Representación numérica de órdenes totales

POR J. C. CANDEAL Y E. INDURAIN

Resumen

Nuestra intención a través del presente trabajo es mostrar una serie de resultados acerca de la representación de cadenas (espacios totalmente ordenados) mediante funciones de utilidad (esto es, funciones numéricas con valores en la recta real, que preserven el orden) atendiendo, fundamentalmente, a propiedades topológicas de conexión y separabilidad. Demostramos también las interdependencias entre los distintos conceptos topológicos que aparecen, sobre la existencia de una función numérica que represente la cadena, obteniendo como caso particular los resultados clásicos.

Abstract

The paper is concerned with the existence of utility representations on totally ordered sets (chains).

We analyze some necessary and sufficient conditions for a chain to be representable by a numerical real–valued function (utility function). The conditions enclose topological properties, namely: connectedness, countably boundedness, and separability.

We give a general outlook to this theory, improving some results and furnishing alternative proofs for the classical ones.

1. Introducción

Dada una cadena, o conjunto totalmente (linealmente) ordenado $(Z, <)$, un problema que aparece de manera natural es el de intentar visualizar ("representar") este orden mediante una función numérica U ("función de utilidad"), con valores en la recta real, que preserve el orden en ambos sentidos, esto es, que se cumpla: $U(x) > U(y)$ (en la recta) si y sólo si $x > y$ (en Z).

Un artículo pionero en esta dirección se debe a Eilenberg (1941), quien prueba la existencia de una función de utilidad continua sobre un espacio topológico separable y conexo, completamente preordenado.

Entre otros autores clásicos que dan condiciones necesarias, o, suficientes, atendiendo a propiedades topológicas de conexión, axiomas de numerabilidad, separabilidad, etc., merece destacar a Nachbin (1950), Debreu (1954, 1959), Fleischer (1961) y Fishburn (1970, 1974).

Condiciones necesarias y suficientes de representabilidad (caracterizaciones) aparecen ya en en Milgram (1939), Debreu (1964), Fishburn (1970), Krantz et al. (1971) y Jaffray (1975a).

En este último trabajo de Jaffray se da una prueba sencilla de que para que una cadena $(Z, <)$ sea representable por una función de utilidad es necesario y suficiente que Z sea perfectamente separable, esto es que exista un conjunto finito o numerable, D, en Z, tal que para todo p, q de Z con $p < q$ se pueda encontrar d en D con $p \leqslant d \leqslant q$.

Conviene destacar que en la caracterización anterior no interviene ninguna topología, sino simplemente el hecho de que tenemos un conjunto ordenado.

Sin embargo, cabe también pensar que si una cadena es representable, la topología más natural para esa cadena (topología del orden) gozará de alguna propiedad especial. Así, el propio estudio de las propiedades topológicas de una cadena dotada de la topología del orden, servirá para encontrar nuevas caracterizaciones.

Por otra parte, distintos autores (por ejemplo, Fishburn (1970, 1974, 1983), Jaffray (1975a,b), Mehta (1985, 1986a,b), Chateauneuf (1987), Monteiro (1987), Tangyan (1988), Wakker (1988), Herden (1989a,b), etc.) han obtenido resultados acerca de la representabilidad mediante funciones de utilidad de conjuntos ordenados, supuesto que la topología del orden satisfaga "buenas propiedades". Asímismo, problemas de representación de órdenes totales pueden englobarse en otros problemas más generales como son los de representación de preórdenes, u órdenes parciales (en este último caso sólo se exige a la función de utilidad el verificar $x > y \Rightarrow U(x) > U(y)$).

En esta línea destaca la labor de autores como Nachbin (1950), Peleg (1970), Jaffray (1975b), Mehta (1985, 1986a,b), Chateauneuf (1987), o Herden (1989a,b) entre otros.

Es interesante señalar que el estudio de la representabilidad de preórdenes completos es un problema equivalente al de la representabilidad de una cadena asociada (véase Tangyan (1988) o Candeal e Induráin (1989), (1990a)).

