# *El péndulo estocástico discreto*

POR AGUSTIN RAYA LOPEZ*

Recibido: El 8 de Mayo de 1991

*Presentado por el Académico Numerario D. Darío Maravall*

## Summary

The author presents the theory of the stochastic discrete pendulum, and its consequences. A stochastic pendulum is defined as one selected randomly from a number of certain pendulus, their speed and initial positions being random variables.

Dado el sistema de ecuaciones en diferencias finitas:

$$\begin{aligned} \S_{1n+1} &= a_{11}\,\S_{1n} + a_{12}\,\S_{2n} \\ \S_{2n+1} &= a_{21}\,\S_{1n} + a_{22}\,\S_{2n} \end{aligned} \tag{1}$$

y en el caso en que las raíces de la ecuación característica sean complejas conjugadas:

$$r_1 = r\,e^{i\alpha} \quad ; \qquad r_2 = r\,e^{-i\alpha} \tag{2}$$

la función característica de la solución del sistema cuando los valores iniciales son aleatorios es la:**

$$\begin{aligned} \varphi_n(z_1, z_2) = \varphi_0 \Bigg\{ & \frac{r^{n-1}}{\operatorname{sen} n\alpha}\Big[ (a_{11} \operatorname{sen} n\alpha - r \operatorname{sen}(n-1)\alpha)\, z_1 + a_{21} \operatorname{sen} n\alpha\, z_2 \Big], \\ & \frac{r^{n-1}}{\operatorname{sen} \alpha}\Big[ a_{12} \operatorname{sen} n\alpha\, z_1 + (a_{22} \operatorname{sen} n\alpha - r \operatorname{sen}(n-1)\alpha)\, z_2 \Big] \Bigg\} \end{aligned} \tag{3}$$

Llamamos *péndulo discreto* a un péndulo lineal en el que el tiempo varía en forma discontinua por intervalos de tiempo que denotamos por $\Delta t$, que son las unidades de tiempo durante las cuales la velocidad del péndulo no varía y la posición varía con movimiento uniforme.

---

*E.T.S. Ingenieros Agrónomos. Universidad Politécnica. Madrid.

**Solución que he obtenido en mi tesis doctoral.

Las ecuaciones en diferencias finitas que rigen el comportamiento del péndulo discreto, si denotamos por $n$ el número de intervalos de tiempo transcurridos desde el principio del movimiento son:

$$x_{n+1} - x_n = v_n \Delta t \quad ; \qquad v_{n+1} - v_n = -(k^2/m)\, x_n \Delta t \tag{4}$$

$x$ es la abcisa del péndulo discreto, $v$ su velocidad, $m$ la masa y $k^2$ la constante elástica.

La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} r-1 & -\Delta t \\ k^2\Delta t/m & r-1 \end{vmatrix} = (r-1)^2 + k^2\,\Delta t^2/m = 0 \tag{5}$$

las raíces son:

$$\begin{aligned} r_1 = 1 + ik\Delta t/\sqrt{m} &= (1 + k^2\Delta t^2/m)^{1/2}\, e^{i\theta} \\ r_2 = 1 - ik\Delta t/\sqrt{m} &= (1 + k^2\Delta t^2/m)^{1/2}\, e^{-i\theta} \\ \operatorname{tg}\theta &= k\Delta t/\sqrt{m} \end{aligned} \tag{6}$$

Se trata por tanto, de un caso particular de la ecuación (1) con los siguientes coeficientes $a_{ij}$:

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = \Delta t \quad a_{21} = -k^2\Delta t/m \quad a_{22} = 1 \tag{7}$$

por tanto la función característica $\varphi_n(z_1, z_2)$ es la dada en la ecuación (3) con estos valores de los coeficientes $a_{ij}$ (7) y de las raíces de la ecuación característica (6).

