Sobre el teorema de las dos alternativas

POR F. CRIADO

Recibido: 10 de Enero de 1990

Presentado por el Académico Numerario D.Sixto Ríos

Resumen

Una de las demostraciones del Teorema fundamental de los juegos bipersonales de suma nula (teorema del minimax), está basada en el teorema de la alternativa para matrices. La demostración de este teorema pasa por Stiemke (1915), cuya prueba es algebraica hasta la utilización de los teoremas de separación (Vorob'ev, 1976).

En este artículo se presenta una nueva demostración a partir del teorema del punto fijo para multiampliaciones, utilizando los valores de la función de pago.

Abstract

One of the proofs of the fundamental theorem of zero-sum twoperson game theory (minimax theorem) is based on the theorem of the alternative for matrices. The proof of this theorem begins with Stiemke (1915), with an algebraic proof and passes through the separation theorems (Vorob'ev, 1976). This paper gives a new proof of the theorem based on the fixed point theorem for mappings constructed from the pay-off function.

1. Notaciones, definiciones y consideraciones generales

Dado el juego matricial

$$\Gamma(A) = \{I_m, I_n, A\}$$

y su extensión mixta

$$E(\Gamma(A)) = \{S_m, S_n, M\}$$

donde

$$M(\xi, \eta) = \xi A \eta.$$

Representaremos por $M(i,\eta)$ el pago si el jugador I utiliza la estrategia pura i y el jugador II la estrategia mixta η, y por $M(\xi,j)$ el pago si el jugador I utiliza la estrategia mixta ξ y el jugador II la estrategia pura j. De aquí si representamos por:

$$P_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}; \quad i = 1,2,\ldots n;$$

$$Q_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}), \quad j = 1,2,\ldots,m$$

tendremos:

$$M(i,\eta) = Q_i\eta; \quad M(\xi,j) = \xi \underline{P}_j$$

Definición I: Diremos que Ω es una correspondencia cerrada de S_m en S_n si

$$\xi_0 \in S_m, \quad \eta_0 \in S_n, \quad \eta_0 \notin \Omega(\xi_0)$$

implica la existencia de dos entornos $U(\xi_0)$ y $V(\eta_0)$ tales que:

$$\xi \in U(\xi_0) \Rightarrow \Omega(\xi) \cap V(\eta_0) = \text{o}$$

Definición II (equivalente): Diremos que Ω es cerrada en ξ_0 si siempre que

$$\{\xi_n\} \to \{\xi_0\}, \quad \eta_n \in \Omega(\xi_n) \quad \text{y} \quad \{\eta_n\} \to \{\eta_0\},$$

entonces

$$\eta_0 \in \Omega(\xi_0)$$

Ω se dirá cerrada, si es cerrada en todos los puntos de su dominio, si su grafo, es decir,

$$Gr(\Omega) = \{\xi, \eta) \in S_m \cdot S_n : \eta \in \Omega(\xi)\}$$

es cerrado.

2. Teorema de la alternativa

Dada una matriz arbitraria

$$A = (a_{ij}) 1 \leqslant i \leqslant m; \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

una y sólo una de las dos siguientes posibilidades (alternativas) se verifica.

i) Existe un vector $\eta \in S_n$ tal que:

$$Q_j\eta \leqslant \vec{0}, \qquad \forall_j = 1,2,\dots m \Leftrightarrow A_\eta \geqslant \vec{0}$$

ii) Existe un vector $\xi \in S_m$ tal que:

$$\xi P i < \vec{0}, \qquad \forall_i = 1,2,\dots n \Leftrightarrow \xi A < 0$$

Demostración: Consideremos la correspondencia Ω de Sm en $-\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\Omega : S_m \longrightarrow -\mathbb{R}^n \\ &\xi \longrightarrow \Omega(\xi) = \{u \in -\mathbb{R}^n : \ \xi A u = \\ = \ &M(\xi, u) = \sum_{j=i} uj\, M(\xi, j) \leqslant 0\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dicha correspondencia es cerrada. En efecto, en $S_m \times -\mathbb{R}^n$ el grafo de Ω:

$$Gr(\Omega) = \{(\xi, u) : \ M(\xi, u) \leqslant 0\}$$

es un conjunto cerrado.

