

Interpolación, eliminación y matrices totalmente positivas

POR MARIANO GASCA* + Y JUAN MANUEL PENA**

*Conferencia pronunciada
el 1 de Abril de 1992*

Resumen

Se muestra la conexión existente entre las fórmulas de interpolación polinómica y las técnicas de eliminación matricial. En particular, se pone especial énfasis en la estrategia de eliminación que ha sido denominada de Neville, para ilustrar sus ventajas frente a la habitual de Gauss cuando las matrices a las que se aplica son totalmente positivas. Se describen recientes avances respecto a la utilidad de estas matrices en diseño geométrico por ordenador.

1. INTRODUCCION: EL METODO DE ELIMINACION DE GAUSS

El método de Gauss para la reducción de un sistema lineal $Ax = b$ con n ecuaciones e incógnitas a forma triangular superior $Ux = c$, para su posterior resolución inmediata, es uno de los algoritmos matemáticos más universalmente conocidos. Matricialmente, consiste en premultiplicar la matriz A por matrices P_t y M_t , $1 \leq t \leq n-1$, de forma que la matriz

$$M_{n-1} P_{n-1} M_{n-2} P_{n-2} \dots M_1 P_1 A = U \quad (1.1)$$

sea triangular superior, siendo P_t una matriz de permutación (cuyo efecto al multiplicar por la izquierda a una matriz B es el de permutar la fila t de B con una posterior r_t) y M_t una matriz de la forma

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & m_{t+1,t} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{n,t} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

* Proyecto de Investigación DGICYT PS90007.

+ Una versión abreviada de este trabajo constituyó una conferencia realizada por el Académico correspondiente D. Mariano Gasca en la Real Academia de Ciencias.

** Dpto. Matemática Aplicada. Universidad de Zaragoza.

Una matriz $M_t B$ se obtiene a partir de B sumándoles a las filas $t + 1, \dots, n$ de B la t -ésima multiplicada por $m_{t+1,t}, \dots, m_{n,t}$. Las matrices P_t se deben a la posible existencia de ceros como pivotes y por tanto a la eventual necesidad de permutar filas en las matriz (es decir ecuaciones en el sistema). Con frecuencia, todas o muchas de ellas pueden ser la identidad, por no aparecer ceros como pivotes, pero también suelen usarse, a pesar de no ser necesarias, cuando el pivote, por ser pequeño con respecto a los elementos de su columna en las filas siguientes a la suya, pudiera producir errores graves de cálculo debido al uso de aritmética de precisión finita en el ordenador (inestabilidad numérica).

Razones principales de la popularidad de este método para reducir la matriz A a forma triangular son: simplicidad, existencia de profundos estudios de cómo abordar mediante estrategias de pivote y escalado de filas y columnas las posibles inestabilidades numéricas (ver [38] para resultados recientes sobre ese complicado problema, todavía no completamente resuelto de forma satisfactoria) y un relativamente bajo coste computacional, al menos para n no muy grande. Sin embargo, como veremos en la Sección 2, el método de Gauss no es más que la interpretación matricial de uno de los varios métodos usados para la resolución de problemas de interpolación de funciones, por lo que parece lógico estudiar las correspondientes interpretaciones matriciales de otros métodos de resolución de aquellos problemas.

Posteriormente, en la Sección 3, estudiaremos la principal alternativa a la eliminación de Gauss, que es la eliminación que llamamos de Neville. Realizamos un repaso de nuestros principales logros en los últimos años en la aplicación de ese tipo de eliminación a una clase particular importante de matrices, que son las totalmente positivas, que serán definidas al final de la Sección 2. En la Sección 4 hacemos una referencia histórica al tema de la Positividad Total en general, y en particular a su versión discreta que son las matrices totalmente positivas, para finalmente en la Sección 5 dar un resumen de las conexiones que hay entre la eliminación de Neville y el diseño geométrico por ordenador (CAGD), a través precisamente de las matrices totalmente positivas. En ella se muestra la importancia en CAGD de usar bases de funciones totalmente positivas, debido a la propiedad de disminución de la variación.

2. PROBLEMAS DE INTERPOLACION Y SUS METODOS DE RESOLUCION

Aunque pueda formularse con mucha más generalidad de manera más abstracta, la versión más simple y clásica de un problema de interpolación es la siguiente: construir una función sencilla (frecuentemente un polinomio) cuyos valores en ciertos puntos, o los de algunas de sus derivadas en ellos, coincidan con los de una función más complicada o cuya expresión explícita se desconoce. Nos centraremos en la interpolación de funciones de una variable. Para una presentación unificada de estos métodos véase [15] y para una revisión de resultados recientes sobre su extensión a varias variables véanse [21] y [20].

De las fórmulas usadas hasta la tercera década de nuestro siglo, la de Newton es considerada como la primera recurrente, en el sentido de que puede construirse la solución del problema con n datos de interpolación a partir de la solución del problema con $n - 1$ datos. Sin embargo en la práctica no suele usarse así, sino que se construyen por recurrencia únicamente las diferencias divididas, que son los coeficientes del polinomio interpolador en la base que se usa en la fórmula.

Las primeras fórmulas de interpolación dirigidas directamente al cálculo recurrente de la solución y especialmente adecuados para tal uso en el ordenador, aparecieron curiosamente algunos años antes que los primeros ordenadores: son las fórmulas debidas a Aitken [1] y Neville [37], que ponían énfasis en el hecho de que no requerían el cálculo de las diferencias divididas. Como ambas fórmulas responden a estrategias distintas para una misma idea, al planteamiento común de ambas se le suele llamar *fórmula de interpolación de Aitken–Neville*: consiste en la construcción del polinomio interpolador p de la función f en un conjunto $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ a partir de los polinomios interpoladores en dos conjuntos B y C con un solo punto menos que A y cuya unión sea A . Concretamente, si $B = A \setminus \{x_j\}$ y $C = A \setminus \{x_k\}$, se tiene

$$p_A(x) = \frac{(x - x_j)p_B(x)(x - x_k)p_C(x)}{x_k - x_j}, \tag{2.1}$$

donde hemos denotado p_A, p_B, p_C al polinomio de interpolación de f en A, B, C respectivamente. En particular, si $x_j \neq 0$, (2.1) se puede escribir

$$\left(1 - \frac{x_k}{x_j}\right)p_A(0) = p_B(0) - \frac{x_k}{x_j}p_C(0), \tag{2.2}$$

fórmula que tiene una interpretación en eliminación matricial, como veremos.