En el presente trabajo nos centramos en la consideración de cadenas, y estudiamos teoremas de representabilidad en relación con propiedades topológicas como conexión y separabilidad. Obtenemos así nuevas demostraciones de resultados clásicos.

En esta línea mencionamos que en Candeal e Induráin, (1990b) estudiamos caracterizaciones topológicas de la representabilidad que giran alrededor de la verificación o no del segundo axioma de numerabilidad en un cadena dotada de la topología del orden.

2. Conceptos previos

Supondremos que Z es una cadena, con un orden " $<$ ", y con cardinalidad no superior a la del continuo.

En tal conjunto consideraremos la topología del orden cuya subbase está formada por los conjuntos del tipo $(\leftarrow, a) = \{z \text{ de } Z; z < a\}$, y del tipo $(a, \rightarrow) = \{z \text{ de } Z; a > z\}$.

D denotará un subconjunto numerable de Z. Por "$a \leqslant b$" entederemos que se da uno de los dos casos siguientes: $a < b$, ó $a = b$. "$a > b$" significará la negación de $a \leqslant b$.

Z se dice *sin huecos* si para todo z_1, z_2 de Z tales que $z_1 < z_2$, existe u en Z cumpliendo $z_1 < u < z_2$.

Z se dice *orden–completo* si cualquier subconjunto de Z, acotado superiormente, posee supremo en Z.

Un subconjunto Q de Z se dice *perfectamente–denso* si para todo z_1, z_2 de Z que satisfagan $z_1 < z_2$, existe q en Q tal que $z_1 \leqslant p \leqslant z_2$.

Z se dirá *separable* si existe D cuya adherencia es Z.

Z se dirá *perfectamente separable* si existe D perfectamente–denso.

Z se dice *fuertemente separable* si exise D tal que para cualesquiera p, q en Z con $p < q$, existe a en D con $p < a < q$.

Z es *numerablemente acotado* si existe D tal que para cualquier x en Z existen a, b en D con $a \leqslant x \leqslant b$.

Notas:

1) El concepto de "perfectamente–denso" es denominado por Fishburn (1983) "orden–denso". Sin embargo, esto podría llevar a confusión, pues no coincide, en general, con "denso en la topología del orden".

2) Todos estos conceptos aparecen en la literatura a través de los trabajos de Jameson, (1974), Jaffray, (1975a), Fishburn, (1983), Chateauneuf, (1987), Monteiro, (1987), etc.

3. Resultados sobre representabilidad de cadenas

Pasemos a estudiar ahora las principales interrelaciones entre los conceptos anteriores:

Proposición 1

Sea $(Z, <)$ una cadena, en la que se considera la topología del orden. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Z es fuertemente separable,

ii) Z es perfectamente separable, y sin huecos.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii) Es obvio.

ii) $\Rightarrow$ i) Sean a, b en Z con $a < b$. Sea D el correspondiente al hecho de ser Z perfectamente separable. Como Z no tiene huecos, existen a_1, b_1 en Z con $a < a_1 < b_1 < b$. Así, en

$$[a_1, b_1] = \{x \text{ en } Z;\ a_1 \leqslant x \leqslant b_1\}$$

debe haber algún elemento d en D, por ser Z perfectamente separable.

Concluimos la existencia de d en D con $a < d < b$.

Proposición 2

i) $(Z, <)$ fuertemente separable $\Rightarrow$ $(Z, <)$ perfectamente separable.

ii) $(Z, <)$ perfectamente separable $\Rightarrow$ $(Z, <)$ separable.

iii) $(Z, <)$ separable $\Rightarrow$ $(Z, <)$ numerablemente acotado.

iv) No es cierto el recíproco para ninguna de las implicaciones (i), (ii), (iii) anteriores.

v) $(Z, <)$ separable y sin huecos $\Rightarrow$ $(Z, <)$ perfectamente separable.

Demostración

(i) Está visto en la Proposición 1.

(ii) Sea D correspondiente al hecho de que Z sea perfectamente separable. Decimos que un elemento x de Z es un *antecesor* con respecto a D, si existe d en D con $x < d$, y no existe y en Z con $x < y < d$.

