# *Sobre espacios de Banach localmente uniformemente rotundos*

POR V. MONTESINOS Y J. R. TORREGROSA[1]

Recibido el 3 de Junio de 1992

*Presentado por el Académico Correspondiente D. Manuel López Pellicer*

## Abstract

In this paper we characterize property (LUR) in two ways: according to McShane method and using the notion of "remainder". We also prove that property (LUR) is stable for generalized Banach products and we study another hereditary properties of it.

## 1. NOTACION

Seguimos la terminología estandar que puede encontrarse en [2]. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. $B_X$ denota su bola unidad cerrada, $S_X$ la esfera unidad, $X^*$ el dual topológico de $X$ y $\mathrm{conv}(A)$ la envoltura convexa de un subconjunto $A$ de $X$. Denotamos por $\mathrm{diam}(A)$ y $\alpha(A)$ el diámetro y el índice de Kuratowski de no compacidad, respectivamente, de un subconjunto $A$ de $X$. $\mathbb{K}$ denota el cuerpo de los números reales o complejos.

## 2. INTRODUCCION

En [1] J.A. Clarkson introdujo la noción de uniforme rotundidad de la norma en un espacio de Banach. Demostró que para $p > 1$ los espacios $l^p$ y $L^p$ son uniformemente rotundos. Por otra parte, D.P. Milman [7] probó la reflexividad de los espacios uniformemente rotundos.

Posteriormente, A.R. Lovaglia [5] introdujo el concepto de local uniforme rotundidad (LUR) y estudió el comportamiento de esta propiedad en relación con los productos de Banach de tipo $l^p$. En este trabajo completamos los resultados de Lovaglia estableciendo la estabilidad de esta propiedad para los espacios introducidos por R. Huff [4] que generalizan los "productos de Banach" para una cantidad numerable de espacios.

Obtenemos dos nuevas caracterizaciones de la propiedad (LUR) desde diferentes puntos de vista. Una de ellas siguiendo el método de McShane [6] y la otra usando el concepto de "resto" introducido por S. Rolewicz [8].

[1]Departamento de Matemática aplicada. ETS I. Telecomunicación. Univ. Politécnica de Valencia.

Además, la segunda caracterización permite dar una demostración puramente geométrica del Teorema de James para espacios de Banach con la propiedad (LUR).

Consideremos ahora las siguientes definiciones:

**Definición 2.1**

Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es *Rotundo* (R) si, dados $x, y \in S_X$, con $x \neq y$, entonces $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$.

**Definición 2.2**

Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es *Uniformemente Rotundo* (UR) si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta \text{ siempre que } \|x - y\| \geqslant \varepsilon \text{ y } \quad x, y \in S_X.$$

La función $\delta : [0, 2] \longrightarrow [0, 1]$, definida de la forma

$$\delta(\varepsilon) = \inf \left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \; : \; x, y \in S_X \;,\; \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\}$$

recibe el nombre de *Módulo de Rotundidad* del espacio $(X, \|\cdot\|)$.

$S_X$ puede ser sustituida por $B_X$ en la definición anterior dando el mismo valor para $\delta(\cdot)$.

Es evidente, a partir de la definición, que $\delta(0) = 0$ y $0 \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon/2$, $\forall \varepsilon \in [0, 2]$, por tanto $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \delta(\varepsilon) = 0$.

**Definición 2.3**

Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es *Localmente Uniformemente Rotundo* (LUR) si, dado $\varepsilon > 0$ y un elemento $x_0$ con $\|x_0\| = 1$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que

$$\left\|\frac{x_0+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta \quad \text{siempre que} \quad \|x_0 - y\| \geqslant \varepsilon \text{ e } y \in S_X.$$

Obtenemos una definición equivalente tomando $y$ en $B_X$ en lugar de en $S_X$. La función "*Módulo*" $\delta(x_0, \cdot)$ definida por

$$\delta(x_0, \varepsilon) = \inf \left\{1 - \left\|\frac{x_0+y}{2}\right\| \; : \; y \in S_X \,,\; \|x_0 - y\| \geqslant \varepsilon\right\},$$

es la misma que la función obtenida tomando y en $B_X$.

Es evidente, a partir de la definición, que

$$\text{(UR)} \Rightarrow \text{(LUR)} \Rightarrow \text{(R)}.$$

Es bien conocido que las implicaciones inversas no son, en general, ciertas. Mencionamos dos ejemplos pertinentes.

**Ejemplo 1.** Sea $X$ un espacio de Banach separable no reflexivo. Por el Teorema de renorma de Troyanski [9], $X$ tiene una norma equivalente $\|\cdot\|$ con la cual es localmente uniformemente rotundo. Por tanto, este ejemplo permite separar las propiedades (LUR) y (UR).