Donde difieren Aitken y Neville es en la estrategia de uso reiterada de esta idea. Así, el primero utiliza el siguiente plan, en un ejemplo con 5 puntos:

$$\begin{array}{cccccc} \{x_0\} & \{x_0, x_1\} & \{x_0, x_1, x_2\} & \{x_0, x_1, x_2, x_3\} & \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} \\ \{x_1\} & \{x_0, x_2\} & \{x_0, x_1, x_3\} & \{x_0, x_1, x_2, x_4\} & \\ \{x_2\} & \{x_0, x_3\} & \{x_0, x_1, x_4\} & & \\ \{x_3\} & \{x_0, x_4\} & & & \\ \{x_4\} & & & & \end{array}$$

donde en la columna j , ($j = 1, 2, \dots, 5$), para $j > 1$, el conjunto de la fila i -ésima ($i = 1, 2, \dots, 6 - j$) es la unión del primero y del $(i + 1)$ -ésimo de la anterior columna.

En cambio Neville usa el siguiente cuadro:

$$\begin{array}{cccccc}
 \{x_0\} & \{x_0, x_1\} & \{x_0, x_1, x_2\} & \{x_0, x_1, x_2, x_3\} & \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} \\
 \{x_1\} & \{x_1, x_2\} & \{x_1, x_2, x_3\} & \{x_1, x_2, x_3, x_4\} & \\
 \{x_2\} & \{x_2, x_3\} & \{x_2, x_3, x_4\} & & \\
 \{x_3\} & \{x_3, x_4\} & & & \\
 \{x_4\} & & & &
 \end{array}$$

donde el i -ésimo de la columna j ($j > 1$) es la unión del i y del $i + 1$ de la anterior.

A pesar de la mayor resonancia del nombre de Aitken en este tema, debido probablemente a ser un matemático más reconocido por sus otros trabajos, se ha usado mucho más en las aplicaciones la idea de Neville. Así sucede en el método de extrapolación de Richardson y en particular en el método de integración numérica de Romberg.

La extensión de esta idea a la interpolación en varias variables resulta mucho más difícil. El caso simplicial fue tratado en [41] y el caso general primero en [15] y con mucha más precisión en [17]. También son interesantes en este sentido [21] y [34].

Volviendo al caso univariado, si se plantea, por ejemplo, el problema de construir el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_3x^3$ que interpola a f en $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$, escribamos las ecuaciones del problema en la forma

$$a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3 + a_0 = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2.3)$$

donde las incógnitas son las a_j .

Supongamos que $x_0 \neq x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq 0$ y que se realiza eliminación de Gauss combinada con un escalado de filas para que el coeficiente de la incógnita $a_0 (= p(0))$ sea siempre 1. Denotando en general, por ejemplo, $p_{i,j,k}^g$ al polinomio de grado no mayor que 2 que interpola a la función g en $\{x_i, x_j, x_k\}$, y teniendo en cuenta que, como es evidente, con esa notación se tiene

$$x_i^l = p_i^{x^l}(x) = p_i^{x^l}(0), \quad p_i^f(x) = p_i^f(0) = f(x_i), \quad (2.4)$$

(2.3) puede escribirse

$$a_1p_i^x(0) + a_2p_i^{x^2}(0) + a_3p_i^{x^3}(0) + a_0p_i^1(0) = p_i^f, \quad 0 \leq i \leq 3. \quad (2.5)$$

El primer paso del proceso de eliminación de Gauss consiste en restarle a la ecuación con subíndice i , $1 \leq i \leq 3$, la primera ($i = 0$) multiplicada por $p_i^x(0)/p_0^x(0)$ ($= x_i/x_0$). Si se dividen después las tres últimas ecuaciones por $(1 - x_i/x_0)$ resulta, por (2.2),

$$\begin{array}{l}
 a_1p_0^x(0) + a_2p_0^{x^2}(0) + a_3p_0^{x^3}(0) + a_0p_0^1(0) = p_0^f(0) \\
 a_2p_{0,1}^{x^2}(0) + a_3p_{0,1}^{x^3}(0) + a_0p_{0,1}^1(0) = p_{0,1}^f(0) \\
 a_2p_{0,2}^{x^2}(0) + a_3p_{0,2}^{x^3}(0) + a_0p_{0,2}^1(0) = p_{0,2}^f(0) \\
 a_2p_{0,3}^{x^2}(0) + a_3p_{0,3}^{x^3}(0) + a_0p_{0,3}^1(0) = p_{0,3}^f(0).
 \end{array} \quad (2.6)$$

En el segundo paso de la eliminación gaussiana hay que restarles a la tercera y cuarta ecuaciones la segunda multiplicada por $p_{0,2}^{x^2}(0)/p_{0,1}^{x^2}(0)$ y $p_{0,3}^{x^2}(0)/p_{0,1}^{x^2}(0)$ respectivamente. Pero como por (2.2) se tiene, para $i = 2, 3$,

$$p_{0,i}^{x^2}(0) - p_{0,1}^{x^2}(0)(x_i/x_1) = (1 - x_i/x_1)p_{0,1,i}^{x^2}(0) \quad (2.7)$$

y

$$p_{0,1,i}^{x^2}(x) = x^2, \quad (2.8)$$

entonces los multiplicadores anteriores se pueden simplificar

$$p_{0,i}^{x^2}(0)/p_{0,1}^{x^2}(0) = x_i/x_1, \quad i = 2, 3. \quad (2.9)$$

En consecuencia, y de nuevo por (2.2), el resultado de realizar ese segundo paso en la eliminación y luego dividir por $(1 - x_2/x_1)$ y $(1 - x_3/x_1)$, respectivamente, las dos últimas ecuaciones, conduce a

$$\begin{aligned} a_1 p_0^x(0) + a_2 p_0^{x^2}(0) + a_3 p_0^{x^3}(0) + a_0 p_0^1(0) &= p_0^f(0) \\ a_2 p_{0,1}^{x^2}(0) + a_3 p_{0,1}^{x^3}(0) + a_0 p_{0,1}^1(0) &= p_{0,1}^f(0) \\ a_3 p_{0,1,2}^{x^3}(0) + a_0 p_{0,1,2}^1(0) &= p_{0,1,2}^f(0) \\ a_3 p_{0,1,3}^{x^3}(0) + a_0 p_{0,1,3}^1(0) &= p_{0,1,3}^f(0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Finalmente, y por las mismas razones que en (2.9),

