \{y_0\} \\ L_2^* \cap (V \times \{y_0\}) \subseteq \{R_1^S y_0\} \times \{y_0\} & \text{o bien } L_2^* \cap (V \times \{y_0\}) \supseteq \{R_1^S y_0\} \times \{y_0\} \\ L_3^* \cap (V \times \{y_0\}) \subseteq \{R_2 y_0\} \times \{y_0\} & \text{o bien } L_3^* \cap (V \times \{y_0\}) \supseteq \{R_2 y_0\} \times \{y_0\} \\ L_4^* \cap (V \times \{y_0\}) \subseteq \{R_{12}^C y_0\} \times \{y_0\} & \text{o bien } L_4^* \cap (V \times \{y_0\}) \supseteq \{R_{12}^C y_0\} \times \{y_0\} \end{array} .$$

siendo los conjuntos $\{R y_0\} = \{y \in Y / (y, y_0) \in R\}$ donde $R = R_1, R_1^S, R_2, R_{12}^C$.

El entorno $V$ podría depender de la relación $L_i^*$ considerada, pero siempre podemos pasar a un único entorno considerando la intersección de todos ellos.

La linealidad atribuida a estas aproximaciones se debe a que todas las relaciones binarias que la componen cumplen la siguiente propiedad:

$$[p] \quad \text{si} \quad (y_1, y_2) \in R \quad \text{entonces} \quad (y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in R \quad \forall \alpha > 0$$

El siguiente resultado es una caracterización de las estructuras de aproximación lineal inferiores y superiores.

[2]Estas cuatro relaciones las expresamos de forma compacta por $(L_1, L_2, L_3, L_4) << (R_1, R_2^S, R_2, R_{12}^C) << (L_1', L_2', L_3', L_4')$.

**Teorema 3.1**

Sea $(R_1, R_2)$ una estructura de preferencia racional definida en $\mathbb{R}^n$ y $(S, <<)$ el conjunto ordenado de cuaternas binarias, cuyo orden viene definido por la siguiente expresión:

$$(A, B, C, D) << (A', B', C', D') \Longleftrightarrow A \subseteq A',\ B \subseteq B',\ C \subseteq C',\ \text{y } D \subseteq D'.$$

Consideremos los siguientes subconjuntos de $S$.

$C = \{(S_1, S_2, S_3, S_4) \in S :$ donde los $S_i$ $i = 1, 2, 3, 4$ verifican la propiedad $[p]$ y además $(S_1, S_2, S_3, S_4) << (R_1, R_1^S, R_2, R_{12}^C)\}$

$C' = \{(S_1', S_2', S_3', S_4') \in S :$ donde los $S_i$ $i = 1, 2, 3, 4$ verifican la propiedad $[p]$ y además $(R_1, R_1^S, R_2, R_{12}^C) << (S_1, S_2, S_3, S_4)\}$

Se verifican las siguientes igualdades

$$(L_1, L_2, L_3, L_4) = \max\ C \quad \text{y} \quad (L_1', L_2', L_3', L_4') = \min\ C'$$

**Demostración**

Veamos, en primer lugar, que $(L_1, L_2, L_3, L_4) = \max\ C$. Para ello demostraremos que, dado $(S_1, S_2, S_3, S_4) \in C$, se verifica que $(S_1, S_2, S_3, S_4) << (L_1, L_2, L_3, L_4)$. Probaremos entonces que $S_1 \subseteq L_1$, ya que el resto de las inclusiones se demuestran de forma análoga.

Si $(y_1, y_2) \in S_1$, por verificarse la propiedad $[p]$, tendremos que $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in S_1\ \forall\alpha > 0$.

Como $S_1 \subset R_1$, por definición de $C$, el par $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in R_1\ \forall\alpha > 0$. Luego $d = y_1 - y_2 \in P(y_2)$

Por tanto, tal y como se definió $L_1$, tendremos que $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in L_1\ \forall\alpha > 0$. Tomando $\alpha = 1$, se obtiene que $(y_1, y_2) \in L_1$; lo que demuestra que $S_1 \subseteq L_1$.

Hemos demostrado que

$$\forall (S_1, S_2, S_3, S_4) \in C, \quad (S_1, S_2, S_3, S_4) << (L_1, L_2, L_3, L_4).$$

Como $(L_1, L_2, L_3, L_4) \in C$, se obtiene que $(L_1, L_2, L_3, L_4) = \max\ C$.

Veamos la segunda de las igualdades, para ello tenemos que demostrar que, dado $(S_1', S_2', S_3', S_4') \in C'$, se verifica que $(L_1', L_2', L_3', L_4') << (S_1', S_2', S_3', S_4')$. Como en la anterior igualdad, probaremos una de las inclusiones, $L_1' \subseteq S_1'$, ya que el resto se haría de forma análoga.

Si $(y_1, y_2) \in L_1'$ se tiene, por la propiedad $[p]$, que $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in L_1'\ \forall\alpha > 0$. Esto significa, tal y como se define $L_1'$, que $d = y_1 - y_2 \in K_1(y_2)$ siendo este $K_1(y_2)$ el cono que aparece en la definición 3.2.b.