**Ejemplo 2.** Sea $C$ el espacio de Banach de todas las sucesiones convergentes con la norma

$$\|x\| = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2 + |x|_n^2}{2^{n+1}} \right]^{1/2}, \quad \forall x = (x_n) \in C,$$

donde $|x|_n = \sup\{|x_k| \; : \; k \geqslant n\}$.

S.L. Troyanski [10] probó que $(C, \|\cdot\|)$ es rotundo, pero no tiene la propiedad $(Lv)$ (i.e. dado $f \in X^*$, $\|f\| = 1$, tal que $f$ alcanza su supremo en $B_X$, entonces $\operatorname{diam} S(f, \varepsilon) \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0^+$, donde $S(f, \varepsilon) = \{x \in B_X \; : \; f(x) \geqslant 1 - \varepsilon\}$). Es fácil probar que todo espacio (LUR) tiene la propiedad $(Lv)$.

### Definición 2.4

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Por "*La gota*", $D(x_0, B_X)$, definida por un elemento $x_0 \in X$, $x_0 \notin B_X$ entendemos la envoltura convexa del conjunto $\{x_0\} \cup B_X$, $D(x_0, B_X) = \operatorname{conv}(\{x_0\} \cup B_X)$.

El subconjunto de $X$, $D(x_0, B_X)/B_X$, recibe el nombre de "*resto*" de $x_0$ y se denota por $R(x_0)$.

### Definición 2.5

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $A$ un subconjunto de $X$. Llamamos *Indice de Kuratowski de no compacidad de* $A$, $\alpha(A)$, al ínfimo de los números positivos $r$ tales que $A$ se puede recubrir por un número finito de conjuntos de diámetro menor que $r$.

## 3. CARACTERIZACIONES

El siguiente resultado caracteriza la propiedad (LUR) en términos de sucesiones. Se verifica de forma inmediata a partir de la definición de (LUR).

### Proposición 3.1

*Un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *es localmente uniformemente rotundo si y sólo si* $\lim_n \|x_n - x_0\| = 0$ *para cada* $x_0 \in S_X$ *y* $(x_n)$ *una sucesión en* $B_X$

*tal que*

$$\lim_n \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_0) \right\| = 1.$$

En el siguiente resultado caracterizamos la propiedad (LUR) utilizando el método de E.J. McShane [6].

### Teorema 3.2

*Sea p tal que* $1 < p < +\infty$ . *Un espacio de Banach* $(X, \|\cdot\|)$ *es localmente uniformemente rotundo si y sólo si dado* $\varepsilon > 0$ *y* $x_0 \in S_X$ *existe* $\delta_p(x_0, \varepsilon) > 0$ *tal que para* $x \in B_X$ *y* $\|x - x_0\| \geqslant \varepsilon$ *se tiene*

$$\left\| \frac{x + x_0}{2} \right\|^p \leqslant (1 - \delta_p) \left[ \frac{1}{2} (\|x\|^p + \|x_0\|^p) \right]. \qquad (i)$$

*Para* $x \in X$ *arbitrario, tenemos por tanto*

$$\left\| \frac{x + x_0}{2} \right\|^p \leqslant \left[ 1 - \delta_p \left( \frac{\|x - x_0\|}{\sup(\|x\|, \|x_0\|)} \right) \right] \frac{1}{2} (\|x\|^p + \|x_0\|^p). \qquad (ii)$$

**Demostración:**

Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ satisface (i). Dado $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in S_X$ elegimos, a partir de la hipótesis, $\delta_p > 0$ correspondiente a $\varepsilon$ y $x_0$.

Consideremos que $x \in S_X$ con $\|x - x_0\| \geqslant \varepsilon$. Entonces

$$\left\| \frac{x + x_0}{2} \right\|^p \leqslant (1 - \delta_p) \left[ \frac{1}{2} (\|x\|^p + \|x_0\|^p) \right] = 1 - \delta_p.$$

Así

$$\left\| \frac{1}{2}(x + x_0) \right\| \leqslant (1 - \delta_p)^{1/p} = 1 - \delta,$$

donde $\delta = 1 - (1 - \delta_p)^{1/p} > 0$. Por tanto $(X, \|\cdot\|)$ es (LUR).

