Sobre algunas propiedades de espacios de Banach

POR FERNANDO BOMBAL[1]

Conferencia expuesta en la Academia

el 7 de Febrero de 1990.

Académico correspondiente

INTRODUCCION Y NOTACIONES

Este trabajo trata de exponer de modo sistemático dos de los principales métodos de introducción de nuevas propiedades en un espacio de Banach, E. El primero, que podemos llamar *método homológico,* se basa en comparar el comportamiento de distintas clases de operadores sobre E. El segundo, o *método conjuntista,* consiste en establecer algún tipo de relación no trivial entre diferentes clases de subconjuntos de E. Desde luego, ambos métodos están íntimamente relacionados, a menudo por medio de un interesante teorema. A título de ejemplo, consideremos las siguientes situaciones:

- La propiedad E tiene *dimensión finita*, se puede caracterizar por el hecho de que en E coinciden los subconjuntos acotados con los relativamente compactos (Teorema de Riesz), y también porque todo operador lineal continuo sobre E, es compacto.

- La propiedad E es *reflexivo*, se puede caracterizar por la coincidencia sobre E de los conjuntos débilmente relativamente compactos con los acotados, y también por el hecho de que todo operador lineal continuo sobre E es débilmente compacto.

A lo largo del trabajo, veremos que la mayor parte de las propiedades interesantes de un espacio de Banach, admiten una formulación análoga a la que hemos utilizado en los dos ejemplos triviales anteriores. Gran parte de los resultados que expondremos son conocidos, aunque quizá no lo sea tanto su organización y presentación. Hemos preferido incluir demostraciones de

[1]Trabajo realizado bajo los auspicios de la Ayuda DGICYT PB88–0141. AMS–MOS 1980 Subject Classification 46B20, 46B25, 47D30.

los resultados más importantes, incluso las que no son originales, tanto para ilustrar las técnicas más destacadas en el área, como por comodidad del lector.

En cuanto a notaciones, hemos procurado utilizar las habituales en la teoría de espacios de Banach, como las que aparecen en [LT], [DS] o [D]. En cualquier caso, E y F denotarán espacios de Banach reales, $B(E)$ la bola unidad cerrada de E y $\mathcal{L}(E,F)$ el espacio de todos los operadores, (=aplicaciones lineales continuas), de E en F, aunque, como es habitual, denotaremos por E^* el dual topológico $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ de E. Si G es un subconjunto de E^*, designaremos por $\sigma(E,G)$ la topología inicial en E para los elementos de G. En general, supondremos siempre identificado E a un subespacio del bidual E^{**}, por medio de la inyección canónica $Q : E \longrightarrow E^{**}$. Designaremos por $[A]$, $\mathrm{co}(A)$ y $\mathrm{coe}(A)$, respectivamente, la envoltura lineal, convexa y absolutamente convexa de A. Recordemos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en E se llama *débilmente incondicionalmente de Cauchy*, (d.i.c. por abreviar), si para todo elemento $x^* \in E^*$, la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)|$$

es convergente, (o equivalente, si el conjunto

$$\left\{\sum_{n\in\sigma} x_n : \sigma \subseteq \mathbb{N}, \text{ finito}\right\}$$

es acotado en E. Véase [D], Th. V. 6). El símbolo ∎ indicará el final de una demostración. Finalmente, utilizaremos con frecuencia el llamado *teorema de dicotomía de Rosenthal*. (Véase, por ejemplo, [D], Ch. XI): *Toda sucesión acotada en un espacio de Banach, contiene una subsucesión débilmente de Cauchy, o bien una subsucesión equivalente a la base canónica de l_1.*

I. El método homológico

Este método, iniciado por Grothendieck con su peculiar visión funtorial de las matemáticas, se basa en el siguiente esquema general: Sean Θ, Φ dos clases de operadores entre espacios de Banach, (de modo que $\Theta(E,F)$ designe un subconjunto de $\mathcal{L}(E,F)$, para cada par E,F de espacios de Banach), y $\mathcal{C}$ una clase de espacios de Banach. Diremos que E tiene la propiedad $P(\Theta,\Phi;\mathcal{C})$, y escribiremos $E \in P(\Theta,\Phi;\mathcal{C})$, si

$$(*). \qquad \Theta(E,F) \subseteq \Phi(E,F), \text{ para todo } F \in \mathcal{C}.$$

(Cuando $\mathcal{C}$ sea la clase de todos los espacios de Banach, suprimiremos su mención). Naturalmente, la propiedad tendrá interés si la inclusión (*) no se verifica trivialmente para todo E.