Decimos que un elemento x de Z es *sucesor* con respecto a D, si existe d en D con $d < x$, y no existe y en Z con $d < y < x$.

Llamemos $D^* = D \cup \{x;\ x \text{ antecesor para } D\} \cup \{x;\ x \text{ sucesor para} D\}$

D^* es numerable, por serlo D.

Veamos ahora que D^* corta a todo abierto básico no vacío (a, b) en $(Z, <)$. En efecto:

Dado (a, b) abierto básico no vacío, tomemos x en (a, b). Supuesto que $x \notin D^*$, y, por tanto $x \notin D$, tenemos:

(1) Si b no está en D, por ser Z perfectamente separable hay un elemento de D en (x, b).

(2) Si b está en D, como x no es antecesor para D, existirá z en x con $x < z < b$. Si z está en D, el problema está resuelto.

Si z no estuviese en D, el problema también estaría resuelto, pues por (1) encontraríamos un elemento de D en (x, z).

En definitiva, en (a, b) encontramos siempre algún elemento de D. Por tanto, D es denso y numerable, y Z es así separable.

(iii) Sea D numerable y topológicamente denso en $(Z, <)$. Suponemos además que hemos incluido en D (si existen, ya que pueden no existir) el primer elemento de Z y el último elemento de Z.

Dado x en Z, pero no en D, es obvio que $(x, \rightarrow)$, y $(\leftarrow, x)$ son no vacíos, luego por densidad de D, existe d_1 en $D \cap (x, \rightarrow)$, y también existe d_2 en $D \cap (\leftarrow, x)$. Así, $d_1 < x < d_2$, y Z es numerablemente acotado.

(iv) 1. Sea $Z = \{0, 1\}$, con el orden " $<$ ", dado por $0 < 1$. Es obvio que Z es perfectamente separable, pero no es fuertemente separable.

2. Sea $Z = R \times \{0, 1\}$ con el orden lexicográfico (esto es:$(a, b) < (c, d)$ si $a < c$, o bien $a = c$, $b = 0$, $d = 1$). Nótese que el conjunto $Q \times \{0, 1\}$ es denso y numerable en Z. Por tanto, Z es separable. Z no es perfectamente separable, pues si lo fuera, existiría D subconjunto numerable de Z tal que, para todo número irracional p, en el intervalo cerrado $[(p, 0), (p, 1)]$ de $(Z, <)$ habría algún elemento de D. Pero esto es imposible, pues el conjunto de los números irracionales no es numerable.

3. Sea $Z = R^2$, con el orden lexicográfico. Z es numerablemente acotado (pues, por ejemplo $Q \times Q$ acota numerablemente a Z). Sin embargo, Z no es separable. Si existiese D numerable denso, al no ser vacío el intervalo abierto $((p, 0), (p, 1))$ en $(Z, <)$, para ningún p irracional, en cada uno de tales intervalos debería haber algún elemento de D.

Pero, de nuevo, tal situación no es posible, al no ser numerable el conjunto de los números irracionales.

(v) Sea D conjunto numerable denso en $(Z, <)$. Sean a, b dos elementos de Z, con $a < b$. Como $(Z, <)$ no tiene huecos, el intervalo (a, b) es no vacío. Así, por densidad, habrá algún elemento de D en (a, b), y, a fortiori, en [a,b].

Así que Z es perfectamente separable.

Nota:

A partir de (v), podemos añadir una equivalencia más a las de la proposición 1, resultando $(Z, <)$ separable y sin huecos $\Leftrightarrow$ $(Z, <)$ es perfectamente separable y sin huecos.

Proposición 3

Sea $(Z, <)$ una cadena en la que se considera la topología del orden. Entonces, son equivalentes:

i) $(Z, <)$ es topológicamente conexo.

ii) $(Z, <)$ es orden–completo, y no tiene huecos.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que existiesen a, b en Z, con $a < b$, y (a, b) vacío. Entonces, $Z = (\leftarrow, b) \cup (a, \rightarrow)$ sería una partición de Z en abiertos no vacíos, luego Z no sería conexo. Concluimos así que Z no tiene huecos.