$$p_{0,1,3}^{x^3}(0)/p_{0,1,2}^{x^3}(0) = x_3/x_2, \quad (2.11)$$

y en el último paso se llega, teniendo en cuenta que

$$p_0^1(0) = p_{0,1}^1(0) = p_{0,1,2}^1(0) = p_{0,1,2,3}^1(0) = 1, \quad (2.12)$$

a

$$\begin{aligned} a_1 p_0^x(0) + a_2 p_0^{x^2}(0) + a_3 p_0^{x^3}(0) + a_0 &= p_0^f(0) \\ a_2 p_{0,1}^{x^2}(0) + a_3 p_{0,1}^{x^3}(0) + a_0 &= p_{0,1}^f(0) \\ a_3 p_{0,1,2}^{x^3}(0) + a_0 &= p_{0,1,2}^f(0) \\ a_0 &= p_{0,1,3}^f(0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así pues, hemos visto que la eliminación gaussiana es equivalente a la estrategia de interpolación de Aitken. Para que se produjera la estrategia de interpolación de Neville habría sido necesario realizar la eliminación en (2.5) así: a la última ecuación de (2.5) se le resta la anterior multiplicada

por x_3/x_2 , a la tercera se le resta la segunda por x_2/x_1 , y a ésta la primera por x_1/x_0 . En lugar de (2.6) queda, después de dividir la i -ésima ecuación por $(1 - x_i/x_{i-1})$,

$$\begin{aligned}
 a_1 p_0^x(0) + a_2 p_0^{x^2}(0) + a_3 p_0^{x^3}(0) + a_0 p_0^1(0) &= p_0^f(0) \\
 a_2 p_{0,1}^{x^2}(0) + a_3 p_{0,1}^{x^3}(0) + a_0 p_{0,1}^1(0) &= p_{0,1}^f(0) \\
 a_2 p_{1,2}^{x^2}(0) + a_3 p_{1,2}^{x^3}(0) + a_0 p_{1,2}^1(0) &= p_{1,2}^f(0) \\
 a_2 p_{2,3}^{x^2}(0) + a_3 p_{2,3}^{x^3}(0) + a_0 p_{2,3}^1(0) &= p_{2,3}^f(0).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ahora, a la cuarta se le resta un múltiplo de la tercera para anular el término en a_2 y a la tercera un múltiplo de la segunda con el mismo fin, llegándose, tras simplificar, a un sistema similar a (2.10) con la cuarta ecuación con subíndices 1,2,3 en lugar de 0,1,3. Finalmente, si en ese sistema se le resta a la cuarta ecuación un múltiplo de la tercera para anular el término en a_3 y se simplifica se llega exactamente a (2.13).

Este tipo de eliminación, si bien había sido usada esporádicamente en alguna demostración en trabajos de investigación de Algebra Lineal, no había sido estudiada en detalle como posible alternativa a la eliminación de Gauss, dadas las interesantes propiedades de ésta, como ya hemos mencionado en la Sección 1. De hecho, ya aparecía la idea también en el método de extrapolación de Richardson, donde se van eliminando potencias del desarrollo asintótico por este procedimiento, ligado a la idea de consecutividad. Nuestro punto de vista ha sido distinto: buscar clases amplias de matrices en las que este tipo de eliminación pudiera presentar alguna ventaja. Por las razones que acabamos de exponer propusimos en nuestros trabajos anteriores sobre estos temas que se denomine a esta estrategia de eliminación con el nombre de Neville. En cuanto a una clase de matrices en las que su uso podía presentar ventajas, nos surgió inmediatamente al estudiar las matrices *totalmente positivas* (matrices TP para abreviar) es decir matrices con todos sus menores no negativos. La razón de pensar primero en ellas es que algunas de sus propiedades habían sido demostradas eliminando en sus columnas en forma similar a la propuesta aquí por filas.

3. ELIMINACION DE NEVILLE Y MATRICES TOTALMENTE POSITIVAS

En [19], Gasca y Mühlbach introdujeron la idea general de estrategia de eliminación, y estudiaron su relación con la idea de complemento de Schur de una submatriz con respecto a la matriz total. En [36] se aplicaba la estrategia de Neville para producir un test para averiguar si una matriz es totalmente positiva. Pero ha sido en los tres últimos años cuando, en una serie de artículos que están en distintas fases de publicación ([22–27] principalmente), esta técnica ha mostrado toda su potencia para trabajar con matrices totalmente positivas.

Dada una matriz A , que supondremos cuadrada, de orden n (aunque la idea es fácilmente extensible a matrices rectangulares en general), permutamos sus filas, si es necesario, para que los posibles elementos nulos de la primera columna queden en los últimos lugares: las filas que los tengan bajan al final, exactamente en el mismo orden relativo en el que estuvieran anteriormente. Después se van produciendo tantos ceros como se pueda en la primera columna, donde no los hubiera ya: si el elemento de lugar $(i, 1)$ es el último no nulo de esa primera columna, se le suma a la fila i un múltiplo de la $i - 1$ de forma que el nuevo elemento de lugar $(i, 1)$ sea nulo. A continuación se le suma a la fila $i - 1$ un múltiplo de la $i - 2$ para que se anule el nuevo elemento $(i - 1, 1)$ y así sucesivamente hasta anular el $(2, 1)$ sumándole a la segunda fila un múltiplo de la primera.

Matricialmente, el proceso supone premultiplicar A por una matriz de permutación P_1 (que puede ser la identidad si no ha habido que reordenar las filas) y después premultiplicar a la matriz $P_1 A$ por una matriz bidiagonal inferior con diagonal unidad,

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ q_{2,1}^1 & 1 & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & q_{3,2}^1 & 1 & 0 & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & q_{n-1,n-2}^1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & q_{n,n-1}^1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

donde los elementos $q_{n,n-1}^1, q_{n-1,n-2}^1, \dots, q_{i+1,i}^1$ serían cero si, como hemos dicho, el último elemento no nulo de la matriz $P_1 A$ fuera el de lugar $(i, 1)$. En general el elemento $q_{j+1,j}^1$ es el factor por el que hay que multiplicar la fila j de $P_1 A$ para sumársela a la $j + 1$ y producir un cero en el lugar $(j + 1, 1)$.

Así pues, la primera columna de la matriz $Q_1 P_1 A$ tiene ceros en los lugares $(2, 1), \dots, (n, 1)$. Entonces continúa el proceso con la segunda columna: primero se reordenan las filas para que los posibles ceros que aparezcan en la segunda columna pasen a los últimos lugares, y luego se producen ceros en esa columna sumándole a cada fila un múltiplo de la anterior, terminando este proceso tan arriba como se puede. Después se continúa con las siguientes columnas.