Habitualmente, las clases Θ y Φ tienen alguna estructura y, más concretamente, son lo que se llama un *ideal de operadores*, es decir, verifican las propiedades:

(I_1) $Id_K \in \Theta(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

(I_2) Si $T, S \in \Theta(E, F)$, entonces $T + S \in \Theta(E, F)$.

(I_3) Si $T \in \mathcal{L}(E_0, E)$, $S \in \Theta(E, F)$ y $R \in \mathcal{L}(F, F_0)$, entonces

$$R \circ S \circ T \in \Theta(E_0, F_0).$$

Se deduce entonces que $\Theta(E, F)$ es siempre un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E, F)$ que contiene a los operadores de rango finito.

Un ideal de operadores se llama *suprayectivo*, si para toda suprayección $P \in \mathcal{L}(E, E_0)$ y todo $S \in \mathcal{L}(E_0, F)$, de $S \circ P \in \Theta(E, F)$ resulta que $S \in \Theta(E_0, F)$.

Con estas notaciones, resulta:

I.1 Proposición.

Sean Θ y Φ dos ideales de operadores y $\mathcal{C}$ una clase de espacios de Banach. Se tiene:

a) *La propiedad $P(\Theta, \Phi; \mathcal{C})$ es invariante por isomorfismos topológicos y se conserva por el paso a subespacios complementados y por productos finitos.*

b) *Si Φ es suprayectivo, $P(\Theta, \Phi, \mathcal{C})$ es estable por cocientes y subespacios cerrados.*

Demostración:

a) Veamos por ejemplo que $P(\Theta, \Phi; \mathcal{C})$ es estable por productos finitos: Sean

$$E_1, \ldots, E_n \in P(\Theta, \Phi; \mathcal{C}), \quad E = E_1 \times \ldots \times E_n,$$

I_j la inyección canónica de E_j en E y $\pi_j : E \longrightarrow E_j$ la proyección canónica.

Entonces

$$I_E = \sum_{j=1}^{n} I_j \circ \pi_j.$$

Si $F \in \mathcal{C}$ y $T \in \Theta(E, F)$, entonces

$$T = \sum_{j=1}^{n} T \circ I_j \circ \pi_j.$$

Como

$$T \circ I_j \in \Theta(E_j, F) \subseteq \Phi(E_j, F),$$

resulta $T \in \Phi(E, F)$, y $E \in P(\Theta, \Phi; \mathscr{C})$.

b) Sea $E \in P(\Theta, \Phi; \mathscr{C})$, M un s.v. cerrado de $E, F \in \mathscr{C}$ y $T \in \Theta(E/M, F)$. Si $\pi : E \longrightarrow E/M$ es la proyección canónica, resulta

$$T \circ \pi \in \Theta(E, F) \subseteq \Phi(E, F).$$

Por ser Φ suprayectivo, se deduce entonces que $T \in \Phi(E/M, F)$. Así pues, $E/M \in P(\Theta, \Phi; \mathscr{C})$.∎

A fin de dar ejemplos concretos del método homológico, vamos a recordar algunas definiciones y fijar algunas notaciones: Un operador $T \in \mathscr{L}(E, F)$ diremos que es

- *(débilmente) compacto* si $T(B(E))$ es (débilmente) relativamente compacto.
- *Dunford–Pettis* (o completamente continuo) si T transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones convergentes en norma.
- *Dieudonné* si T transforma sucesiones débilmente de Cauchy en sucesiones débilmente convergentes.
- *Incondicionalmente convergente* si T transforma series d.i.c. en series convergentes en norma.

Denotaremos por

$$\mathscr{K}(E,F),\ \mathscr{W}(E,F),\ \mathscr{DP}(E,F),\ \mathscr{D}(E,F) \text{ y } \mathscr{I}(E,F)$$

las clases de los operadores compactos, débilmente compactos, de Dunford–Pettis, de Dieudonné e incondicionalmente convergentes de E en F, respectivamente. Se tiene entonces la siguiente relación:

$$(*) \qquad \mathscr{K}(E,F) \begin{smallmatrix} \subset \mathscr{W}(E,F) \supset \\ \subset \mathscr{DP}(E,F) \subset \end{smallmatrix} \mathscr{D}(E,F) \subset \mathscr{I}(E,F) \subset \mathscr{L}(E,F).$$

Todas las inclusiones resultan inmediatamente de la definición, salvo quizá la $\mathscr{D}(E,F) \subset \mathscr{I}(E,F)$ que, teniendo en cuenta que toda subserie de una serie d.i.c. verifica el criterio de Cauchy para la topología débil, es consecuencia inmediata del teorema de Orlicz–Pettis ([D], Ch. IV).