Sea ahora un subconjunto A de Z, acotado superiormente. Si no existe cota superior mínima de A, el conjunto $B = \{b$ en Z; b es cota superior de $A\}$ es abierto, ya que, dado b en B, al no ser b cota superior mínima de A, existe otra cota superior c (que a su vez estará en B), siendo $c < b$. Así $(c, \rightarrow)$ es un entorno de "b", íntegramente contenido en B, luego B es abierto. Por otra parte, si x es un elemento que no está en B, entonces x no es cota superior de A, luego existe "y" en A con $x < y$, y por tanto $(\leftarrow, y)$ es un entorno de x íntegramente contenido en el complementario de B. Así, este complementario es también abierto. Como, tanto B como su complementario resultan no vacíos, Z no sería conexo. Contradicción.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Si Z no fuese conexo, se podría descomponer como unión disjunta de dos abiertos A y B, no vacíos. En tal caso, tomemos un elemento a de A y un elemento b de B. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $a < b$.

Llamemos $C = [a, b] \cap A$. C es no vacío, pues contiene á "a", y está acotado superiormente por b. Luego, por la orden–completitud de Z, existe una cota superior mínima, "x" del conjunto C.

Si "x" estuviera en A, por ser A abierto, existe un entorno (t, y) de "x", contenido en A. Notemos que será $y \leqslant b$, pues b no está en A. Como Z no tiene huecos, en (x, y) debe haber algún elemento de A.

Así, podemos encontrar un a_1 en A con $x < a_1 < b$, luego x no sería la mínima cota superior de C. Con argumentos análogos, se deduce que x no puede estar tampoco en B. Contradicción. Por tanto, Z debe ser conexo.

Antes de dar el principal resultado sobre cadenas que son representables a través de una función de utilidad, necesitamos el siguiente lema previo:

Lema 4

Sea $(D, <)$ una cadena numerable. Entonces $(D, <)$ es representable por una función de utilidad $f : D \longrightarrow R$. Además, puede conseguirse también que $f(D)$ esté contenido en Q.

Demostración

El resultado es obvio si D es finito, así que supongamos D infinito numerable, $D = \{d_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$. En cada conjunto finito $\{d_1, \ldots, d_n\}$ definiremos una función f_n.

Así, comenzamos declarando $f_n(d_1) = 1$.

Tomamos a continuación d_2. Si $d_1 < d_2$, declaramos $f_n(d_2) = 2$, si es $d_2 < d_1$, declaramos $f_n(d_2) = -2$. Tomamos ahora d_3. Si es $d_1 < d_3$, y también $d_2 < d_3$, declaramos $f_n(d_3) = 3$. Si es $d_1 > d_3$, y también $d_2 > d_3$, declaramos $f_n(d_3) = -3$. En otro caso, declaramos

$$f_n(d_3) = (f_n(d_1) + f_n(d_2))/2.$$

En el caso general, dado d_k, si d_k es mayor según " $<$ " que todos los elementos de la lista $\{d_1, \ldots, d_{k-1}\}$, declaramos $f_n(d_k) = k$. Si es "menor" que todos los de dicha lista, declaramos $f_n(d_k) = -k$.

Si no se da ninguna de las situaciones anteriores, tomamos de la lista $\{d_1, \ldots, d_{k-1}\}$ el elemento d_p, "inmediatamente menor que d_k", y el elemento d_q "inmediatamente mayor que d_k", y declaramos

$$f_n(d_k) = (f_n(d_p) + f_n(d_q))/2.$$

A partir del teorema de construcción transfinita (véase Dugundji, (1966), p.40) se sigue la existencia de una función global $f : D \longrightarrow R$ que coincide con cada f_n sobre cada $\{d_1, \ldots, d_n\}$. Nótese además que, por construcción $f(D)$ está contenido en Q. Nótese, finalmente, también, que cada una de las f_n es una función de utilidad, por construcción, sobre $\{d_1, \ldots, d_n\}$. De aquí, f es una función de utilidad definida sobre D.

Notas:

1) El hecho de representar primero un subconjunto numerable, para después extender la representación a toda la cadena, es una idea que han utilizado, por ejemplo, Debreu, (1959) y Jaffray, (1975a).