Si la matriz A era regular, el resultado final del proceso es una matriz triangular superior B con diagonal no nula. En cualquier caso se obtiene una matriz B triangular superior *escalonada*. Con este nombre denotamos las matrices B de orden n tales que para cada $i = 1, \dots, n - 1$ se verifica:

- 1) Si la fila i es nula, las filas posteriores son nulas.
- 2) Si $b_{i,j}$ es el primer elemento no nulo de la fila i , entonces $b_{h,j} = 0 \forall h > i$ y si $b_{i',j'}$ es el primer elemento no nulo de la fila i' , ($i \leq i' \leq n$), entonces $j' > j$.

Matricialmente, el proceso se escribe en la forma

$$B = Q_n P_n \dots Q_2 P_2 Q_1 P_1 A, \quad (3.2)$$

donde las matrices Q_k tienen la forma (3.1), con elementos $q_{j+1,j}^k$ en lugar de los $q_{j+1,j}^1$. Si la matriz A fuera regular, entonces P_n y Q_n no son necesarios, porque la última columna de $Q_{n-1} P_{n-1} \dots Q_2 P_2 Q_1 P_1 A$ no tendrá ceros, y además, en este caso, en cada Q_k los elementos $q_{j+1,j}^k$ son nulos para $j < k$.

En lo sucesivo, nos referiremos a los números $-q_{j+1,j}^k$ como los *multiplicadores* de la etapa k -ésima de la eliminación de Neville de A .

Hay una diferencia entre los procesos de eliminación de Gauss y de Neville que es fundamental cuando se está tratando con matrices A que son totalmente positivas. Las transformaciones elementales en que se descompone la eliminación gaussiana son de la forma $E_{i,k}(\alpha)$, donde $i > k$, cuyo elemento (r,s) , $1 \leq r, s \leq n$, es

$$\begin{cases} 1 & \text{si } r = s \\ \alpha & \text{si } r = i, s = k \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Esta matriz no es totalmente positiva salvo que $\alpha = 0$ o que $k = i - 1$ y $\alpha > 0$. En efecto, para ser una matriz TP α debe ser no negativa y si es positiva y $k \neq i - 1$ aparecen submatrices de orden 2 de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

cuyo determinante es negativo.

En cambio en la eliminación de Neville las transformaciones elementales son siempre de la forma $E_{i,i-1}(\alpha)$, las cuales son totalmente positivas si y sólo si α es no negativa. Además los α de las transformaciones elementales en que se descompone Q_j son los opuestos de los multiplicadores de la etapa j de la eliminación de Neville de A . Teniendo en cuenta que

$$(E_{i,i-1}(\alpha))^{-1} = E_{i,i-1}(-\alpha) \quad (3.5)$$

que (3.2) se puede escribir

$$A = P_1^{-1} Q_1^{-1} \dots P_n^{-1} Q_n^{-1} B = P_1^T Q_1^{-1} \dots P_n^T Q_n^{-1} B \quad (3.6)$$

y que el producto de matrices totalmente positivas también lo es, resulta que si el proceso de eliminación de Neville conduce a una matriz TP y lo hace sin

cambios de filas y con multiplicadores no negativos, entonces la matriz de partida A es totalmente positiva. En este razonamiento nos hemos limitado a considerar la situación más simple, que es la de no permitir cambios de filas, pero esta condición puede ser rebajada parcialmente.

El resultado anterior no se mantiene para la eliminación de Gauss.

Crucial en la explotación a fondo de la idea anterior fue la obtención de la expresión explícita de los elementos que van apareciendo al realizar las distintas transformaciones a la matriz A en el proceso de eliminación de Neville. Esto fue hallado en [19] y [36] y con más detalle en [23].

Llamamos *eliminación completa de Neville* al proceso que transforma la matriz A en una matriz U escalonada triangular superior mediante eliminación de Neville, seguido de la eliminación de Neville de U^T , traspuesta de U , hasta dejarla en forma diagonal. Esta segunda parte equivale a realizar la eliminación de Neville *por columnas* en U .

El uso sistemático de la eliminación de Neville nos ha permitido obtener resultados como los siguientes:

- a) *Mejora de la caracterización por el signo de los menores de las matrices totalmente positivas y estrictamente totalmente positivas.*

Una matriz totalmente positiva lo es estrictamente cuando todos sus menores son positivos. Atendiendo a la definición, para ver si una matriz A es TP o STP (estrictamente TP) habría que ver el signo de todos sus menores, cuyo número es $\binom{2n}{n} - 1$ para una matriz cuadrada A de orden n . Una cuestión interesante es reducir el número de menores a considerar porque el signo de los demás sea consecuencia del de aquellos. Para las matrices STP hay un antiguo resultado de Fekete [11] que demuestra que basta comprobar el signo positivo de todos los menores formados con filas y columnas consecutivas de la matriz A : el número de dichos menores es $n(n+1)(2n+1)/6$.

Esta caracterización había permanecido como óptima en ese sentido desde entonces. Pero en [23] hemos demostrado que basta considerar aquellos menores con filas y columnas consecutivas tales que o las filas o las columnas son las iniciales, es decir que comienzan con la fila o columna 1, respectivamente. A estos menores, con filas $\{1, 2, \dots, i\}$ y columnas $\{j, j+1, \dots, j+i-1\}$ o con aquellas columnas y estas filas los llamamos *menores iniciales*, y con el resultado citado se muestra que juegan en las matrices STP un papel análogo al de los menores principales directores en las matrices simétricas definidas positivas. Su número es $n(n-1)$, lo cual supone dividir aproximadamente por $n/3$ el número anterior. Para $n=6$ el número total de menores de la matriz A es 923, que se reducen a 91 si se aplica el criterio de Fekete y a 30 si se tiene en cuenta nuestra caracterización.

En [26] hallamos la caracterización análoga para matrices totalmente positivas no singulares, mejorando también otras existentes (véase [9]): una matriz no singular es totalmente positiva si y sólo si los menores

principales directores son positivos y además son no negativos, para cualquier i , todos los menores con filas $\{1, 2, \dots, i\}$ (columnas cualesquiera) y también todos los menores con columnas $\{1, 2, \dots, i\}$ y filas cualesquiera.

b) *Obtención de otras caracterizaciones de matrices TP y STP.*

En [22] y [23] mostramos nuevas caracterizaciones de matrices TP y STP en términos de su eliminación de Neville. Así, una matriz cuadrada es STP si y sólo si se puede llevar a cabo la eliminación completa de Neville de A sin cambios de filas o columnas, con todos los multiplicadores positivos y llegándose a una matriz diagonal con elementos diagonales positivos. Esto supone un coste computacional de $O(n^3)$ operaciones, mientras que en [36] se usaba un test, también basado en eliminación de Neville, con $O(n^4)$ operaciones. Un test similar con eliminación de Gauss utilizaba $O(n^5)$.