Por otro lado, las inclusiones anteriores son, en general, estrictas, como muestran los siguientes ejemplos:

- Si $E = F = l_2$, la identidad en E es débilmente compacto, pero no es Dunford–Pettis ni, por tanto, compacto.
- Si $E = F = l_1$, la identidad en E es Dunford–Pettis (lema de Schur!), pero no débilmente compacto ni, por tanto, compacto.
- Si $E = F = L_1([0,1])$, la identidad en E es un operador de Dieudonné (por ser E débilmente secuencialmente completo), que no es débilmente compacto (pues E no es reflexivo) ni de Dunford–Pettis, (por ejemplo, la sucesión $f_n(t) = \operatorname{sen} 2\pi nt$ converge débilmente a 0 en E, pero no en norma).
- Si $E = F = c_0$, la identidad en E es un operador que no es incondicionalmente convergente (la serie $\sum e_n$ es d.i.c., pero no converge en norma.)

Para probar que, en general, $\mathfrak{D}(E,F) \neq \mathcal{I}(E,F)$, nos será útil el siguiente resultado, que es consecuencia inmediata de [D], Ch. V, Cor. 7:

I.2 Proposición.

Sea $\sum x_n$ una serie d.i.c. en E tal que existe $\varepsilon > 0$ de modo que $\|x_n\| \geqslant \varepsilon$ para todo n. Entonces existe una subsucesión (y_k) de (x_n) que es equivalente a la base canónica de c_0.

I.3 Corolario (Pelczynski, [P2], lemma 1.3.1).

Si $T \notin \mathcal{I}(E,F)$, existe un subespacio vectorial M de E, isomorfo a c_0, tal que la restricción $T_{|M}$ es un isomorfismo topológico.

Demostración.

Sea $\sum z_n$ una serie d.i.c. en E tal que $\sum T(z_n)$ no converge en norma. Entonces existe un $\varepsilon > 0$ y dos subsucesiones estrictamente crecientes de enteros, (p_j), (q_j), con $p_j < q_j$, de modo que

$$\left\| \sum_{n=p_j}^{q_j} T(z_n) \right\| \geqslant \varepsilon, \text{ para todo } j.$$

Si ponemos $x_j = \sum_{n=p_j}^{q_j} z_n$, claramente $\sum x_j$ es d.i.c. y $\|T(x_j)\| \geqslant \varepsilon$ para todo j, luego también

$$\|x_j\| \geqslant \varepsilon / \|T\| \text{ para todo } j.$$

Aplicando dos veces la proposición I.2, obtenemos una subsucesión (y_k) de (x_j) tal que tanto (y_k) como $(T(y_k))$ son equivalentes a la base canónica de c_0. Claramente, la restricción de T a $M = \overline{[y_k : k \in \mathbb{N}]}$ es un isomorfismo topológico.∎

I.4 Corolario.

Si E o F no contienen copias de c_0, $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{I}(E,F)$.

I.5 Corolario (Bessaga–Pelczynski).

E no contiene un subespacio isomorfo a c_0 si y sólo si toda serie d.i.c. en E, converge en norma.

James construyó un espacio de Banach separable J que es isométrico a J^{**}, pero no reflexivo (véase, p. ej., [LT], ex. I. 1. d. 2). En particular, J no puede contener copias de c_0, luego $I_J \in \mathcal{I}(J,J)$ por el corolario I.4. Como J no es reflexivo, no es débilmente secuencialmente completo, luego $I_J \notin \mathcal{D}(J,J)$.

Una vez comprobado que las inclusiones en (*) son, en general, estrictas, podemos aplicar el esquema general indicado al principio de la sección para definir algunas propiedades de espacio de Banach. Antes de ello, a fin de aplicar los resultados generales de la proposición I.1, nos será útil conocer un poco más la estructura de las clases de operadores introducidas hasta ahora. Para ello, necesitaremos el siguiente lema, que también nos será de utilidad más adelante.

I.6 Lema (Grothendieck).

Sea K un subconjunto de un espacio de Banach E. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto (débilmente) compacto K_ε de E tal que $K \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon B(E)$, entonces K es (débilmente) relativamente compacto.

Demostración.