Las (4) se pueden escribir también:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \Delta t\, v_n \\ v_{n+1} &= -(k^2\Delta t/m)\, x_n + v_n \end{aligned} \tag{8}$$

Si multiplicamos el cuadrado de la primera (8) por $k^2$ y el cuadrado de la segunda (8) por $m$ y sumamos miembro a miembro se obtiene:

$$k^2\, x_{n+1}^2 + m v_{n+1}^2 = (k^2 x_n^2 + m v_n^2)(1 + k^2\Delta t^2/m) \tag{9}$$

Los valores de la energía potencial $E_p$, de la energía cinética $E_c$ y de la energía total $E$ son:

$$E_p = k^2x^2/2\ , \quad E_c = mv^2/2\ , \quad E = E_c + E_p = (k^2x^2 + mv^2)/2 \tag{10}$$

se sigue de la (9) que:

$$E_{n+1} = (1 + k^2\Delta t^2/m)\, E_n \Rightarrow E_n = (1 + k^2\Delta t^2/m)^n\, E_0 \qquad (11)$$

que muestra que la energía no es constante sino que aumenta con el tiempo.

La función característica de $E_n$ $\chi_n(z)$ es:

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(k^2x^2+mv^2)/2} f_n(x, v)\, dx\, dv \qquad (12)$$

donde $f_n(x, v)$ es la función de frecuencias de $x, v$ en el caso en que estas sean variables aleatorias absolutamente continuas. De (11) y (12) se sigue que:

$$\chi_n(z) = \chi_0[z(1 + k^2\Delta t^2/m)^n] \qquad (13)$$

*Por tanto cuando el tiempo es una variable discreta, el péndulo lineal no es un sistema físico conservativo, sino de energía total creciente, por lo que, para su funcionamiento se requiere un suministro externo de energía.*

La fórmula (13) es válida aun cuando la posición y la velocidad del péndulo no sean variables aleatorias absolutamente continuas y no tengan por tanto función de frecuencias, porque la (13) es consecuencia directa de la (11).

Si ahora suponemos que $\Delta t \to 0$ y $n \to \infty$ de modo que:

$$\lim n\Delta t = t \quad ; \qquad \Delta t \to 0\,, \quad n \to \infty \qquad (14)$$

efectuando esta sustitución en las ecuaciones (4) se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = v \quad , \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{-k^2}{m} x \qquad (15)$$

que son las ecuaciones del péndulo lineal ordinario (continuo), porque para la primera (4) en virtud de (14) es:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} = v_n \Leftrightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = v(t)$$

y análogamente para la segunda (4).

Como:

$$\lim_{n \to \infty, \Delta t \to 0} (1 + k^2\Delta t^2/m)^n = 1 \qquad (16)$$

se sigue que:

$$E(t) = E(0) \quad ; \qquad \chi(z, t) = \chi(z, 0) \qquad (17)$$

que muestra que en el péndulo estocástico lineal continuo la energía total del péndulo en cada instante es una *variable aleatoria independiente del tiempo*, y por tanto invariante durante todo el movimiento, que es la propiedad en que se transforma, al pasar del péndulo cierto al estocástico (continuos los dos), *el teorema de la conservación de la energía.*

Un péndulo estocástico puede representarse por un colectivo de péndulos ciertos cuyas velocidades y posiciones iniciales son variables aleatorias, o lo que es lo mismo, el péndulo estocástico sería un péndulo cierto extraído al azar de un colectivo de péndulos cuya densidad de velocidades y posiciones iniciales viene dada por la f. f. de las antedichas velocidades y posiciones iniciales.

Si en (9) o en (11) tomamos valores medios se obtiene:

$$\frac{k^2\overline{x_{n+1}^2}}{2}+\frac{m\overline{v_{n+1}^2}}{2}=\left(\frac{k^2\overline{x_n^2}}{2}+\frac{m\overline{v_n^2}}{2}\right)(1+k^2\Delta t^2/m) \tag{18}$$

$$\overline{E_n}=\overline{E_0}\,(1+k^2\Delta t^2/m)^n$$

que da la variación en el tiempo del valor medio de la energía total del colectivo de péndulos descrito en el párrafo anterior.

Ahora bien, como en las ecuaciones (8) se pueden tomar valores medios:

$$\begin{aligned}\overline{x_{n+1}} &= \overline{x_n}+\Delta t\,\overline{v_n}\\ \overline{v_{n+1}} &= -(k^2\Delta t/m)\,\overline{x_n}+\overline{v_n}\end{aligned} \tag{19}$$

de la cuales se obtiene por el mismo procedimiento que se obtuvo la (11) de las (8), la

$$\frac{k^2(\overline{x_{n+1}})^2}{2}+\frac{m(\overline{v_{n+1}})^2}{2}=\left(\frac{k^2(\overline{x_n})^2}{2}+\frac{m(\overline{v_n})^2}{2}\right)(1+k^2\Delta t^2/m) \tag{20}$$