Recíprocamente, supongamos que (i) es falso. Entonces, existe $\varepsilon > 0$, $x_0 \in S_X$ y una sucesión $(x_n)$ en $B_X$ con $\|x_n - x_0\| \geqslant \varepsilon$ tal que

$$\frac{\left\| \frac{1}{2}(x_n + x_0) \right\|^p}{\frac{1}{2} (\|x_n\|^p + \|x_0\|^p)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \qquad (1)$$

Por otra parte, tenemos

$$\left( \frac{1}{2}(1 + a) \right)^p \leqslant \frac{1}{2}(1 + a^p), \quad \forall a \geqslant 0,$$

y la función

$$f(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}(1+t)\right)^p}{\frac{1}{2}(1+t^p)}, \quad t \geqslant 0$$

alcanza su máximo para $t \geqslant 0$ en $t = 1$, donde $f(1) = 1$, y verifica que

$$\forall r,\ 0 < r < 1,\ \exists \mu,\ 0 < \mu < 1 \text{ tal que } f(t) < \mu \text{ para } t \in [0, r] \qquad (2)$$

Vamos a demostrar en primer lugar que (1) sólo es posible si $\|x_n\| \longrightarrow 1$. Supongamos, por el contrario, que $(\|x_n\|)$ no es convergente a 1. Podemos elegir $0 < r < 1$ y una subsucesión $(x_{n_k})$ de $(x_n)$ con $\|x_{n_k}\| \leqslant r$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces

$$\left\|\frac{1}{2}(x_{n_k} + x_0)\right\|^p \leqslant \left(\frac{1}{2}(1 + \|x_{n_k}\|)\right)^p \leqslant \frac{\mu}{2}(1 + \|x_{n_k}\|^p) =$$

$$= \frac{\mu}{2}(\|x_0\|^p + \|x_{n_k}\|^p), \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

donde $\mu$ es el número correspondiente a $r$ en (2). Esto contradice (1).

Si ahora tomamos

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \quad n \in \mathbb{N},$$

resulta que

$$\|y_n - x_n\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, se tiene $\|y_n - x_0\| \geqslant \varepsilon/2$. Además, a partir de (1),

$$\lim_n \left\|\frac{1}{2}(y_n + x_0)\right\| = 1.$$

En virtud de la Proposición 3.1 esto contradice la local uniforme rotundidad de $(X, \|\cdot\|)$.

Utilizando el concepto de "resto" introducido en la Definición 2.4 obtenemos una nueva caracterización de la propiedad (LUR).

**Teorema 3.3**

*Un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es localmente uniformemente rotundo si y sólo si para cada $x_0 \in S_X$,* $\operatorname{diam} R(tx_0) \longrightarrow 0$ *cuando $t \longrightarrow 1^+$.*

**Demostración:**

Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ es (LUR). Entonces $\delta(x, \varepsilon) > 0$ para cada $x \in S_X$ y $0 < \varepsilon \leqslant 2$, donde

$$\delta(x, \varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \;:\; y \in S_X,\ \|x - y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Fijado $x \in S_X$, la función $\delta(x,\cdot)$ definida de $]0,2]$ en $]0,1]$ es no decreciente. Definimos $\delta'(x,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}\delta(x,\varepsilon)$, una función estrictamente monótona creciente dominada por $\delta(x,\cdot)$. Entonces, si $y \in S_X$ con $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$, tenemos

$$1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \geqslant \delta(x,\varepsilon) \geqslant \delta'(x,\varepsilon).$$

Por tanto

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta'(x,\varepsilon), \quad \forall y \in S_X, \ \|x-y\| \geqslant \varepsilon.$$

En particular

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta'(x, \|x-y\|).$$

Tomamos ahora $x_0 \in S_X$ y $t > 1$. Vamos a calcular el diámetro de $R(a)$, donde $a = tx_0$. Sea $x \in R(a)$, $x \neq a$. Entonces $1 < \|x\| < \|a\|$.

Además

$$1 < \left\| \frac{x+a}{2} \right\| = \|a\| \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\|a\|} + \frac{a}{\|a\|}\right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|a\| \left[ \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\|x\|} + \frac{a}{\|a\|}\right) \right\| + \frac{\|x\|}{2}\left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|a\|}\right) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \|a\| \left(1 - \delta'\left(x_0, \left\| \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| \right)\right) + \|a\| \left(1 - \frac{1}{\|a\|}\right).$$

Obtenemos

$$\frac{1}{\|a\|} \leqslant 1 - \delta'\left(x_0, \left\| \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| \right) + \left(1 - \frac{1}{\|a\|}\right),$$

entonces

$$\delta'\left(x_0, \left\| \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| \right) \leqslant 2\left(1 - \frac{1}{\|a\|}\right) = 2\left(\frac{\|a\|-1}{\|a\|}\right).$$

Puesto que la función $\delta'(x_0,\cdot)$ es estrictamente creciente, tenemos

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| \leqslant (\delta'(x_0,\cdot))^{-1}\left(2\left(\frac{\|a\|-1}{\|a\|}\right)\right).$$

