Interpolación en espacios de Bergman-Sobolev

POR JOAQUIN M. ORTEGA ARAMBURU

Presentada en la sesión científica
celebrada el 3 de abril de 1991

Abstract

Let B denote the unit ball of $\mathbb{C}^n$ and $R = \sum z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, the radial derivative . The Bergman–Sobolev space $A^p_{q,s}\, p \geqslant 1,\, q > 0$ is defined as the space of holomorphic functions in B such that $\int |R^k f(z)|^p (1 - |z|)^{q-1} dv(z) < \infty$, $k = 0, \ldots, s$. For complex–tangential curves we obtain a complete characterization of the trace of this space as the Besov space $B^p_{2\alpha}$ if $\alpha = s - (n+q)/p + 1/(2p) > 0$. This result can be obtained as a corollary of a more general theorem about interpolation of holomorphic jets. Analougous results can be stated for Hardy–Sobolev spaces and complex tangential varieties of dimension greater than 1.

Sea B la bola unidad de $\mathbb{C}^n$. Denotaremos por $R = \sum z_i \dfrac{\partial}{\partial z_i}$ la derivada radial. El espacio de Bergman–Sobolev $A^p_{q,s}$ se define como el espacio de las funciones holomorfas en $\mathbb{B}$ tales que

$$\int |R^k f(z)|^p (1 - |z|)^{q-1} dv(z) < \infty, \quad p \geqslant 1,\ q > 0,\ k = 0, \ldots, s.$$

Se trata de estudiar las trazas de este espacio en variedades de $S = \partial B$, en forma análoga a los teoremas de las trazas en espacios Sobolev reales. Para simplificar la exposición nos limitaremos a curvas regulares, simples y cerradas. Como pudiera esperarse de la teoría de variable real la descripción de las trazas se da en términos de los espacios de Besov. Recordemos que un espacio de Besov sobre una curva Γ es

$$B^p_\beta = \left\{ f \in L^p(\Gamma); \quad \int \frac{\|\Delta^k_t f\|^p_p}{|t|^{1+\beta p}}\, dt < \infty \right\},$$

donde Δ^k_t denota el operador diferencia k–sima y $k > \beta$.

Una descripción completa de la traza, en términos de análisis real, sólo cabe esperarse para aquellas curvas tales que cada función "regular" sobre la curva puede ser interpolada por funciones "regulares" holomorfas. Estas son las curvas tangentes completas en S, es decir, aquellas curvas que cumplen $\gamma(s)\gamma'(s) = 0$.

El teorema básico sobre las trazas viene dado por el siguiente teorema.

Teorema 1

La traza de $A^p_{q,s}(B)$ en Γ, curva tangente compleja de S es $B^p_{2\alpha}$ si $\alpha = s-(n+q)/p+1/(2p) > 0$.

Obsérvese que $A^p_{q,s} \subset \mathrm{Lip}_{s-(n+q)/p}$ si $s-(n+q)/p > 0$. De la relación $B^p_{2\alpha} \subset \mathrm{Lip}_{2\alpha-1/p}$ obtenemos que la traza estará contenida en $\mathrm{Lip}_{2(s-(n+q)/p)}$, reencontrándose el conocido fenómeno de doble regularidad de la traza de las holomorfas de Lipschitz.

Este teorema 1 se obtiene como corolario de un resultado de interpolación no sólo de funciones sino también de sus derivadas, cuya formulación es algo más compleja.

Sea $X = X_1X_2\ldots X_s$ un operador diferencial definido en un entorno de S. Se denomina peso de X a $w(X) = \sum w(X_i)$ donde $w(X_i) = 1/2$ si X_i es tangente complejo y 1 en otro caso. Un resultado obtenido por Ahern y Cohn (Exceptional sets...Indiana Uni. Mat. J. 38. 1989) establece que si $f \in A^p_{q,s}$ y $w(X) < \alpha$, Xf tiene límite radial c.p.t. en Γ y es límite está en L^p. Tiene entonces sentido hablar de la diferencial k–sima no isotrópica de f, $k \leqslant [2\alpha]$ como la aplicación $\mathbb{C}$–lineal tal que

$$d^{NI,k}(X_1,\ldots,X_k) = d^k(X_1,\ldots,X_k) \quad \text{si} \quad w(X) < \alpha.$$

Si $P^{NI,k}_a f(z)$ es el polinomio asociado, podemos hablar del polinomio de Taylor no isotrópico de f en a:

$$T^{NI}_a f(z) = \sum_{k\leqslant[2\alpha]} \frac{1}{k!} P^{NI,k}_a f(z)$$

que está definido c.p.t. en Γ.

Podemos ahora formular el teorema de restricción

Teorema 2

Sea $f \in A^p_{q,s}(B)$ y Γ una curva tangente compleja. Sea $\alpha = s-(n+q)/p+1/(2p) > 0$ y X un operador diferencial con $w(X) < \alpha$. Entonces Xf tiene traza en L^p y

$$\iint_{x,y\in\Gamma} \frac{|X(f(y) - T^{NI}_x f(y)|^p}{|x-y|^{2(\alpha-w(X))p+1}}\, d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty\,.$$

Se define un p–jet holomorfo con $p = [2\alpha]$ como una colección F^k de aplicaciones $\mathbb{C}$–lineales sobre T_z, k–simétricas, tales que si

$$T_zF(w) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} F^k_z(w-z,\ldots,w-z)$$

se tiene $T^{NI}_z T_z F = T_z F$. Tendremos el siguiente teorema de interpolación de jets.

Teorema 3

Sea $\{F^k\}$ un p–jet holomorfo, definido c.p.t. en Γ y tal que:

$$F^k(X_1, \ldots, X_k) \in L^p(\Gamma) \quad \text{si} \quad w(X) < \alpha = s - (n+q)/p + 1/(2p)$$

$$\iint_{x,y\in\Gamma} \frac{|(F^k - d^k T_k^{NI} F)_y (X_1, \ldots <, X_k)|^p}{|x-y|^{2(\alpha - w(X))p+1}} \, d\mu(x)\, d\mu(y) < \infty$$

existe entonces un $f \in A^p_{q,s}(B)$ cuyo jet asociado es el dado.

La demostración del teorema 2, de restricción, se basa en la consideración de ciertas medidas de Carleson operando sobre el espacio $A^p_{o,q}$ así como en el usual paso al interior en orden a evaluar los restos de Taylor no isotrópicos.

La demostración del teorema 3 tiene un primer paso mediante una extensión a lo "Whitney". Extensiones de tipo análogo para funciones de variable real han sido consideradas por A. Jonsson y H. Wallin. Dado un jet en las condiciones del teorema 2 se construye una función que no es holomorfa pero que cumple estimaciones análogas a las que cumplen los elementos de $A^p_{q,s}$. El segundo paso consiste en, mediante una solución explícita de un problema $\overline{\partial}$ corregir la función a una holomorfa que interpola el jet dado.

Con algunas modificiaciones se pueden dar los correspondientes teoremas para variedades tangentes complejas de dimensión mayor que 1 así como para los espacios de Hardy–Sobolev $H^p_s(B)$.

El contenido de esta comunicación, parcialmente, forma parte de un trabajo realizado en colaboración con Joaquín Bruna dentro del proyecto PB89–0311 de la DGICYT.