La interpretación física de (20) es distinta de la (18), porque la (20) lo que significa es la variación en el tiempo de la energía total de un péndulo que en cada instante ocupase la posición media (la del centro de gravedad) y estuviese animado de la velocidad media del colectivo de péndulos descrito en el párrafo anterior a la fórmula (18), que representa lo que venimos llamando péndulo estocástico. Esta magnitud física, que figura en la (20), es distinta de la magnitud física que figura en la fórmula (11). La (18) se obtiene tomando valores medios en (11) es decir tomando los valores medios después de elevar al cuadrado, mientras que la (20) se obtiene tomando los valores medios antes de elevar al cuadrado.

Vamos a obtener ahora la ecuación lineal en diferencias finitas de segundo orden en $x$ equivalente al sistema (8). De la primera (8) teniendo en cuenta la segunda se tiene que:

$$x_{n+1}=x_n+v_{n-1}\Delta t-(k^2\Delta t^2/m)\,x_{n-1} \tag{21}$$

y teniendo en cuenta la primera (8) se obtiene la:

$$x_{n+1}=x_n+x_n-x_{n-1}(1+k^2\Delta t^2/m) \tag{22}$$

y de aquí:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}(1 + k^2\Delta t^2/m) = 0 \tag{23}$$

cuya ecuación característica coincide como era de esperar con la (5).

Si en esta ecuación dividimos por $\Delta t^2$ y tomamos límites $\Delta t \to 0$, $n \to \infty$ como en la fórmula (14) se obtiene la ecuación diferencial del péndulo ordinario:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2}{m}x = 0 \tag{24}$$

porque

$$\frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}$$

al tomar límites, cuando se cumple (14) es:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Vamos a estudiar el comportamiento aleatorio de la energía en un caso particular que puede tener bastante generalidad es aquel en que la posición y la velocidad iniciales $(x, v)$ son variables gaussianas (ley normal) independientes de funciones de frecuencia:

$$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \; ; \quad \frac{1}{\sigma_v\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2\sigma_v^2} \tag{25}$$

siendo:

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} \, , \quad \sigma_v^2 = \overline{v^2} \; ; \quad \overline{x} = 0 \, , \quad \overline{v} = 0 \tag{26}$$

La función característica del valor inicial de la energía es:

$$\frac{1}{2\pi\,\sigma_x\,\sigma_v} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(mv^2 + k^2x^2)/2 - x^2/2\sigma_x^2 - v^2/2\sigma_v^2} dx\, dv \tag{27}$$

y como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1/\sigma_x^2 - izk^2)x^2/2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x} \frac{1}{\sqrt{1/\sigma_x^2 - izk^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - izk^2\sigma_x^2}} \tag{28}$$

y análogamente para $v$, se sigue que la función característica de la energía es:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - izk^2\sigma_x^2}\sqrt{1 - izm\sigma_v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2iz\,\overline{E_p}}\sqrt{1 - 2iz\,\overline{E_c}}} \tag{29}$$

El último paso en virtud de las fórmulas (10).

Por ser la función característica (29) producto de dos funciones características la energía total es la suma de dos variables aleatorias independientes (energía potencial y energía cinética) cuyas funciones características son las inversas de las raíces cuadradas que figuran en (29).

En el caso particular en que:

$$k^2 \sigma_x^2 = m \sigma_v^2 \rightarrow \overline{E_p} = \overline{E_c} \, ; \quad \overline{E} = 2\, \overline{E_p} \tag{30}$$

la función característica (29) se escribe:

$$\frac{1}{1 - izk^2\sigma_x^2} = \frac{1}{1 - iz\,\overline{E}} \tag{31}$$

que es una distribución exponencial de función de frecuencias:

$$\begin{matrix} \dfrac{1}{\overline{E}} e^{-E/\overline{E}} & E > 0 \\ 0 & E < 0 \end{matrix} \tag{32}$$