2) Con un procedimiento similar puede probarse que toda cadena numerable es representable por una función de utilidad que tome imágenes en el conjunto de números racionales del intervalo $(0, 1)$.

3) Otra prueba, tal vez más directa, del lema anterior es:

   Sea $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}$.

   Si D tiene primer elemento, suponemos, sin pérdida de generalidad, que $d_1 = \inf D$. Construimos la siguiente función acotada f :

$$f(d_1) = 0, \quad f(d_n) = \sum_{\{k; d_k \leqslant d_n\}} (1/k^2)$$

   Si D no tiene primer elemento, definimos $f(d_1) = 0$, y

$$f(d_n) = \sum_{\{k; d_1 < d_k \leqslant d_n\}} (1/k^2) \quad (\text{si} \quad d_1 < d_n),$$

$$f(d_n) = \sum_{\{k; d_n \leqslant d_k < d_1\}} (1/k^2) \quad (\text{si} \quad d_n < d_1).$$

   Una consecuencia interesante del lema 4 es:

Corolario 5

El conjunto Q de los números racionales, con su orden natural heredado de la recta real R, contiene isotónicamente a cualquier orden total que pueda definirse sobre un conjunto numerable.

Podemos dar ya el principal resultado acerca de cadenas que son representables mediante funciones de utilidad.

Teorema 6

Sea $(Z, <)$ una cadena. Son equivalentes:

(i) Z es representable a través de una función de utilidad,

(ii) Z es representable a través de una función de utilidad continua si en $(Z, <)$ se considera la topología del orden,

(iii) Z es perfectamente separable.

Demostración

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sea $f : Z \longrightarrow R$ una función de utilidad.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(Z)$ está contenido en el intervalo $(0, 1)$. Diremos que $x \in Z$ es un "punto de salto" de f si corresponde a uno de los tres casos siguientes:

(i) x es el primer elemento de Z; para todo $y > x$, (x, y) no vacío, y

$$f(z) \neq \inf \{f(z);\ z > x\}$$

(ii) x es el último elemento de Z; para todo $y < x$, (x, y) no vacío, y

$$\sup \{f(z);\ z < x\} \neq f(z)$$

(iii) x no es ni el primer ni el último elemento de Z;

$$\sup \{f(z);\ z < x\} \neq \inf \{f(z);\ z > x\},$$

y ningún intervalo (x, y) ó (a, x) es vacío.

El conjunto de puntos de salto es a la fuerza numerable. Si x es un punto de salto, el salto correspondiente á x es

$$j(x) = \inf \{f(z);\ z > x\} - \sup \{f(z);\ z < x\}.$$

Consideremos ahora $g : (Z, <) \longrightarrow R$ definida mediante

$$g(z) = f(z) - \sum_{\{x<z;\ x \text{ es un punto de salto}\}} j(x)$$

Se tiene que g es también función de utilidad sobre Z. Además, g no tiene puntos de salto. Por tanto, g es continua.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sea $u: (Z, <) \longrightarrow R$ función de utilidad, (de hecho, para probar (ii)$\Rightarrow$(iii) no hace falta la continuidad de u). $u(Z)$ es un subespacio métrico de R. R es separable y métrico, y la propiedad "ser separable" es hereditaria en espacios métricos, así que $u(Z)$ es separable. Sea D denso y numerable en $u(Z)$.

Consideremos además los conjuntos

$$A(Z) = \{a \text{ en } Z; \text{ existe } b \text{ en} Z \text{ con } (a,b) \text{ vacío } \},$$

$$\text{y } B(Z) = \{b \text{ en } Z; \text{ existe } a \text{ en } Z \text{ con } (a,b) \text{ vacío } \}.$$

Notemos que tanto $A(Z)$ como $B(Z)$ son conjuntos numerables, pues, por ejemplo, para cada a de $A(Z)$, tomamos un intervalo (a, b) vacío, y elegimos un racional (distinto en cada caso) en el intervalo$(u(a), u(b))$ de R.