Puesto que img(Ω) es compacto, co(img(Ω)) es compacto. Definimos ahora la aplicación.

$$f : \ S_m \times \text{co}(\text{img}(\Omega)) \longrightarrow S_m$$

$$(\xi, z) \longrightarrow f(\xi z) = \{f_1, f_2, f_i, \dots f_m\}$$

$$f_i = \frac{\xi_i + M^+(i,z)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{m} M^+(i,z)}, \quad i = 1,2,\dots m \tag{2.2}$$

siendo

$$M^+(i,z) = \max\{M(i,z), 0\} \quad \forall_i = 1,2,\dots m$$

Dicha aplicación es continua. Por último la correspondencia:

$$T = \{f(\xi, z) : \ z \in \Omega(\xi)\} \tag{2.3}$$

Verifica las hipótesis del Teorema de Cellina (1969), en consecuencia T tiene un punto fijo, sea este

$$\xi_0 = (\xi_0^1, \xi_0^2, \dots \xi_0^m);$$

tendremos:

$$\xi_0^i = \frac{\xi_0^i + M^+(i,z)}{1 + \sum_{i=1}^{m} M^+(i,z)}, \quad \text{para algún} \quad z \in \Omega(\xi_0)$$

$$i = 1, 2, \ldots m$$

Puesto que

$$M(\xi_0, z) = \sum_{i=1}^{m} \xi_0^i M(i,z) \leqslant 0$$

para algún índice $i^* \in \mathrm{Im}$ debe ser $\xi_0^{i^*} > 0$ y $M(i^*, z) \leqslant 0$, por tanto $M^+(i^*, z) = 0$, y ya que:

$$\xi_0^{i^*} = \frac{\xi_0^{i^*}}{1 + \sum_{i=1}^{m} M^+(i,z)}$$

debemos tener

$$\sum_{i=1}^{m} M^+(i,z) = 0,$$

pero esto implica que

$$M(I,z) \leqslant 0, \ \forall_i = 1, 2, \ldots m \Leftrightarrow M(i,z) =$$
$$= \ Q_i z \leqslant 0, \ \forall_i = 1, 2, \ldots m \Leftrightarrow Az \leqslant \overrightarrow{0},$$

(multiplicando por -1), tendremos:

$$Az \geqslant \overrightarrow{0} \quad \text{siendo} \quad z = (z_1, z_2, z_i, \ldots z_n);$$
$$z_i \geqslant 0, \quad \forall_i = 1, 2, \ldots m. \tag{2.4}$$

La correspondencia Ω definida por 2.1 es evidentemente no vacía. Ahora bien, puede ocurrir:

i) Que $\overrightarrow{0} \notin \mathrm{imag}(\Omega)$, en consecuencia, teniendo en cuenta 2.4 y designando por

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_i, \ldots \eta_n),$$

siendo

$$\eta_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i} \quad i = 1, 2, \ldots n$$

tendremos que $\eta \in S_n$ y $A\eta \geqslant 0$.

ii) Que existe $\xi \in S_m$ tal que $\xi A < \overrightarrow{0}$ lo que implica que $O \in \text{imag}(\Omega)$ y las relaciones

$$\xi A < \overrightarrow{0}; \quad A\eta \geqslant \overrightarrow{0} \tag{2.5}$$

son incompatibles.

Observación: Si en lugar de definir la correspondencia Ω, definimos la correspondencia:

$$\Omega^* : S_n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\eta \longrightarrow \Omega^*(\eta) = \{v \in -\mathbb{R}^m : \ vA\eta = M(v,\eta)\}$$

un razonamiento similar establecería las incompatibilidades de las relaciones

$$A\eta < 0; \quad \xi A \geqslant 0$$

REFERENCIAS:

[1] BERGE, C. 1966.:— *Espaces topologiques*. Dunod, Paris.

[2] CELLINA, A. 1969.:— "Aproximation of set-valued functions and fixed point theorems". *Annali di matematica pura ed applicata, 4, 17-24.*

[3] STIEMKE, E. 1915.:— "Stiemke's Theorem".*Math. annalen., 76, 340-342.*

[4] VOROB'EV, N. 1976.:— *Game theory*. Springer-Verlag. New York.