Subespacios totalmente tonelados en espacios de Banach con una base

POR J. C. FERRANDO*

Recibido: El 8 de Mayo de 1991

Presentado por el Académico Correspondiente D. Manuel López Pellicer

Abstract

S.A. Saxon and P.P. Narayanaswami prove that each Fréchet space E of infinite dimension has a totally barrelled dense subspace which is not unordered Baire–like. In this note we show that if E is a Banach space with a basis, then E contains a subspace of the aforementioned characteristics with the added feature of being ultrabornological.

Resumen

S.A. Saxon y P.P. Narayanaswami demuestran que cada espacio de Fréchet E de dimensión infinita tiene un subespacio denso totalmente tonelado que no es unordered Baire–like. En esta nota probaremos que, en el caso particular de que E sea un espacio de Banach con una base, entonces E tiene un subespacio de las anteriores características que además es ultrabornológico.

Un espacio localmente convexo de Hausdorff E sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de los reales o de los complejos se dice que es Baire–like [4] si dada una sucesión creciente de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados que cubre E, existe uno de ellos que es un entorno del origen. Se dice que el espacio E es unordered Baire–like [6] si dada una sucesión arbitraria de subconjuntos absolutamente convexos y cerrados de E que cubre E, hay uno de ellos que es un entorno del origen. Se dice que E es totalmente tonelado, [2] y [8], si dada una sucesión arbitraria de subespacios de E que cubre E, existe uno de ellos que es Baire–like.

En [5], S.A. Saxon y P.P. Narayanaswami demuestran que cada espacio de Fréchet de dimensión infinita tiene un subespacio denso y totalmente tonelado que no es unordered Baire–like (ver también [3], Prop. 9.3.6) y en [7], pp. 277–281, M. Valdivia prueba que el espacio de Banach clásico l^1 tiene un subespacio de las anteriores características que, además, es ultrabornológico. En esta nota usaremos una técnica parecida a la empleada por

* Departamento de Matemática Aplicada. Escuela Universitaria de Informática. Universidad Politécnica de Valencia.

P. Dierolf, S. Dierolf y L. Drewnowski en [1] y por P. Pérez Carreras y J. Bonet en [2], para construir en cada espacio de Banach X con una base un subespacio vectorial L denso, ultrabornológico y totalmente tonelado, que no es unordered Baire–like.

En lo que sigue X denotará un espacio de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ que admita una base de Schauder $\{e_i,\ i = 1,2,\ldots\}$ cuyos coeficientes funcionales denotaremos por f_i para cada $i \in \mathbb{N}$. Representaremos por Σ a un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que no contenga los átomos de $\mathbb{N}$, y para cada $U \in \Sigma$ pondremos

$$L(U) := \left\{x \in X : f_i(x) = 0 \quad \text{si} \quad i \in U\right\}$$

L denotará la unión de todos los subespacios $L(U)$ con $U \in \Sigma$. Como Σ es ultrafiltro, es inmediato notar que L es un subespacio vectorial de X. Por otro lado, puesto que $\mathbb{N}-\{i\} \in \Sigma$, entonces $e_i \in L$ para cada $i \in \mathbb{N}$, lo que demuestra que L es un subespacio denso de X. Además, si $Z_i := \{z \in L : f_i(z) = 0\}$, está claro que la sucesión $\{Z_i,\ i = 1,2,\ldots\}$ cubre L y que está formada por subespacios cerrados de L, por lo que L no es unordered Baire–like.

Teorema 1.

L es un subespacio totalmente tonelado.

Demostración

Sea $\{L_n,\ n = 1,2,\ldots\}$ una sucesión de subespacios de L que cubre L. Denotemos por Z la envoltura lineal de los vectores de la base de Schauder de X y por X_n al subespacio $L_n + Z$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Probaremos en primer lugar que existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que cada tonel de X_j absorbe a la bola cerrada cerrada unidad B de Z.