Sea

$$D^* = D \cup u(A(Z)) \cup u(B(Z)) \cup$$
$$\cup \{ \text{ primero y último elementos de } Z, \text{ si existen} \}.$$

Consideremos ahora a, b en Z, con $a < b$. Si (a, b) no es vacío, el intervalo $(u(a), u(b))$ en $u(Z)$ tampoco es vacío, luego debe contener algún elemento de D. Si (a, b) es vacío, entonces, por ejemplo, a está en $A(Z)$. Se concluye así que $u^{-1}(D^*)$ corta a todo intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$, de $(Z, <)$. Luego $(Z, <)$ es perfectamente separable.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Supuesto Z perfectamente separable, sea D conjunto numerable tal que corta a todo intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$, de $(Z, <)$.

Como en la Proposición 2 (ii), añadimos á D el conjunto de elementos Z antecesores para D, el conjunto de elementos de Z sucesores para D, y el conjunto formado por el primer y último elemento de Z (si existen). Obtenemos así un nuevo conjunto D^*, también numerable.

Consideremos una función de utilidad $u: D^* \longrightarrow Q \cap (0, 1)$, construida como en el lema 4. Veamos como extender á Z una tal función de utilidad "u":

Dado x que no esté en D^*, consideramos

$$a(x) = \text{supremo } \{u(d); \ d \text{ en } D^*, \ d < x, \}$$

$$\text{y } b(x) = \text{ínfimo } \{u(d); \ d \text{ en } D^*, \ d > x\}.$$

Tales supremo e ínfimo existen, son números reales en $(0, 1)$, y además es $a(x) \leqslant b(x)$. Para cada x elegimos un número real r con $a(x) \leqslant r \leqslant b(x)$, y extendemos "$u$" á "$x$" mediante $u(x) = r$. Nótese además que $u(x)$ no coincide con $u(d)$ para ningún elemento de D^*, pues si, por ejemplo, es $x < d$, como x no es antecesor de D, existe algún elemento de D en (x, d), y así $b(x) < u(d)$.

Por último, si $x < y$, y dado que en $[x, y]$ debe haber algún elemento de D, se concluye fácilmente que será $u(x) < u(y)$. Por tanto, u es una función de utilidad que representa á $(Z, <)$.

Notas:

1) Otras demostraciones anteriores, por diferentes métodos, de la equivalencia "clásica" entre (i) y (iii) se deben a Milgram, (1939), Fishburn, (1970), Krantz et.al., (1971) y Jaffray, (1975a).
2) Otros procedimientos similares de demostración, empleando una "utilidad inferior $a(x)$" y una "utilidad superior $b(x)$" aparecen en Chateauneuf, (1987).

Corolario 7

(i) Si $(Z, <)$ es fuertemente separable, entonces es representable por una función de utilidad.

(ii) El orden lexicográfico del plano no es representable a través de una función de utilidad ya que, según la Proposición 2, resulta una cadena no perfectamente separable.

(iii) Si $(Z, <)$ no tiene huecos, y es separable (en particular, si es conexo y separable), es representable a través de una función de utilidad.

Acerca de propiedades relativas a la conexión, damos ahora un nuevo resultado sobre representabilidad:

Teorema 8

(i) Sea $(Z, <)$ una cadena numerablemente acotada y conexa por caminos. Entonces, $(Z, <)$ es separable.

(ii) No es cierto lo anterior si sustituimos "conexo por caminos" por "topológicamente conexo".

Demostración

(i) Elegimos un conjunto D que acota numerablemente á Z. No hay pérdida de generalidad en suponer $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots\}$ (numerable).

Elegimos, para cada $k, l \in N$, y supuesto además $d_k < d_l$, un camino entre d_k y d_l, esto es, una función continua $f_{kl} : [0, 1] \longrightarrow Z$, con

$$f_{kl}(0) = d_k; \; f_{kl}(1) = d_l.$$

Tenemos así un conjunto numerable de caminos.

Para cada función f_{kl} consideramos

$$A_{kl} = \{f_{kl}(q);\ q \in Q \cap [0,1]\}.$$

Cada conjunto A_{kl} es, de nuevo, numerable, y así, el conjunto $D^* = \cup A_{kl}$ $(k, l \in N)$ es numerable.