Por otra parte

$$\|x-a\| = \|a\| \left\| \frac{x}{\|a\|} - \frac{a}{\|a\|} \right\| \leqslant \|a\| \left[ \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{a}{\|a\|} \right\| + \|x\| \left(\frac{1}{\|x\|} - \frac{1}{\|a\|}\right) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \|a\| \left[ (\delta'(x_0,\cdot))^{-1}\left(2\left(\frac{\|a\|-1}{\|a\|}\right)\right) + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|a\|}\right) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \|a\|\left[(\delta'(x_0,\cdot))^{-1}\left(2\left(\frac{\|a\|-1}{\|a\|}\right)\right)\right]+\|a\|-\|x\|.$$

Por tanto, puesto que $\|a\| = t$, se tiene

$$\operatorname{diam} R(a) = \operatorname{diam} R(tx_0) \leqslant 2\left[t(\delta'(x_0,\cdot))^{-1}\left(2\left(\frac{t-1}{t}\right)\right)+t-1\right] \tag{1}$$

y el segundo miembro de esta desigualdad tiende a 0 cuando $t \longrightarrow 1^+$.

Recíprocamente, supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ no tiene la propiedad (LUR). Entonces existe $x_0 \in S_X$, $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_n)$ en $S_X$ tal que

$$\|x_n - x_0\| \geqslant \varepsilon \quad \text{y} \quad \left\|\frac{x_n + x_0}{2}\right\| > 1 - \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Elegimos $t$ tal que

$$2 > t > \frac{n}{n-1} > 1, \quad n = 3, 4, 5, \ldots$$

Entonces

$$\left\|t\frac{x_n + x_0}{2}\right\| > \frac{n}{n-1}\left\|\frac{x_n + x_0}{2}\right\| > \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Además, $t\dfrac{x_n + x_0}{2}$ es una combinación convexa de $x_n$ y un múltiplo de $x_0$:

$$t\frac{x_n + x_0}{2} = \frac{t}{2}x_0 + \frac{t}{2}x_n = \frac{t}{2}x_n + (1 - t/2)\left(\frac{t/2}{1 - t/2}x_0\right).$$

(Obsérvese que

$$\frac{t/2}{1 - t/2} = \frac{t}{2 - t} > 1$$

ya que $1 < t < 2$.

Por tanto

$$t\frac{x_n + x_0}{2} \in R\left(\frac{t/2}{1 - t/2}x_0\right) = R\left(\frac{t}{2 - t}x_0\right),$$

y

$$\left\|t\frac{x_n + x_0}{2} - \frac{t}{2 - t}x_0\right\| = \left\|\frac{t}{2}(x_n - x_0) + \frac{t}{2}x_0 + \frac{t}{2}x_0 - \frac{t}{2 - t}x_0\right\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{t}{2}\varepsilon - \left(t - \frac{t}{2 - t}\right).$$

Pero, cuando $n \longrightarrow +\infty$ podemos elegir $t$ tan próximo a 1 como queramos. Entonces, podemos elegir $n$ suficientemente grande de manera que la distancia entre

$$t\frac{x_n + x_0}{2} \quad \text{y} \quad \frac{t}{2 - t}x_0$$

sea mayor que $\varepsilon/3$. Esto contradice el hecho de que $\operatorname{diam} R(tx_0)$ tiende a 0 cuando $t \longrightarrow 1^+$. Esta contradicción pone fin a la prueba.

**Proposición 3.4**

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sea $f \in S_{X^*}$ que alcanza el supremo sobre $B_X$, en $x_0 \in S_X$. Entonces, si* $\operatorname{diam} R(tx_0) \longrightarrow 0$ *cuando $t \longrightarrow 1^+$, diam $S(f, \varepsilon) \longrightarrow 0$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$.*

**Demostración:**

Sea $x, y \in S(f, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ dado. Entonces $f(x) \geqslant 1-\varepsilon$ y $f(y) \geqslant 1-\varepsilon$. Llamamos

$$z(x) = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)x_0 + \frac{1}{2}x \in D\Big((1+2\varepsilon)x_0, B_X\Big)$$

$$z(y) = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)x_0 + \frac{1}{2}y \in D\Big((1+2\varepsilon)x_0, B_X\Big)$$

Pero,

$$f(z(x)) = \frac{1}{2}(1+2\varepsilon)f(x_0) + \frac{1}{2}f(x) \geqslant \frac{1}{2}(1+2\varepsilon) + \frac{1}{2}(1-\varepsilon) = 1+\varepsilon/2 > 1,$$

luego $z(x) \in R((1+2\varepsilon)x_0)$. Análogamente, $z(y) \in R((1+2\varepsilon)x_0)$.