Véase, por ejemplo, [D], Ch. XIII, Lemma 2.∎

I.7 Teorema.

a) *Las clases $\mathcal{K}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{DP}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{I}$ son ideales de operadores, cerrados en la norma usual de $\mathcal{L}$.*

b) *$\mathcal{K}$, y $\mathcal{W}$ son suprayectivos, mientras que $\mathcal{DP}$, $\mathcal{D}$ y $\mathcal{I}$ no lo son.*

Demostración.

a) Que las clases consideradas son ideales de operadores, resulta inmediatamente de las definiciones. Para probar que son cerrados, consideremos, por ejemplo, el caso de $\mathcal{I}$: Sea (T_n) una sucesión en $\mathcal{I}(E,F)$ que converge en $\mathcal{L}(E,F)$ a un operador T. Para demostrar que $T \in \mathcal{I}(E,F)$, bastará probar que siempre que $\sum x_n$ sea una serie d.i.c. en E, $\|T(x_n)\|$ converge a 0. Como $(T(x_n))$ converge débilmente a 0, sólo tenemos que probar que

$K = \{T(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en norma. Para ello, dado $\varepsilon > 0$ tomemos un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|T - T_k\| \leqslant \varepsilon/M$, siendo M una cota para $\|x_n\|$. Entonces $K_\varepsilon = \{T_k(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto en norma, y

$$K \subseteq K_\varepsilon + \varepsilon B(F),$$

por construcción. El lema I.6 termina la demostración.

Los otros casos son análogos. Por ejemplo, si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ es límite de operadores de $\mathcal{DP}$ (resp., $\mathcal{D}$) y (x_n) es una sucesión débilmente de Cauchy en E, basta probar, razonando como antes, que $K = \{T(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto (resp., débilmente relativamente compacto).

b) Que $\mathcal{K}$ y $\mathcal{W}$ son suprayectivos, resulta de que toda suprayección $P \in \mathcal{L}(E, E_0)$ es abierta. Por tanto, si $S \in \mathcal{L}(E_0, F)$ es tal que $S \circ P \in \mathcal{K}(E,F)$ (resp., $\mathcal{W}(E,F)$), S transforma el abierto $P(B(E))$ en un conjunto (débilmente) relativamente compacto, luego S es (débilmente) compacto.

Por otro lado c_0, como cualquier espacio de Banach separable, es un cociente de l_1 (véase, p.e., [D], p. 73), y por tanto existe una suprayección P de l_1 sobre c_0. Si tomamos como S la identidad en c_0, resulta que $S \circ P$ pertenece a $\mathcal{DP}$ (pues en l_1 coinciden las sucesiones débilmente convergentes con las convergentes en norma), y por tanto a $\mathcal{D}$ y a $\mathcal{I}$. Sin embargo, S no pertenece a ninguna de estas clases.∎

Pasemos ahora a utilizar el esquema general que hemos establecido al comienzo de esta sección. Por ejemplo, si tomamos $\Theta = \mathcal{L}$, las propiedades $P(\Theta, \Phi)$ que resultan al considerar como Φ cada una de las clases consideradas anteriormente (que se deducen del hecho de que la identidad pertenezca a Φ), son las siguientes:

- $E \in P(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ si y sólo si E tiene *dimensión finita.*

- $E \in P(\mathcal{L}, \mathcal{W})$ si y sólo si E es *reflexivo.*

- $E \in P(\mathcal{L}, \mathcal{DP})$ si y sólo si en E coinciden las sucesiones débilmente convergentes y las convergentes en norma, es decir, E verifica el conocido lema de Schur para l_1. Se dice que E es un *espacio de Schur.*

- $E \in P(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ si y sólo si toda sucesión débil de Cauchy en E es débilmente convergente, es decir, E es *débilmente secuencialmente completo.*

- $E \in P(\mathcal{L}, \mathcal{I})$ si y sólo si E *no contiene copias de* c_0 (Corolario I.5).

El resto de la sección estará dedicada a la discusión y algunos ejemplos de las propiedades que se obtienen al considerar las demás elecciones no triviales para Θ y Φ. Comencemos con la propiedad quizá más exhaustivamente estudiada:

I.8 Definición (Grothendieck [G]).

Se dice que E tiene la *propiedad de Dunford–Pettis* (PDP para abreviar) si $E \in P(\mathcal{W}, \mathcal{DP})$.

Algunas de las formulaciones equivalentes de la propiedad de Dunford–Pettis se recogen en el siguiente teorema:

I.9 Teorema.

Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:

a) *E tiene la propiedad de Dunford–Pettis.*

b) *Todo operador débilmente compacto sobre E, transforma conjuntos relativamente compactos en conjuntos compactos en norma.*

c) $\mathcal{W}(E, c_0) \subseteq \mathcal{DP}(E, c_0)$.

d) *Si (x_n) converge débilmente a 0 en E y (x_n^*) converge débilmente a 0 en E^*, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x_n) = 0$.*

e) *Toda sucesión débilmente convergente en E, converge uniformemente sobre todo conjunto débilmente relativamente compacto de E^*.*

Demostración.