Si la afirmación anterior no es cierta, en cada X_n hay un tonel T_n que no absorbe a B. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pondremos V_n para denotar la clausura de T_n en L. Como V_1 no absorbe B, existe en $y(1,1) \in B - V_1$. Ahora, si $y(1,1)$ es combinación lineal de a lo sumo los $n(1)$ primeros vectores de la base de Schauder, podremos $N(1) := \{1,2,\ldots,n(1)\}$. Claramente $y(1,1) \in L(\mathbb{N} - N(1))$.

Poniendo

$$G(1) := \left\{x \in Z : f_i(x) = 0 \text{ si } 1 \leqslant i \leqslant n(1)\right\},$$

es obvio que Z es la suma directa localmente convexa de $G(1)$ y $L(\mathbb{N}-N(1))$. Si V_1 o V_2 absorbieran a la intersección de B con $G(1)$; esto es, a la bola unidad de $G(1)$, entonces absorberían a la proyección P de B sobre $G(1)$ que, obviamente, es acotada. Por otro lado, como $L(\mathbb{N} - N(1))$ coincide con el espacio de Banach generado por los $n(1)$ primeros vectores de la base de Schauder y tanto V_1 como V_2 intersectan a $L(\mathbb{N} - N(1))$ en sendos toneles, es obvio que tanto V_1 como V_2 absorben a la proyección Q de B sobre este subespacio. Por tanto, tanto V_1 como V_2 absorberían a la bola B de Z, que está contenida en $P+Q$. Contradicción.

Esto prueba la existencia de un número natural $n(2) > n(1)$ y de dos vectores $y(1,2)$, $y(2,2) \in B$ tales que, si

$$N(2) := \{n(1)+1, \ldots, n(2)\},$$

entonces

$$y(1,2) \in L(\mathbb{N} - N(2)) - 2V_1, \quad y(2,2) \in L(\mathbb{N} - N(2)) - 2V_2$$

Suponiendo que hemos determinado los naturales

$$1 = n(0) < n(1) < \ldots < n(k)$$

y los $k(k+1)/2$ vectores $y(i,j) \in B$, $1 \leqslant j \leqslant k$, $1 \leqslant i \leqslant j$, con

$$y(i,j) \in L(\mathbb{N} - N(j)) - j\,V_i,$$

donde

$$N(j) := \left\{n(j-1)+1, \ldots, n(j)\right\}$$

para $1 \leqslant j \leqslant k$, se pone

$$G(k+1) := \left\{x \in Z : f_i(x) = 0 \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n(k)\right\}.$$

Claramente, Z es la suma directa localmente convexa de $G(k)$ y

$$L\left(\mathbb{N} - \left\{N(1) \cup N(2) \cup \ldots \cup N(k)\right\}\right).$$

Razonando como antes, ni V_1, ni V_2,..., ni V_{k+1} absorben la bola unidad de $G(k)$. Luego, existe un natural $n(k+1) > n(k)$ y $k+1$ vectores

$$y(1,k+1),\ y(2,k+1), \ldots, y(k+1,k+1) \in B$$

tales que

$$y(i,k+1) \in L(\mathbb{N} - N(k+1)) - (k+1)\,V_1$$

para $1 \leqslant i \leqslant k+1$.

Determinamos por inducción una sucesión estrictamente creciente $\{n(i),\ i = 0, 1, \ldots\}$ de naturales y una familia

$$\{y(i,j),\ j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant j\}$$

de vectores de B, tales que

$$y(i,j) \in L(\mathbb{N} - N(j)) - j\,V_i$$

para $1 \leqslant i \leqslant j$ y cada natural j, donde

$$N(j) := \left\{N(j-1)+1, \ldots, N(j)\right\} \quad \text{para } j \in \mathbb{N}.$$