Por tanto, existe algún $\alpha' > 0$ tal que $(y_2 + \alpha'(y_1 - y_2), y_2) \in R_1 \subset S_1'$. Como $S_1'$ verifica la propiedad $[p]$, esto último significa que $\forall\alpha > 0$ $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in S_1'$. Tomando $\alpha = 1$ se obtiene que $(y_1, y_2) \in S_1'$; lo cual demuestra que $L_1' \subseteq S_1'$. Por tanto, hemos demostrado que $\forall\,(S_1', S_2', S_3', S_4') \in$

$C'$ se verifica que $(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) << (S'_1, S'_2, S'_3, S'_4)$. Como $(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) \in C'$ se tiene que $(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4) = \min\ C'$. c.q.d.

Veamos ahora un resultado que nos permite relacionar los diferentes tipos de estructura de aproximación lineal.

**Proposición 3.2**

Sea $(R_1, R_2)$ una estructura de preferencia racional sobre $\mathbb{R}^n$. Si $(L_1, L_2, L_3, L_4)$, $(L'_1, L'_2, L'_3, L'_4)$, y $(L^*_1, L^*_2, L^*_3, L^*_4)$, son las estructuras de aproximación inferior, superior y local, respectivamente, entonces:

$$L_i \subseteq L^*_i \subseteq L'_1 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

**Demostración**

Las inclusiones inferiores $L_i \subseteq L^*_1$ $i = 1, 2, 3, 4$ son fáciles de demostrar, debido a las relaciones entre conos globales y locales obtenidas a partir de su definición (Definición 3.1). Se verifica $\forall y_0 \in Y$ que

$$P(y_0) \subseteq LP(y_0),\ D(y_0) \subseteq LD(y_0),\ I(y_0) \subseteq LI(y_0),\ DD(y_0) \subseteq LDD(y_0)$$

Las inclusiones superiores las demostraremos con el siguiente razonamiento. Sea $(y_1, y_2) \in L^*_1$, por la propiedad [p] verificada por $L^*_1$, se tiene que $\forall \alpha > 0$ $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in L^*_1$. Esto último, por la definición de $L^*_1$, significa que $d = y_1 - y_2 \in LP(y_2)$. Por tanto, existe $\alpha_1$ tal que $\forall \alpha > 0$ con $0 < \alpha < \alpha_1$ $(y_2 + \alpha(y_1 - y_2), y_2) \in R_1 \subset L'_1$. Tomando $\alpha = 1$ se obtiene que $(y_1, y_2) \in L'_1$ y por tanto $L^*_1 \subseteq L'_1$.

Las demostraciones del resto de inclusiones $L^*_i \subseteq L'_i$ $i = 2, 3, 4$ son análogas. c.d.q.

## 4. CONCLUSIONES

Con el concepto de estructura de preferencia racional se ha dado un marco, en el análisis de decisiones multiobjetivo, en donde tiene cabida una tercera actitud racional como es la duda. Esta no sólo será consecuencia de una postura consciente por parte del decisor, sino que puede surgir de forma inconsciente cuando dicha persona comete incoherencias en sus juicios. Parecería lógico admitir, como problema abierto, la posibilidad de crear niveles dentro de esta tercera actitud del decisor. Surgiría así una actitud de duda cuantificada, seguramente en términos de la probabilidad de elegir alguna otra actitud complementaria, similar a lo aparecido en los modelos de juicios probabilísticos. (Un buen resumen de todos ellos puede encontrarse en Roberts (1979)).

Las estructuras de aproximación lineal son buenas herramientas para la búsqueda de soluciones óptimas debido al carácter "lineal" que poseen las relaciones binarias que la componen. El teorema de caracterización, que se ofrece para las aproximaciones superiores e inferiores constituye un punto de partida idóneo para la descripción de estructuras de preferencia racionales a partir de relaciones entre dichas aproximaciones. (ver Pachón y Ríos–Insua (1991b)).

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado como parte del proyecto de la DG ICYT PS 89–0027.

## BIBLIOGRAFIA

[1] CHIEN, I. S., YU, P. L. Y ZHANG, D. (1990): Indefinite Preference Structure and Decision Analysis. J.O.T.A. 64.

[2] FISHBURN, P. C. (1970): Utility Theory for Decision Making. Wiley, New York.

[3] FRENCH, S. (1986): Decision Theory. Ellis Horwood, Chichester.

[4] PACHON, J. G. (1990): Aproximaciones de Estructuras de Preferencia en Problemas de Decisión Multiobjetivo. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Madrid.

[5] PACHON, J. G. Y RIOS – INSUA, S. (1991a): Preference Structure: Modelling the Attitudes in Multiobjective Decision Making. Actas de la XIX Reunión Nacional de la S.E.I.O. Segovia.

[6] PACHON, J. G. Y RIOS – INSUA, S. (1991b): Applications of Linear Approximation Structures to the Description of Preference Structures. Proceedings de IIASA Workshop. Varsovia (a aparecer en LNEMS Springer Verlag).

[7] RIOS, S., RIOS – INSUA, M. J. Y RIOS – INSUA, S. (1989): Procesos de Decisión Multicriterio EUDEMA, Madrid.

[8] RIOS – INSUA, D. (1990): Sensitivity Analysis in Multiobjective Decision Making L.N.E. M.S., Springer Verlag, Berlin.

[9] ROBERTS, F. (1979): Measurement Theory. Addison Wesley, Massachusetts.

[10] YU, P. L. (1985): Multiple Criteria Decision Making. Plenum Press, New York.