Una caracterización análoga se obtiene para las matrices TP no singulares, reemplazando la positividad de los multiplicadores por no negatividad. Para matrices TP cualesquiera se permiten además cambios de filas o columnas nulas.

c) *Factorización de matrices TP y STP.*

En los años 70, Cryer [8–9] había obtenido caracterizaciones de las matrices TP y STP mediante descomposiciones del tipo LU, es decir triangular inferior por triangular superior. También se habían obtenido caracterizaciones como producto de un número no determinado de matrices bidiagonales. En [22] hemos precisado mucho más esa caracterización: una matriz A no singular de orden n es STP si y sólo si se puede expresar en la forma

$$A = H_1 H_2 \dots H_{n-1} D K_{n-1} \dots K_2 K_1, \quad (3.7)$$

donde

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & h_{i+1}^{(i)} & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & h_n^{(i)} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

y

$$K_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & k_i^{(i)} & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & k_{n-1}^{(i)} \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

con $h_r^{(i)} > 0$ para $r > i$, $k_r^{(i)} > 0$ para $r > i - 1$ y D es una matriz diagonal con elementos diagonales positivos.

Hay en el mismo trabajo una caracterización similar para matrices totalmente positivas no singulares, sustituyendo la positividad de los elementos extradiagonales de H_i y K_i por la no negatividad y con una condición adicional:

$$\begin{aligned} h_j^{(i)} = 0 &\implies h_r^{(i)} = 0 \quad \forall r > j \\ k_l^{(i)} = 0 &\implies k_r^{(i)} = 0 \quad \forall r > l. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Se ha demostrado, además, que estas factorizaciones son únicas en sus condiciones.

Caracterizaciones de matrices totalmente positivas mediante la factorización QR , es decir como producto de una ortogonal por una triangular superior, aparecieron por primera vez en nuestro trabajo [26].

d) *Resolución de sistemas lineales con matriz totalmente positiva.*

En primer lugar hay que resaltar que, si bien la eliminación de Neville de una matriz A tiene el mismo orden de coste computacional que la de Gauss, hay determinadas clases de matrices para las que aquella requiere un menor número de operaciones que ésta. En concreto, eso sucede para ciertas matrices A en cuya descomposición LU la matriz L sea inversa de una estrictamente bandeda. Tomando un ejemplo muy sencillo, para reducir la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a forma triangular superior (en este caso diagonal) por eliminación de Gauss o de Neville, se requiere el mismo número de operaciones. Tanto en una como en otra se produce un cero en el lugar (2,1) sumándole a la segunda fila la primera, después se produce un cero en el lugar (3,2)

sumándole a la tercera la segunda multiplicada por -2 . Finalmente se produce un cero en el $(4,3)$ sumándole a la cuarta la tercera multiplicada por 3 . Son en total 3 pasos en ambas eliminaciones, que en este ejemplo son totalmente coincidentes.

Para realizar lo mismo en la matriz inversa de la anterior,

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

se necesitan 6 pasos en la eliminación gaussiana: la anulación, en este orden, de los elementos $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ y $(4,3)$. En cambio bastan 3 pasos de la eliminación de Neville: al producir el primer cero del proceso en el lugar $(4,1)$, sumándole a la cuarta fila la tercera multiplicada por -3 , aquella queda en la forma $(0,0,0,1)$. Al producir un cero en el lugar $(3,1)$ sumándole a la tercera fila la segunda por -2 aquella queda $(0,0,1,0)$, y análogamente con la segunda al restarle la primera. En total, 3 pasos dejan ya la matriz en forma diagonal.

Esto no es una casualidad: demostramos en [22] que el coste de la eliminación de Neville de una matriz L triangular inferior y el de su inversa coinciden, y ambos coinciden con los de las matrices $A = LU$ o $B = L^{-1}U$, cualquiera que sea la matriz triangular superior U . Esto no sucede en la eliminación de Gauss.

Respecto a la resolución de sistemas lineales cuando se va a utilizar eliminación de Gauss, es recomendable realizar previamente un escalado de filas de la matriz del sistema, es decir multiplicar las ecuaciones por números adecuados para que al aplicar la eliminación, con una estrategia de pivote parcial, no se produzcan graves errores debido al redondeo. Dicha estrategia consiste en cambiar de orden las ecuaciones del sistema para que los multiplicadores en cada etapa tengan valor absoluto no mayor que 1 .

En el caso particular de matrices TP no singulares, en [5] se mostró que la precisión obtenida al resolver un sistema totalmente positivo por eliminación de Gauss sin pivotaje o con pivotaje parcial son similares. En [27] estudiamos una estrategia más completa, como es la de pivotaje parcial con escalado, tanto para Gauss como para Neville. Probamos que tanto si se realiza escalado de filas con la norma del máximo como con la euclídea (propugnada como más recomendable en [38] si no se tiene en cuenta su mayor coste) la mejor ordenación de las filas, es decir de las ecuaciones, en el caso de matrices TP no singulares es la que presenta la matriz del sistema original. En resumen, que no es necesario realizar cambios. Este hecho es muy importante en la resolución de sistemas cuya matriz de coeficientes es de bandas (como ocurre

en problemas de interpolación por splines con frecuencia), en los que los cambios de filas romperían la estructura de ceros de la matriz y aumentaría el coste computacional.

4. POSITIVIDAD TOTAL Y SUS APLICACIONES

Una función real bivariada $K(x, y)$, llamada frecuentemente *núcleo*, con x, y definidas sobre conjuntos linealmente ordenados X, Y , se dice que es totalmente positiva si para cualquier entero r y cualesquiera $x_1 < x_2 < \dots < x_r, y_1 < y_2 < \dots < y_r, x_i \in X, y_i \in Y$, se tiene

$$\det \begin{pmatrix} K(x_1, y_1) & \dots & K(x_1, y_r) \\ \vdots & & \vdots \\ K(x_r, y_1) & \dots & K(x_r, y_r) \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.1)$$

Si X, Y son conjuntos finitos se tiene la versión discreta de esta definición, que son las matrices totalmente positivas.