Por tanto,

$$\text{si } x, y \in S(f, \varepsilon), \text{ entonces } z(x),\ z(y) \in R((1+2\varepsilon)x_0).$$

Sea $\delta > 0$ arbitrario. Entonces existe $t_0 > 1$ tal que $\operatorname{diam} R(tx_0) < \delta$ si $1 < t \leqslant t_0$. Tomamos $\varepsilon_0 > 0$ con $1+2\varepsilon_0 = t_0$. Resulta que, si $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ y $x, y \in S(f, \varepsilon)$, entonces $z(x)$, $z(y) \in R((1+2\varepsilon)x_0)$. Obtenemos

$$\|z(x) - z(y)\| < \delta.$$

Pero,

$$\delta > \|z(x) - z(y)\| = \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

Por tanto, $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \operatorname{diam} S(f, \varepsilon) = 0$.

Utilizando el Teorema 3.3 obtenemos una demostración geométrica de la caracterización de James de reflexividad para espacios de Banach con la propiedad (LUR).

**Proposición 3.5**

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con la propiedad (LUR) tal que todo elemento de $X^*$ alcanza su supremo sobre $B_X$. Entonces $X$ es reflexivo.*

**Demostración:**

En virtud del Teorema 3.3 y de la Proposición 3.4 el espacio $(X, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad $(Lv)$.

Tomemos $0 < \varepsilon < 1$. Entonces, para todo $f \in S_{X^*}$ podemos encontrar $\delta_f > 0$ tal que $\operatorname{diam} S(f, \delta_f) < \varepsilon$ y, por tanto, $\alpha(S(f, \delta_f)) < \varepsilon$.

Supongamos que $X$ no es reflexivo. En virtud del Lema de Riesz [3] podemos encontrar un elemento $z \in X^{**}$, con $\|z\| = 1$ y tal que $d(z, X) > \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2}$. Por el Teorema de Bishop–Phelps [3], existe $z_0 \in X^{**}$ tal que $\|z_0\| = 1$, $\|z - z_0\| < \frac{1-\varepsilon}{2}$ y de modo que

$$\exists f_0 \in S_{X^*} \quad \text{con} \quad f_0(z_0) = \|z_0\|.$$

Como

$$\|z_0 - x\| = \|z - x - (z - z_0)\| \geqslant \|z - x\| - \|z - z_0\| > \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{2} - \frac{1-\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para $x \in X$ arbitrario, podemos concluir que $d(z_0, X) > \varepsilon$.

Por otra parte, existe $\delta_{f_0} > 0$ tal que $\delta(S(f_0, \delta_{f_0})) < \varepsilon$, luego la sección $S(f_0, \delta_{f_0})$ puede cubrirse con una cantidad finita de conjuntos en $X$, $B_1$, $B_2, \dots, B_m$, de diámetro menor que $\varepsilon$.

Como $B_X$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$– densa en $B_{X^{**}}$, podemos encontrar una red $\{x_i, i \in I \leqslant\}$ en $B_X$ que sea $\sigma(X^{**}, X^*)$– convergente a $z_0$, en particular

$$f_0(x_i) \xrightarrow{i} f_0(z_0) = 1.$$

Resulta pues que

$$z_0 \in \overline{S(f_0, \delta_{f_0})}^{\sigma(X^{**}, X^*)}.$$

Sin embargo,

$$S(f_0, \delta_{f_0}) \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_m \subset \overline{B_1}^{\sigma^*} \cup \dots \cup \overline{B_m}^{\sigma^*}$$

luego

$$z_0 \in \overline{B_1}^{\sigma^*} \cup \overline{B_2}^{\sigma^*} \cup \dots \cup \overline{B_m}^{\sigma^*}.$$

Puesto que los conjuntos $\overline{B_k}^{\sigma^*}$, $k = 1, 2, \dots, m$, siguen siendo de diámetro menor que $\varepsilon$, podemos afirmar que $d(z_0, X) < \varepsilon$, lo cual está en contradicción con la elección de $z_0$. Esta contradicción permite afirmar que $X$ es reflexivo.

**Nota:** En realidad, se ha probado el Teorema de James para aquellos espacios de Banach con la propiedad $(L\alpha)$, es decir, que todo funcional lineal y continuo que alcance el supremo sobre $B_X$ determine secciones con índice de Kuratowski convergente a cero.

## 4. HEREDABILIDAD DE LA PROPIEDAD (LUR)

Sea $(X\|\cdot\|)$ un espacio de Banach e $Y$ un subespacio cerrado. Es evidente que si $(X, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad (LUR) entonces $Y$, con la norma inducida, tiene también dicha propiedad.