En el caso del péndulo estocástico continuo las fórmulas anteriores son válidas durante todo el movimiento y en el caso del péndulo estocástico discreto en virtud de la fórmula (11), después de $n$ intervalos de tiempo $\Delta t$, en las funciones características (29) y (31) hay que efectuar la sustitución:

$$z \longrightarrow z(1 + k^2 \Delta t^2/m)^n \tag{33}$$

es decir, multiplicar la $z$ de (29) y (31) por el factor que figura en (33). En (32) habría que efectuar la sustitución:

$$\overline{E} \longrightarrow \overline{E}(1 + k^2 \Delta t^2/m)^n \tag{34}$$

El valor medio y la varianza correspondiente a la distribución exponencial (31)–(32) de la energía total $E$ son

$$\overline{E} = 2\,\overline{E}_p \qquad (\overline{E})^2 = 4\,(\overline{E}_p)^2 \tag{35}$$

El valor medio y la varianza correspondiente a las distribuciones gamma de (29) por ejemplo la de la energía potencial $E_p$ cuya función característica es:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,\overline{E}_p\, iz}} \tag{36}$$

son:

$$\overline{E_p} \qquad 2\,(\overline{E_p})^2 \tag{37}$$

y la función de frecuencias correspondientes a (36) es:

$$\frac{e^{-E_p/2\,\overline{E_p}}}{\sqrt{2\pi\,\overline{E_p}\, E_p}} \quad \cdots \quad \cdots \quad E > 0$$

$$0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad E < 0$$

y análogamente para la energía cinética $E_c$.

En el caso general (29) el valor medio y la varianza de la energía total $E$ son

$$\overline{E} = \overline{E_c} + \overline{E_p}\ ; \quad 2(\overline{E_c})^2 + 2(\overline{E_p})^2 \tag{38}$$

que cuando $\overline{E_p} = \overline{E_c}$ coinciden como es natural con (35).

Al comparar el comportamiento aleatorio de los péndulos estocásticos discretos y continuos se observan diferencias importantes, como lo es, el que la energía total del péndulo sea una v.a. independiente del tiempo en el caso continuo, mientras que en el caso discreto depende del tiempo. A medida que las unidades de tiempo discreto son menores y en el límite cuando estas unidades de tiempo tienden a cero, es decir, el péndulo discreto tiende a ser continuo, se obtienen las fórmulas del péndulo continuo.

*La conservación de la energía en un campo potencial es consecuencia de la continuidad del tiempo, de modo que la discretización del tiempo significa un aumento de la energía durante el movimiento que es aportada desde el exterior.*

La energía aumenta con el tiempo en progresión geométrica a diferencia de lo que sucede con los movimientos aleatorios uniformemente acelerados en que la energía aumenta con el tiempo en progresión aritmética.

## BIBLIOGRAFIA

[1] R.A. GABEL, R.A. ROBERTS (1973): *Signals and linear Systems*. Jhon Wiley & Sons, New York.

[2] M. ATHANS, M.L. DERTOUZOS, R.N., SPANN, S.J. MASON (1974): *Systems, Networks, and Computation*. McGraw–Hill, New York.

[3] B.C. KUO (1980): *Digital Control Systems*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York.

[4] MARAVALL CASESNOVES (1974): *Cálculo de Probabilidades y Procesos Estocásticos*. Paraninfo, Madrid.

[5] A. PAPOULIS (1965): *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw–Hill, New York.

[6] W.B. DAVENPORT, JR, W.L. ROOT (1958): *An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise*. McGraw–Hill, New York.

[7] J.S. BENDAT (1958): *Principles and Applications of Random Noise Theory*. Jhon Wiley & Sons, Inc, New York.

[8] J. HALCOMBE LANING, JR, RICHARD H. BATTIN (1956): *Random Processes in Automatic Control*. McGraw–Hill, New York.

[9] L.M. MILNE–THOMSON (1951): *The Calculus of Finite Differences*. Macmillan and Co. London.

[10] CAUMEL (1988): *"Probabilités. Théorie et Applications."* Ed. Eyrolles.

[11] DUDEWICZ AND MISHRA STAYTA (1988): *"Modern Mathematical Statistics."* Ed. John Wiley.

[12] VENTSEL ET LOVTCHAROV (1988): *"Problèmes appliqués de la théorie des probabilités."* Ed. Mir.

[13] BOROVKOV (1988): *"Estadística Matemática"*. Ed. Mir.

[14] YAVORSKI Y DETLAF (1988): *"Manual de Física"* Ed. Mir.

[15] LANDAU (1990): *"Physique Statistique"* Ed. Mir.

[16] LANDAU (1990): *"Cinétique Physique"* Ed. Mir.