El caso particular en que $K(x, y) = f(x - y)$ recibe el nombre de *función de frecuencia de Polya*.

Conceptos íntimamente ligados al de positividad total son los de sistemas de Chebyshev de funciones, las funciones de Green asociadas a gran número de problemas de contorno de Sturm–Liouville, los procesos estocásticos de difusión, como los de nacimiento–muerte, etc.

Concretamente, del estudio de las vibraciones en sistemas mecánicos acoplados por Gantmacher y Krein [12–13] se deriva la primera monografía sobre matrices totalmente positivas. El importante libro de Karlin [31], que sigue siendo después de muchos años referencia básica y obligada en este tema, recogió y amplió gran parte de las investigaciones de Schoenberg sobre positividad total. Por otro lado, Karlin aplicó la total positividad a la Economía y, en particular, a la teoría de inventarios. En el caso de Schoenberg, aquellas investigaciones venían fuertemente relacionadas con la teoría de splines. Estudió la interpolación mediante las funciones splines, obteniendo el importante Teorema de Schoenberg–Whitney [39], introdujo los B -splines y conjeturó la total positividad de la matriz de colocación de los B -splines, lo cual fue probado por Karlin en su libro. De hecho, dicha matriz pertenece a la clase de matrices casi estrictamente totalmente positivas, clase de matrices (cuyas submatrices tienen determinante no nulo si y sólo si los elementos de su diagonal principal son no nulos) que ha sido introducida y caracterizada en [25]. A esta clase pertenecen también las matrices de Hurwitz, que proveen un criterio para que un polinomio tenga sus ceros con parte real estrictamente negativa; esta propiedad tiene importantes aplicaciones en el estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos.

Además de las mencionadas, continúan surgiendo aplicaciones de las matrices totalmente positivas a diferentes campos, como por ejemplo a la teoría de politopos (ver [40]), pero uno de los campos donde juegan un papel más

importante es el diseño geométrico asistido por ordenador (C.A.G.D.). En la siguiente sección presentaremos algunas de las principales aplicaciones en este campo.

Señalemos, finalmente, que los artículos de estas últimas décadas sobre matrices totalmente positivas han aparecido, con frecuencia, en la revista *Linear Algebra and its applications*. Mención especial merece la revisión de la teoría realizada por el algebrista T. Ando en 1987 en dicha revista [2].

5. MATRICES TOTALMENTE POSITIVAS Y C.A.G.D.

A partir de que Schoenberg y Karlin advirtieron la relación entre los problemas de interpolación con splines y las matrices totalmente positivas, la mayor parte de la investigación sobre estas matrices se ha desarrollado dentro de la Teoría de Aproximación, en especial en su vertiente de aplicaciones a C.A.G.D., y ello se debe especialmente a la propiedad de la disminución de la variación, que es una de las características de la positividad total. Siguiendo las notaciones de [28] expondremos brevemente las conexiones entre esos campos.

Denotaremos con $V(f)$ el número de cambios estrictos de signo de una función en un intervalo y con $V(x)$ el número de cambios de signo en la sucesión de las componentes del vector x . Si una matriz es totalmente positiva (TP) es fácil ver que $V(Ax) \leq V(x)$ (de hecho, esta propiedad caracteriza a la clase de matrices signo-regulares, que contiene a las matrices TP: ver Sección 5 de [2]).

Se llama totalmente positiva a una sucesión de funciones $(\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n)$ en un intervalo I si para cualesquiera $t_0 < t_1 < \dots < t_m$ en I , la matriz de colocación $(\vartheta_j(t_i))_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$ es TP. Entonces, para cualesquiera a_0, \dots, a_n reales se tiene ([28]):

$$V(a_0\vartheta_0 + \dots + a_n\vartheta_n) \leq V(a_0, \dots, a_n). \quad (5.1)$$

La base de Π_n , polinomios de grado menor o igual que n , formada por los polinomios de Bernstein

$$\vartheta_i(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad 0 < t < 1, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (5.2)$$

es TP en $(0,1)$.

Las potencias truncadas de grado k , dadas por

$$\vartheta_i(t) = (t - a_i)_+^k, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

forman una sucesión TP cualesquiera que sean los a_i distintos. Otros ejemplos de sistemas TP son los B -splines, así como los β -splines (que tienen condiciones de continuidad geométrica en los nudos) con matriz de conexión TP [10].

Diremos ahora que una sucesión de funciones $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ totalmente positiva está normalizada (NTP) en un intervalo I si

$$\sum_{i=0}^n \vartheta_i(t) = 1, \quad \forall t \in I.$$

Así, la base de polinomios de Bernstein es NTP en $(0,1)$. Otro ejemplo interesante de base NTP de Π_{2k+1} es la llamada base de Ball generalizada (ver [30]), dada en $(0,1)$ por:

$$\begin{aligned} \vartheta_i(t) &= \binom{k+1}{i} t^i (1-t)^{k+1}, \quad i = 0, \dots, k \\ \vartheta_i(t) &= \vartheta_{2k+1-i}(1-t), \quad i = k+1, \dots, 2k+1. \end{aligned}$$

Observemos que dada cualquier sucesión de funciones (ψ_0, \dots, ψ_n) TP cumpliendo $\sum_{i=0}^n \psi_i > 0$, podemos construir una sucesión NTP $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ definiendo

$$\vartheta_i = \frac{\psi_i}{\sum_{i=0}^n \psi_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Así, por ejemplo, si ψ_0, \dots, ψ_n son B -splines, entonces $\vartheta_0, \dots, \vartheta_n$ son los llamados B -splines racionales.

Dada $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ NTP, consideremos ahora curvas paramétricamente definidas

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t)) = \sum_{i=0}^n A_i \vartheta_i(t), \quad t \in [a, b]. \quad (5.3)$$

A los puntos $A_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ ($i = 0, \dots, n$) se les llama puntos (o vértices) de control de la curva, y al arco poligonal que forman (que lo denotaremos $A_0 \dots A_n$) *polígono de control*. En el caso de que $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ sea la base de Bernstein, el polígono de control se suele llamar *polígono de Bézier*.

Si $(\vartheta_0, \dots, \vartheta_n)$ es NTP, de (5.1) se puede deducir (ver [28]) que el número de veces que una recta corta a la curva q dada en (5.2) es menor o igual que el número de veces que corta a su polígono de control $A_0 \dots A_n$. Además, si el polígono es convexo la curva es convexa y está en la envolvente convexa del polígono. De modo que el polígono de control puede indicar la forma de la curva o, dicho de otro modo, la curva puede preservar o imitar la forma del polígono de control. Así, el polígono de control de una curva paramétricamente definida respecto a una base NTP nos da una buena guía de la forma de una curva eligiendo adecuadamente o cambiando el polígono de control. Estas propiedades de preservación de formas son las que otorgan interés a las bases NTP.