Si I es la unión de la familia $\{N(2j-1),\ j = 1,2,\ldots\}$ y J la de la familia $\{N(2j),\ j = 1,2,\ldots\}$, entonces $\{I, J\}$ es una partición de $\mathbb{N}$, por lo que, o bien $I \in \Sigma$, o bien $J \in \Sigma$. Si es por ejemplo $I \in \Sigma$, entonces $y(i, 2j) \in L(I)$ para $j = 1,2,\ldots$ y $1 \leqslant i \leqslant 2j$. Dado que la sucesión

$$S = \left\{y(1,2), y(2,2), y(1,4), y(2,4), y(3,4), y(4,4), \ldots\right\}$$

está acotada en $L(I)$ al estar contenida en la bola cerrada unidad B de Z, y dado que la sucesión

$$\left\{2j\, V_i,\ j \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant i \leqslant 2j\right\}$$

cubre el espacio de Banach $L(I)$, existe un natural p tal que V_p absorbe a la sucesión S. Tomando $q \in \mathbb{N}$ tal que $2q \geqslant p$ y tal que $2q\, V_p$ contenga a S, entonces

$$y(p, 2q) \in 2q\, V_p$$

que es una contradicción. Si $J \in \Sigma$, se obtiene una contradicción análoga.

Sea $j \in \mathbb{N}$ tal que cada tonel T de X_j absorbe la bola cerrada unidad B de Z. Si W denota la clausura de T en L, W absorbe la bola cerrada unidad Q de L, ya que $B = Q \cap Z$ y Z es denso en L. Esto prueba que T es un entorno de cero en X_j. Luego X_j es tonelado. Finalmente, como L_j es un subespacio de X_j de codimensión numerable, entonces L_j es también tonelado. Esto demuestra que L es totalmente tonelado.

Teorema 2

L es un subespacio ultrabornológico.

Demostración

Veremos que L es la envoltura localmente convexa de los subespacios de Banach $\{L(U),\ U \in \Sigma\}$. Para ello, sea V un subconjunto absolutamente convexo de L tal que V intersecta a cada $L(U)$ en un entorno del origen de $L(U)$ con $U \in \Sigma$. Probaremos en primer lugar que V absorbe a la bola cerrada unidad B de la envoltura lineal Z de los vectores de la base.

Si la afirmación anterior no es cierta, existe un $y(1) \in B - V$. Suponiendo que $y(1)$ es combinación lineal de a lo sumo los $n(1)$ primeros vectores de la base de Schauder, se define $N(1)$ como en el teorema anterior. Entonces claramente $y(1) \in L(\mathbb{N} - N(1)) - V$. Usando la misma notación que en el teorema anterior y suponiendo que hemos obtenido los naturales $n(1) < n(2) < \ldots < n(k)$ y los vectores $y(i) \in B$, $1 \leqslant i \leqslant k$, con

$$y(i) \in L(\mathbb{N} - N(i)) - i\,V \quad \text{para } 1 \leqslant i \leqslant k,$$

se tiene en cuenta que L es la suma directa localmente convexa de $G(k)$ y de

$$L\left(\mathbb{N} - \left\{N(1) \cup N(2) \cup \ldots \cup N(k)\right\}\right)$$

y se razona de manera parecida a como lo hicimos en el teorema anterior para probar que V no puede absorber la bola cerrada unidad de $G(k)$. La única diferencia es que ahora V es por hipótesis un entorno del origen en

$$L\left(\mathbb{N} - \left\{N(1) \cup N(2) \cup \ldots \cup N(k)\right\}\right).$$

En consecuencia, hay un natural $n(k+1) > n(k)$ y un $y(k+1) \in B$ tal que

$$y(k+1) \in L(\mathbb{N} - N(k+1)) - (k+1)\,V.$$

Construimos pues por recurrencia una sucesión estrictamente creciente $\{n(i), i = 1, 2, \ldots\}$ de naturales y una sucesión $\{y(i), i = 1, 2, \ldots\}$ de vectores de B, tales que

$$y(i) \in L(\mathbb{N} - N(i)) - iV$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Razonando con la partición $\{I, J\}$ de $\mathbb{N}$ como en el teorema anterior, se obtiene un natural m tal que $y(m) \in mV$. Contradicción.