Generalmente, los espacios cocientes no conservan esta propiedad. Sin embargo, la citada heredabilidad será cierta bajo ciertas condiciones.

### Definición 4.1

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un subespacio $Y$ de $X$ se llama *Proximinal* si $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ tal que $d(x, Y) = \|x - y\|$.

Probablemente, el siguiente lema es conocido. A falta de referencias, incluimos su prueba.

### Lema 4.2

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Un subespacio cerrado $Y$ of $X$ es proximinal si y sólo si la imagen de la bola unidad cerrada de $X$ por la aplicación cociente $q : X \longrightarrow X/Y$ es la bola unidad cerrada de $X/Y$.*

### Demostración:

Evidentemente, $\|\bar{x}\| = d(x, Y)$ $\forall \bar{x} \in X/Y$, $\forall x \in \bar{x}$, por lo que $q(B_X) \subset B_{X/Y}$. Supongamos que $Y$ es proximinal. Vamos a demostrar que $B_{X/Y} \subset q(B_X)$. Sea $\bar{x}_0 \in B_{X/Y}$ y $x_0 \in \bar{x}_0$. Existe $y_0 \in Y$ tal que

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, Y) = \|\bar{x}_0\| \leqslant 1.$$

Entonces, $q(x_0 - y_0) = \bar{x}_0$ y $x_0 - y_0 \in B_X$. Por tanto $B_{X/Y} \subset q(B_X)$ y así $B_{X/Y} = q(B_X)$.

Recíprocamente, supongamos que $q(B_X) = B_{X/Y}$. Sea $x_0 \in X$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $d(x_0, Y) = 1$ (si $d(x_0, Y) = 0$ tenemos $x_0 \in Y$). Entonces $\|\bar{x}_0\| = 1$ y existe $z_0 \in B_X$ tal que $q(z_0) = \bar{x}_0$. Sea $z_0 = x_0 - y_0$ con $y_0 \in Y$. Así, $\|x_0 - y_0\| \leqslant 1$ pero $\|x_0 - y_0\| \geqslant 1$. Obtenemos $\|x_0 - y_0\| = 1$ e $Y$ is proximinal.

### Proposición 4.3

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con la propiedad (LUR). Sea $Y$ un subespacio cerrado proximinal de $X$. Entonces $(X/Y, \|\cdot\|)$ tiene también la propiedad (LUR).*

### Demostración:

Consideremos $\varepsilon > 0$ y $\bar{x}_0 \in S_{X/Y}$. Sea $\bar{x} \in B_{X/Y}$ tal que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| \geqslant \varepsilon$. Vamos a demostrar que existe $\delta = \delta(\bar{x}_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}_0) \right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Por el Lema 4.2 podemos deducir que $S_{X/Y} \subset q(S_X)$, entonces

$$\exists x_0 \in S_X \text{ y } \exists x \in B_X \quad \text{tal que} \quad q(x_0) = \bar{x}_0 \quad \text{y} \quad q(x) = \bar{x}.$$

Puesto que $\|x - x_0\| \geqslant \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \geqslant \varepsilon$ y usando el hecho de que $(X, \|\cdot\|)$ es (LUR), existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{1}{2}(\bar{x} + \bar{x}_0) \right\| \leqslant \left\| \frac{1}{2}(x + x_0) \right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Así pues $X/Y$ tiene la propiedad (LUR).

La estabilidad de la propiedad (LUR) para productos finitos tiene respuesta negativa para $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_1$. El espacio de Banach $(1^2, \|\cdot\|_2)$ es uniformemente rotundo [1], luego es (LUR). Sin embargo $(l^2 \times l^2, \|\cdot\|_\infty)$ no tiene esta propiedad puesto que, en particular, no es rotundo.

En cuanto a la norma $\|\cdot\|_1$ tenemos el siguiente resultado negativo:

**Proposición 4.4**

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Sea $Y = X \times \mathbb{R}$ con la norma $\|(x,t)\|_1 = \|x\| + |t|$. Entonces $(Y, \|\cdot\|_1)$ no tiene la propiedad (LUR).*

**Demostración:**

En primer lugar, vamos a probar que $S_X \times \{0\} \subset \overline{R((1+\delta)x_0)}$, donde $\delta > 0$ y $x_0 = (0,1)$. Sea $(x,0) \in S_X \times \{0\}$. Consideramos la sucesión

$$x_n = \left( \left(1 - \frac{1}{2n}\right) x, \ \frac{1+\delta}{2n} \right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Es inmediato que $(x_n)$ es $\|\cdot\|_1-$ convergente a $(x,0)$. Además

$$\|x_n\|_1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{\delta}{2n} = 1 + \frac{\delta}{2n} > 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$x_n = \lambda_n(x,0) + (1 - \lambda_n)(1+\delta)x_0 \text{ con } \lambda_n = 1 - \frac{1}{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Así $x_n \in R((1+\delta)x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y entonces $(x,0) \in \overline{R((1+\delta)x_0)}$.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{diam} S_X = 2$, tenemos que $\overline{R((1+\delta)x_0)}$, y por tanto $R((1+\delta)x_0)$, tiene diámetro mayor o igual que 2. Puesto que esto es cierto para $\delta > 0$ arbitrario podemos deducir, en virtud del Teorema 3.3, que $(Y, \|\cdot\|_1)$ no tiene la propiedad (LUR).