Ahora vamos a presentar otro aspecto central de C.A.G.D. muy relacionado con el anterior de preservación de formas. Varios algoritmos para la manipulación o computación de curvas toman la forma de alteraciones

geométricas sucesivas del polígono de control. El hecho común compartido por estos algoritmos es que los nuevos polígonos de control están formados por sucesivos reemplazamientos de dos vértices de control adyacentes por combinaciones convexas de ellos. Estos algoritmos reciben el nombre de algoritmos de corte de esquinas (*corner cutting*) a causa de su interpretación geométrica aparente.

Así, por ejemplo, se dice que el arco poligonal $B_0 \dots B_{n+1}$ se obtiene del $A_0 \dots A_n$ cortando una esquina si para algún j

$$\begin{aligned} B_i &= A_i & , & \quad 0 \leq i < j \\ B_j &= \lambda A_{j-1} + (1 - \lambda) A_j & , & \quad (0 \leq \lambda \leq 1) \\ B_{j+1} &= \mu A_j + (1 - \mu) A_{j+1} & , & \quad (0 \leq \mu \leq 1) \\ B_{i+1} &= A_i & , & \quad j < i \leq n, \end{aligned}$$

es decir, si

$$\begin{pmatrix} B_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & 1 - \lambda & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mu & 1 - \mu & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que la matriz de paso es TP, bidiagonal (en estos aspectos como las matrices (3.1) que aparecían en el proceso de eliminación de Neville) y estocástica (es decir, con filas no negativas sumando uno). De hecho, los algoritmos de corte de esquinas están fuertemente ligados a los procesos de eliminación de Neville de una matriz.

Es especialmente importante el hecho de que, dada una curva q como en (5.3), para cualesquiera $t_1 < \dots < t_m$ en I , el arco poligonal $q(t_1) \dots q(t_m)$ puede obtenerse cortando esquinas del polígono de control (ver [28]). El conocido algoritmo de Casteljaou es un caso particular de esto, correspondiente a $m = 1$: de (5.3), con los ϑ_i definidos por (5.2) se tiene

$$q(t) = (A_0, A_1, \dots, A_n) (\vartheta_0(t), \dots, \vartheta_n(t))^T.$$

Aquí la matriz de una columna $(\vartheta_0(t), \dots, \vartheta_n(t))^T$ se puede descomponer fácilmente como producto de matrices TP con traspuesta estocástica.

Por ejemplo, para $n = 3$, $(\vartheta_0(t), \dots, \vartheta_3(t))^T$ es el producto de las matrices

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ t & 1-t \\ 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix},$$

que tienen las propiedades citadas. Si se va multiplicando el polígono (A_0, A_1, \dots, A_n) por esas matrices resulta un algoritmo de corte de esquinas que es el algoritmo de Casteljaou.

Por otro lado, a veces también se consideran algoritmos de corte de esquinas para pasar de un polígono a otro con igual número de vértices (ver [28]). Esta situación nos aparecerá, como veremos, al volver a considerar el problema de preservación de formas. Sean $\Phi = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ y $B = (b_0, \dots, b_n)$ dos bases NTP del espacio vectorial Π_n de polinomios de grado menor o igual a n . Sea M la matriz dada por

$$(\varphi_0, \dots, \varphi_n) = (b_0, \dots, b_n) M. \tag{5.4}$$

Por estar ambas bases normalizadas, M debe ser estocástica. Además, si q es una curva polinómica expresada en términos de ambas bases

$$q(t) = \sum_{i=0}^n B_i b_i(t) = \sum_{i=0}^n \Phi_i \varphi_i(t), \quad t \in [a, b]$$

entonces M relaciona los dos polígonos de control

$$(B_0, \dots, B_n)^T = M (\Phi_0, \dots, \Phi_n)^T. \tag{5.5}$$

Si ahora suponemos que M es TP, entonces M es una matriz estocástica no singular, de modo que se puede factorizar como un producto de matrices bidiagonales no negativas. Dicha factorización se puede interpretar como un algoritmo de corte de esquinas (ver [28,29]) y está muy relacionada con las factorizaciones de la forma (3.7). Además, se pueden deducir las siguientes propiedades de los polígonos de control $B_0 \dots B_n$ y $\Phi_0 \dots \Phi_n$ (ver [28], [30]):

- Si $\Phi_0 \dots \Phi_n$ es convexo, entonces también lo son $B_0 \dots B_n$ y la curva q , y $B_0 \dots B_n$ está entre $\Phi_0 \dots \Phi_n$ y q .
- La longitud de $B_0 \dots B_n$ está comprendida entre la de q y la de $\Phi_0 \dots \Phi_n$.
- El número de inflexiones de $B_0 \dots B_n$ está comprendido entre el de q y el de $\Phi_0 \dots \Phi_n$.
- La variación angular de $B_0 \dots B_n$ está comprendida entre la de q y la de $\Phi_0 \dots \Phi_n$.

De estas propiedades se deduce que la curva q imita la forma de $\Phi_0 \dots \Phi_n$ aunque en menor grado que la de $B_0 \dots B_n$.

Dado que para todos los ejemplos de bases NTP conocidas $(\theta_0, \dots, \theta_n)$ siempre había una matriz M TP que las relacionaba con la de Bernstein como en (5.4) (y así quedaba el polígono de control correspondiente relacionado con el de Bézier como en (5.5)), Goodman y Said conjeturaron en [30] que la base de Bernstein tiene óptimas propiedades de preservación de formas entre todas las bases NTP de Π_n . Recientemente [7] se ha obtenido una respuesta afirmativa a esta conjetura. Para su demostración se han utilizado las técnicas de eliminación de Neville y las caracterizaciones mediante menores de las matrices TP y STP mencionadas en la Sección 3. Además, en dicho trabajo se da un test para reconocer si una base es NTP (y por tanto, si tiene buenas propiedades de preservación de formas), y también proporciona un algoritmo de corte de esquinas para obtener el polígono de Bézier a partir del polígono de control respecto a una base NTP.