Si $\lambda > 0$ es tal que λB está contenido en V, Q es la bola cerrada unidad de L y $k > 0$ es la constante básica, veremos a continuación que $(\lambda/k)Q$ está contenido en $2V$, lo que concluirá el teorema. De hecho, si $x \in (\lambda/k)Q$ y $U \in \Sigma$ es tal que $x \in L(U)$, es suficiente ver que

$$x \in cl(V \cap L(U)),$$

donde $cl(.)$ indica clausura en $L(U)$, ya que, al ser por hipótesis $V \cap L(U)$ un entorno del origen en $L(U)$, $cl(V \cap L(U))$ está contenido en $2V$. Ahora, como $x \in (\lambda/k)Q$ y $\{e_i, i = 1, 2, \ldots\}$ es una base,

$$\|\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant m} f_j(x)\, e_j\| \leqslant k\|x\| \leqslant \lambda$$

para cada natural m. Como

$$\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant m} f_j(x)\, e_j \in Z \cap L(U)$$

para cada $m \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$\Sigma_{1 \leqslant j \leqslant m} f_j(x)\, e_j$$

pertenece a $\lambda B \cap L(U)$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, como λB está contenido en V, se obtiene que $x \in cl(V \cap L(U))$.

En lo que sigue representaremos como antes por Z a la envoltura lineal de los vectores de la base de Schauder de X, y por $L[\Gamma]$ al subespacio generado por el filtro Γ de $\mathbb{N}$. En el caso particular de que Γ coincida con Σ, se tiene que $L[\Gamma] = L$, según la notación usada hasta ahora. Por otro lado, es inmediato notar que si Γ coincide con el filtro de Fréchet de $\mathbb{N}$ (formado por todos los subconjuntos cofinitos de $\mathbb{N}$), entonces $L[\Gamma] = Z$. En el resultado siguiente Ω denotará la familia de todos los ultrafiltros Σ de $\mathbb{N}$ que no contengan los átomos de $\mathbb{N}$.

Teorema 3

Se verifica que $Z = \cap\left\{L[\Sigma],\ \Sigma \in \Omega\right\}$.

Demostración

Como $e_i \in L[\Sigma]$ para cada $i \in \mathbb{N}$, es obvio que Z está contenido en la intersección de la familia $\{L[\Sigma],\ \Sigma \in \Omega\}$. Supongamos que x es un vector de $L[\Sigma]$ para cada $\Sigma \in \Omega$. Si x no fuera un vector de Z, existiría una sucesión $P = \{n(i),\ i \in \mathbb{N}\}$ estrictamente creciente de números naturales tal que $f_{n(i)}(x) \neq 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea Π un ultrafiltro de $\mathbb{N}$ que contiene la base de filtro de $\mathbb{N}$ formada por todos los subconjuntos U de P tales que $P - U$ es finito o vacío. Como $\Pi \in \Omega$, entonces $x \in L[\Pi]$ y existe un $Q \in \Pi$ tal que $x \in L(Q)$. Pero como, tanto P como Q son elementos de Π, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que $n(j) \in P \cap Q$. De aquí se deduce que $f_{n(j)}(x) = 0$. Contradicción.

REFERENCIAS

[1] DIEROLF, P., DIEROLF, S., DREWNOWSKI, L.: Remarks and examples concerning unordered Baire–like and ultrabarrelled spaces. *Colloq. Math.*, 39 (Fasc. 1), 109–116 (1978).

[2] PÉREZ CARRERAS, P., BONET, J.: Remarks and examples concerning suprabarrelled and totally barrelled spaces. *Arch. Math.*, 34, 340–347 (1982).

[3] PÉREZ CARRERAS, P., BONET, J.: Barrelled locally convex spaces. *North Holland Math. Studies* 131, Noth Holland 1987.

[4] SAXON, S.A.: Nuclear and product spaces, Baire–like spaces and the strongest locally convex topology. *Math. Ann.* 197, 87–106 (1972).

[5] SAXON, S.A., NARAYANASWAMI, P.P.: Metrizable (LF)–spaces, (db)–spaces and the separable quotient problem. *Bull. Austral. Math. Soc.* 23, 65–80 (1981).

[6] TODD, A.R., SAXON, S.A.: A property of locally convex Baire spaces. *Math. Ann.* 206, 23–34 (1973).

[7] VALDIVIA, M.: Topics in locally convex spaces. *North Holland Math. Studies* 67. North Holland 1982.

[8] VALDIVIA, M., PÉREZ CARRERAS, P.: On totally barrelled spaces. *Math. Z.* 178, 263–269 (1981).