Los siguientes espacios han sido introducidos por R. Huff en [4].

**Definición 4.5**

Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base $\{e_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \right\| .$$

Sea $\{X_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios de Banach. Consideramos el espacio

$$Y(X_1, X_2, \ldots) = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \, e_n \in Y \right\},$$

dotado con la norma

$$\|x\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \ e_n \right\|_Y$$

El espacio $Y(X_1, X_2, \ldots)$ con esta norma es un espacio de Banach.

El siguiente resultado demuestra la estabilidad de la propiedad (LUR) para los espacios $Y(X_1, X_2, \ldots)$.

**Teoema 4.6**

*Sea $(Y, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base $\{e_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que*

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \right\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n \right\| .$$

*Sea $\{X_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ una familia de espacios de Banach con la propiedad (LUR). Si $(Y, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad (LUR), entonces $Y(X_1, X_2, \ldots)$ tiene también esta propiedad.*

**Demostración:**

Sea $x^0 = (x_n^0)$ un elemento en la esfera unidad de $Y(X_1, X_2, \ldots)$ y sea $\{y^p\}_{p=1}^{\infty}$, donde $y^p = (y_1^p, y_2^p, \ldots, y_k^p, \ldots)$, una sucesión de elementos de la bola unidad de $Y(X_1, X_2, \ldots)$. Definimos

$$x^k = (0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \ldots), \quad k \geqslant 1,$$

$$y^{p,k} = (0, 0, \ldots, 0, y_{k+1}^p, y_{k+2}^p, \ldots), \quad k \geqslant 1, \ p = 1, 2, \ldots$$

Supongamos que $\lim_{p \to \infty} \|x^0 + y^p\| = 2$. En virtud de la Proposición 3.1, el Teorema quedará probado si demostramos que $\lim_{p \to \infty} \|x^0 - y^p\| = 0$.

Supongamos, por el contrario, que la igualdad no es cierta. Entonces existe una subsucesión de $\{y^p\}_{p=1}^{\infty}$, que denotamos igual, para la cual $\|x^0 - y^p\| \geqslant r > 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
0 < r \leqslant \|x^0 - y^p\| &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| = \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{k} \|x_n^0 - y_n^p\|\, e_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\| \sum_{n=1}^{k} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| + \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\| \sum_{n=1}^{k} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| + \|x^k\| + \|y^{p,k}\|.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\left\| \sum_{n=1}^{k} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| \geqslant r - (\|x^k\| + \|y^{p,k}\|).
$$

Por otra parte, es fácil probar que

$$
\lim_{p \to \infty} (\|y_k^p\|) = \|x_k^0\| \quad \text{y} \quad \lim_{p \to \infty} (\|y^{p,k}\|) = \|x^k\|.
$$

Entonces, puesto que $\lim_{k \to \infty} (\|x^k\|) = 0$, existe $k$ y $p_0$ tal que para todo $p \geqslant p_0$, $\|x^k\| + \|y^{p,k}\| < r$. En consecuencia para esta elección de $k$ y para todo $p \geqslant p_0$,

$$
\left\| \sum_{n=1}^{k} \|x_n^0 - y_n^p\| e_n \right\| \geqslant s > 0.
$$

Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant n_0 \leqslant k$, y una subsucesión de $p's$ para los que $\|x_{n0}^0 - y_{n0}^p\| \geqslant t > 0$. Ahora

$$
\|x_{n0}^0 + y_{n0}^p\| \leqslant \|x_{n0}^0\| + \|y_{n0}^p\| \quad \text{y} \quad \lim_{p \to \infty} (\|x_{n0}^0\| + \|y_{n0}^p\|) = 2\|x_{n0}^0\|.
$$