REFERENCIAS

- [1] AITKEN, A. B.: On interpolation by iteration of proportional parts without the use of differences. Proc. Edimburgh Math. Soc. 3 (1932), 56–76.
- [2] ANDO, T.: Totally positive matrices. Linear Algebra Appl. 90 (1987), 165–219.
- [3] DE BOOR, C.: Total positivity of the spline collocation matrix. Indiana Univ. J. Math. 25 (1976), 541–551.
- [4] DE BOOR, C., DE VORE, R.: A geometric proof of total positivity for spline interpolation. Math. Comput. 172 (1985), 497–504.
- [5] DE BOOR, C., PINKUS, A.: Backward error analysis for totally positive linear systems. Numer. Math. 27 (1977), 485–490.
- [6] BREZINSKI, C.: The Mühbach–Neville–Aitken algorithm and some extensions. BIT, 80, (1980), 444–451.
- [7] CARNICER, J., PEÑA, J. M.: Shape preserving representations and optimality of the Bernstein basis. Aparecerá en Advances in Comput. Mathem. 1992.
- [8] CRYER, C.: LU-factorization of totally positive matrices. Linear Algebra Appl. 7, (1973) 83–92.
- [9] CRYER, C.: Some properties of totally positive matrices. Linear Algebra Appl. 15, (1976) 1–25.
- [10] DYN N., MICHELLI, C. A.: Piecewise polynomial spaces and geometric continuity. Report IBM T.J. Watson R.C. 1990.
- [11] FEKETE, M.: Über ein Problem von Laguerre. Rend. Conti. C.M. Palermo 34 (1913) 89–100; 110–120.
- [12] GANTMACHER, F. R., KREIN, M. G.: Sur les matrices completement non-negatives et oscillatoires. Compositio Math. (1937) 445–276.
- [13] GANTMACHER, F. R., KREIN, M. G.: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme. Akademie-Verlag, Berlin (1960).
- [14] GASCA, M., MAEZTU, J. I.: On Lagrange and Hermite interpolation in \mathbb{R}^k . Numer. Math. 39, (1982), 1–14.

-
- [15] GASCA, M., LOPEZ CARMONA, A.: A general recurrence interpolation formula and its applications to multivariate interpolation. *Journal of Approximation Theory* 24 (1982), 361–374.
- [16] GASCA, M., RAMIREZ, V.: Interpolation systems in \mathbb{R}^k . *Journal of Approximation Theory* 42, (1984), 36–51.
- [17] GASCA, M., LEBRON, E.: On Aitken–Neville formulae for multivariate interpolation. En *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, E.L. Ortiz (ed.), North Holland, 1987, 133–140.
- [18] GASCA, M., LEBRON, E.: Elimination techniques and interpolation. *Journal of Comp. and Applied Math.* 19 (1987), 125–132.
- [19] GASCA, M., MÜHLBACH, G.: Generalized Schur complements and a Test for Total Positivity. *Applied Numer. Math.* 3 (1987), 215–232.
- [20] GASCA, M., MÜHLBACH, G.: Multivariate interpolation: a survey with regard to extrapolation. *Proc. IMACS Transactions on scientific computing*, vol 1, (1988) 591–594.
- [21] GASCA, M.: Multivariate polynomial interpolation. En *Computation of curves and surfaces*, Dahmen, Gasca y Micchelli edit., Kluwer Acad. 1991, 215–236.
- [22] GASCA, M., PEÑA, J. M.: A matricial description of Neville elimination, with applications to total positivity. Aparecerá en *Linear Algebra Appl.*
- [23] GASCA, M., PEÑA, J. M.: Total positivity and Neville elimination. *Linear Algebra Appl.* 165 (1992) 25–44.
- [24] GASCA, M., PEÑA, J. M.: On the characterization of totally positive matrices. En *Approximation Theory*, editor S.P. Singh, Kluwer Pub. (1992) 357–364.
- [25] GASCA, M., MICCHELLI, C. A., PEÑA, J. M.: Almost strictly totally positive matrices. *Numerical Algorithms* 2 (1992) 225–236.
- [26] GASCA, M., PEÑA, J. M.: Total positivity, QR factorization and Neville elimination. Aparecerá en *SIAM J. Matrix Analysis*. 1992
- [27] GASCA, M., PEÑA, J. M.: Scaled pivoting in Gauss and Neville elimination for totally positive systems. Preprint. Enviado a publicación, 1992.
- [28] GOODMAN, T. N. T.: Shape preserving representations. En *Mathematical methods in CAGD*, T. Lyche, L. Schumaker edit., Academic Press 1989, 333–357.
- [29] GOODMAN, T. N. T., MICCHELLI, C. A.: Corner cutting algorithms for the Bezier representation of free form curves. *Linear Alg. Appl.* 99 (1988) 225–252.
- [30] GOODMAN, T. N. T., SAID, H. B.: Shape preserving properties of the generalized Ball basis. *Computer Aided Geometric Design* 8 (1991) 115–121.
- [31] KARLIN, S.: *Total Positivity*, Vol. I, Stanford U.P., Clif., 1968.
- [32] KEMPERMANN, J. H. B.: A Hurwitz matrix is totally positive. *SIAM J. Math. Anal.* 13 (1982), 331–341.
- [33] MICCHELLI, C. A., PINKUS, A.: Descartes systems from corner cutting. *Constructive Approximation* 7 (1991) 161–194.
- [34] MÜHLBACH, G.: The general Neville–Aitken algorithm and some applications. *Numer. Math.* 31, (1978), 97–110.
- [35] MÜHLBACH, G., GASCA, M.: A generalization of Sylvester’s identity on determinants and some applications. *Linear Algebra Appl.* 66, (1985) 221–234.

- [36] MÜHLBACH, G.: GASCA, M.: A test for strict total positivity via Neville elimination. En *Current Trends in Matrix Theory*, F. Uhlig and R. Groue, eds. Elsevier Science Publishing Co., 1987, 225–232.
- [37] NEVILLE, E. H.: Iterative interpolation. *J. Indian Math. Soc.* 20 (1934) 87–120.
- [38] POOLE, G., NEAL, L.: A geometric analysis of Gaussian elimination, I. *Linear Algebra Appl.* 149 (1991) 249–272.
- [39] SCHOENBERG, I. J., WHITNEY, A.: On Pólya frequency functions III. The positivity of translation determinants with applications to the interpolation problem by spline curves. *Trans. Am. Math. Soc.* 14 (1953), 246–259.
- [40] STURMFELS, B.: Totally Positive Matrices and Cyclic Polytopes. *Linear Algebra Appl.* 107 (1988) 275–281.
- [41] THACHER, H. C., MILNE, W. E.: Interpolation in several variables. *J. SIAM* 8 (1960), 33–41.