D^* es denso en $(Z, <)$, ya que dado un abierto no vacío (a, b) en $(Z, <)$, como D acota numerablemente á Z, podemos encontrar dos elementos d_k y d_l en D con $d_k \leqslant a < b \leqslant d_l$.

El intervalo (a, b) no puede ser vacío, pues en otro caso, por continuidad de f_{kl}, $[0, 1]$ no sería conexo en R, al quedar descompuesto en los abiertos relativos, disjuntos,

$$A = f_{kl}^{-1}(\leftarrow, b), \text{ y } B = f_{kl}^{-1}(a, \rightarrow).$$

Así, de nuevo por continuidad de f_{kl}, $f_{kl}^{-1}(a, b)$ es un abierto relativo en $[0, 1]$, luego debe contener algún número racional q. Por último, $f_{kl}(q)$ está en $D^* \cap (a, b)$.

(ii) Sea el plano R^2 con el orden lexicográfico. "Completamos" R^2 de la siguiente manera: a cada recta vertical $\{(k, y);\ k$ fijo, y $\in R\}$, le añadimos dos puntos "extra" que denotaremos $(k, -\infty)$ y $(k, +\infty)$. Además, seguimos "manteniendo el orden lexicográfico", entendiendo que $-\infty < a < +\infty$, para todo número real "a", y así $(x, r) < (y, s)$ si $x < y$ ó $x = y,\ r < s$.

Denotando $(Z, <)$ al plano "completado", con el orden "lexicográfico ampliado" que así resulta, notemos que $(Z, <)$ es orden–completo, y sin huecos, luego por la Proposición 3 es topológicamente conexo.

Sin embargo $(Z, <)$ no es representable por una función de utilidad, pues si lo fuese, por restricción á R^2 el plano con el orden lexicográfico también lo sería.

Nota:

En (ii) se ha usado la idea de meter una cadena dentro de otra cadena que tenga mejores propiedades (por ejemplo, una orden–completa).

La idea (obtención de propiedades de una cadena estudiando las de una cadena "mejor" que la contenga) puede consultarse en el trabajo de Cohen y Girard, (1971). Estos autores estudiaron propiedades de un espacio preordenado mediante la inclusión del mismo en otro sin huecos.

Terminamos con un cuadro que muestra las principales interdependencias entre los conceptos que han ido apareciendo:

Numerablemente acotado, y conexo por caminos	$\Rightarrow$	Topológicamente conexo	$\Rightarrow$	Dedekind completo, y sin huecos		
$\Downarrow$						
Fuertemente separable	$\Rightarrow$	Perf. Separable	$\Rightarrow$	Separable	$\Rightarrow$	Núm. Acotado
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$				
Perf. Separable y sin huecos		Representable por una función de utilidad				
$\Updownarrow$		$\Updownarrow$				
Separable, y sin huecos		Representable por una F. de utilidad continua				

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

[1] CANDEAL, J. C. E INDURAIN, E., (1989): "Utility functions on Chains". Forthcoming. (Una versión preliminar apareció como prepublicación, con el título "Sobre representabilidad de cadenas mediante funciones de utilidad" en *Pub. Sem. Mat. García de Galdeano,* de Zaragoza. Serie II, Sección 1, n^o 13, 1989).

[2] CANDEAL, J. C. E INDURAIN, E., (1990a): "Sobre preórdenes y funciones de utilidad". *Cuadernos Aragoneses de Economía* n^o 15, 35–50.

[3] CANDEAL, J. C. E INDURAIN, E., (1990b): "Sobre caracterizaciones topológicas de la representabilidad de cadenas mediante funciones de utilidad". *Revista Española de Economía* 7 (2), 235–244.

[4] CHATEAUNEUF, A., (1987): "Continuous representation of a preference relation on a connected topological space". *Journal of Mathematical Economics* 16, pp.139–146.

[5] COHEN, M. AND GIRARD, B., (1971): "Préordres et topologies sur un ensemble. Fonction d'utilité". *Bulletin de Maths. Economiques,* París I et París VI, March, 1971, pp.7–34.