Así $\|x_{n0}^0\| \neq 0$. Y por ello existe una subsucesión de $p's$ tal que $\|y_{n0}^p\| \neq 0$. Ahora

$$
\begin{aligned}
&\lim_{p \to \infty} \inf \left\| \frac{x_{n0}^0}{\|x_{n0}^0\|} - \frac{y_{n0}^p}{\|y_{n0}^p\|} \right\| = \\
&= \lim_{p \to \infty} \inf \left\| \frac{x_{n0}^0}{\|x_{n0}^0\|} - \frac{y_{n0}^p}{\|x_{n0}^0\|} \right\| \geqslant \frac{t}{\|x_{n0}^0\|} \geqslant t > 0,
\end{aligned}
$$

puesto que

$$
\lim_{p \to \infty} (\|y_{n0}^p\|) = \|x_{n0}^0\| \quad \text{y} \quad \|x_{n0}^0\| \leqslant 1.
$$

Por tanto, como $X_{n_0}$ es (LUR) se tiene

$$\lim_{p\to\infty} \sup \left\| \frac{x^0_{n_0}}{\|x^0_{n_0}\|} + \frac{y^p_{n_0}}{\|y^p_{n_0}\|} \right\| \leqslant 2 - \delta_{n_0},$$

donde $\delta_{n_0} = \delta_{n_0}(x^0_{n_0}, t) > 0$.

Entonces

$$\lim_{p\to\infty} \sup \|x^0_{n_0} + y^p_{n_0}\| \leqslant (2-\delta_{n_0})\|x^0_{n_0}\|.$$

Pero $\|x^0 + y^p\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{k} \|x^0_n + y^p_n\| e_n \right\| + \|x^k\| + \|y^{p,k}\|$. Por tanto

$$\lim_{p\to\infty} \sup \|x^0 + y^0\| \leqslant \left\| \sum_{n=1}^{k} \lim_{p\to\infty} \sup \|x^0_n + y^p_n\| e_n \right\| + 2\|x^k\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| (2-\delta_{n_0})\|x^0_{n_0}\| e_{n_0} + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{k} 2\|x^0_n\| e_n \right\| + 2\|x^k\|.$$

Tomando $k$ suficientemente grande, tenemos

$$\lim_{p\to\infty} \sup \|x^0 + y^0\| \leqslant \left\| (2-\delta_{n_0})\|x^0_{n_0}\| e_{n_0} + \sum_{\substack{n=1\\ n\neq n_0}}^{k} 2\|x^0_n\| e_n \right\| < 2.$$

Pero esto contradice la suposición de que $\lim_{p\to\infty} \|x^0 + y^p\| = 2$. Con esta contradicción termina la prueba del Teorema.

Teniendo en cuenta que $(l^p, \|\cdot\|_p)$ con $1 < p < +\infty$ es un espacio de Banach con la propiedad (LUR) (ya que es uniformemente rotundo [1]) y con base $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ que satisface las condiciones del Teorema 4.6, podemos obtener, como una consecuencia inmediata del citado Teorema, el siguiente resultado debido a A. R. Lovaglia [5].

**Corolario 4.7**

*Sea $p$ con $1 < p < +\infty$ y $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de espacios de Banach. Consideramos el espacio de Banach $l^p(X_1, X_2, \ldots)$ definido por*

$$l^p(X_1, X_2, \ldots) = \left\{ x = (x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \ : \ \|x\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty \right\}$$

*y dotado de la norma $\|\cdot\|_p$. Entonces, $l^p(X_1, X_2, \ldots)$ es (LUR) si y sólo si, los espacios $X_n$, $n = 1, 2, \ldots$, son también (LUR).*

A partir de este resultado A.R. Lovaglia [5] obtuvo espacios de Banach (LUR) que no se pueden renormar para ser uniformemente rotundos.

## REFERENCIAS

[1] CLARKSON, J. A.: "Uniformly convex spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40, 396–414. (1936).

[2] DAY, M. M.: "Normed Linear Spaces" (3rd Ed). *Springer*, (1973).

[3] DIESTEL, J.: "Sequences and series in Banach spaces". *Springer–Verlag*. 1984.

[4] HUFF, R.: "Banach spaces which are nearly uniformly convex". *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 10,4, 743–749, (1980).

[5] LOVAGLIA, A. R.: "Locally uniformly convex Banach spaces". *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78, 225–238, (1955).

[6] MCSHANE, E. J.: "Linear functionals on certain Banach spaces". *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1, 402–408, (1950).

[7] MILMAN, D. P.: "On some criteria for the regularity of spaces of the type (B)". *Dokl. Akad. Navk*. SSSR, N.S.20, 243–246, (1938).

[8] ROLEWICZ, S.: "On drop property". *Studia Math.*, 85, 1, 27–35, (1987).

[9] TROYANSKI, S. L.: "On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non–separable Banach spaces". *Studia Math.*, 37, 173–180, (1971).

[10] TROYANSKI, S. L.: "On a property of the norm which is close to local uniform rotundity". *Math. Ann.*, 271, 305–313, (1985).