[6] DEBREU, G., (1954): "Representation of a preference ordering by a numerical function", in Decision Processes, *ed. by R.M. Thrall et al. John Wiley.* New York.

[7] DEBREU, G., (1959): "Theory of value: An axiomatic analysis of Economic Equilibrium". *John Wiley.* New York. (Hay traducción española (1973): "Teoría del valor". *Bosch.* Barcelona.

[8] DEBREU, G., (1964): "Continuous properties of paretian utility". *International Economic Review.* 5, pp.285–293.

[9] DUGUNDJI, J., (1966): "Topology". *Allyn & Bacon Publishing Company.* Boston.

[10] EILENBERG, S., (1941): "Ordered topological spaces". *Americal Journal of Mathematics,* 63, pp.39–45.

[11] FISHBURN, P. C., (1970): "Utility theory for decision making". *John Wiley.* New York.

[12] FISHBURN, P. C., (1974): "Lexicographic order, utiities and decision rules: a survey". *Management Science,* 20 n^o 11, pp. 1442–1471.

[13] FISHBURN, P. C., (1983): "Utility functions on ordered convex sets". *Journal of Mathematical Economics* 12, 221–232.

[14] FLEISCHER, I., (1961): "Numerical representation of utility". *SIAM J. Industr. Appl. Math.* 9, pp.48–50.

[15] HERDEN, G., (1989a): "On the existence of utility functions". *Mathematical Social Sciences* 17, pp.297–313.

[16] HERDEN, G., (1989b): "On the existence of utility functions II". *Mathematical Social Sciences* 18, pp.107–117.

[17] JAFFRAY, J. Y., (1975a): "Existence of a continuous utility function: An elementary proof". *Econometrica* 43, n^o 5–6, pp.981–983.

[18] JAFFRAY, J. Y., (1975b): "Semicontinuous extension of a partial order". *Journal of Mathematical Economics* 2, pp.395–406.

[19] JAMESON, G. J. O., (1974): "Topology and normed spaces". *Chapman & Hall.* London.

[20] KRANTZ, LUCE, SUPPES, AND TVERSKY, (1971): "Foundations of measurement, vol.I". *Academic Press.* New York.

[21] MEHTA, G., (1985): "Continuous utility functions". *Economics Letters,* 18, pp.113–115.

[22] MEHTA, G., (1986a): "Existence of an order–preserving function on normally preordered spaces". *Bull. Austr. Math. Soc.* 34, pp. 141–147.

[23] MEHTA, G., (1986b): "On a theorem of Fleischer". *J. Austr. Math. Soc. (Series A)* 40, pp.261–266.

[24] MILGRAM, A. N., (1939): "Partially ordered sets, separating systems and inductivenes-s", in: *Reports of a mathematical colloqium, 2nd series,* n^{o} 1, University of Notre Dame, Notre Dame, IN.

[25] MONTEIRO, P. K., (1987): "Some results on the existence of utility functions on path connected spaces". *Journal of Mathematical Economics* 16, pp.147–156.

[26] NACHBIN, L., (1950): "Topologia e ordem". *University of Chicago Press.* Chicago. (Hay traducción al inglés, con el título "Topology and order", editada por *Van Nostrand,* Princeton NJ, 1965).

[27] PELEG, B., (1970): "Utility functions for partially ordered topological spaces". *Econometrica* 38, pp.93–96.

[28] TANGYAN, A. S., (1988): "Representation of a weak ordering by a numerical function". *Sov. Math. Doklady* 37, n^{o} 1, pp.222–225.

[29] WAKKER, P., (1988): "Continuity of preference relations for separable topologies". *International Economic Review* 29, n^{o} 1, pp.105–110.

J. C. Candeal
Universidad de Zaragoza
Departamento de Análisis Económico
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
C/ Doctor Cerrada n° 1 y 3. 50005, Zaragoza

E. Induráin
Universidad Pública de Navarra
Departamento de Matemáticas e Informática
C/ El Sadar s/n 31006, Pamplona