La equivalencia de (a) y (b) resulta de que, como se comprueba fácilmente, un operador es de Dunford–Pettis si y sólo si transforma conjuntos débilmente compactos en conjuntos compactos en norma.

$(a) \Rightarrow (c)$ es trivial. Para ver que $(c) \Rightarrow (d)$, sean (x_n) y (x_n^*) sucesiones débilmente nulas en E y E^*, respectivamente. La fórmula $T(x) = (x_n^*(x))$ define un operador lineal de E en c_0, débilmente compacto, pues

$$T^*(B(c_0^*)) \subseteq \overline{\text{coe}}\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\},$$

luego, por hipótesis,

$$\lim_{x\to\infty} |x^*(x_n)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\| = 0.$$

$(d) \Rightarrow (e)$: Sea (x_n) débilmente nula y $K \subseteq E^*$ débilmente relativamente compacto. Si (x_n) no converge a 0 uniformemente sobre K, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_n^*) \subseteq K$ tales que $|x_n^*(x_n)| \geqslant \varepsilon$, para todo n. Por la hipótesis sobre K, podemos suponer que (x_n^*) converge débilmente a un $x^* \in E^*$. Si ponemos $y_n^* = x_n^* - x^*$, la sucesión (y_n^*) es débilmente nula, y

$$|y_n^*(x_n^*)| \geqslant |x_n^*(x_n)| - |x^*(x_n)| \geqslant \varepsilon - |x^*(x_n)| \geqslant \varepsilon/2.$$

para n suficientemente grande, lo que contradice (d).

Finalmente, probemos que $(e) \Rightarrow (a)$: Sea $T \in \mathcal{W}(E,F)$ y (x_n) débilmente nula en E. Entonces

$$\begin{aligned} \|T(x_n)\| &= \sup\{|y^*(T(x_n))| : y^* \in B(F^*)\} = \\ &= \sup\{|z^*(x_n)| : z^* \in T^*(B(F^*))\}, \end{aligned}$$

que converge a 0, pues $T^*(B(F^*))$ es débilmente compacto por el teorema de Gantmacher ([DS], VI. 4. 8).∎

I.10 Proposición.

a) *La PDP se conserva por isomorfismos topológicos, productos finitos y paso a subespacios complementados.*

b) *Un espacio reflexivo con la PDP es de dimensión finita.*

c) *Si E^* tiene la PDP, entonces E también la tiene.*

Demostración.

(a) resulta de la proposición I.1. Si E es reflexivo, la identidad $I_E \in \mathcal{W}(E,E)$ y $B(E)$ es débilmente compacto. Por tanto, si E tiene la PDP, por I.9(b), $I_E(B(E)) = B(E)$ es compacto en norma, luego E es de dimensión finita. (c) resulta inmediatamente de I.9(d).∎

I.11 Observaciones y ejemplos.

a) Todo espacio de Schur tiene la PDP.

b) De I.10(c), resulta entonces que c_0 tiene la PDP, pues $c_0^* \approx l_1$ es un espacio de Schur.

c) En general, Grothendieck probó en [G] que todo espacio de tipo $C(K)$ ó $L_1(\mu)$ tiene la PDP.

d) Stegall ha construído en [S] un espacio E de Schur tal que E^* no tiene la PDP, lo que prueba que el recíproco de I.10(c) no es cierto.

e) La PDP no se hereda, en general por cocientes: l_2 no tiene la PDP por I.10(b) y, como todo espacio de Banach separable, es isomorfo a un cociente de l_1.

Las dos siguientes propiedades fueron también introducidas por Grothendieck.

I.12 Definición (Grothendieck [G]).

Sea E un espacio de Banach.

a) Se dice que E tiene la *Propiedad recíproca de Dunford–Pettis* (PRDP para abreviar) si $E \in P(\mathcal{DP}, \mathcal{W})$.

b) Se dice que E tiene la *Propiedad de Dieudonné* (PD para abreviar) si $E \in P(\mathcal{D}, \mathcal{W})$.

I.13 Proposición.

a) *Tanto la PRDP como la PD son estables por isomorfismos topológicos, productos finitos, paso a subespacios complementados y a cocientes en general.*

b) *Si E no contiene copias de l_1, posee la PRDP y la PD.*

c) *Si E tiene la PD y F es débilmente secuencialmente completo, todo operador de E en F es débilmente compacto.*

Demostración.

(a) resulta de I.1, teniendo en cuenta que $\mathcal{W}$ es suprayectivo. Del teorema de dicotomía de Rosenthal (véase la introducción) resulta que si E no contiene copias de l_1, toda sucesión acotada en E posee un subsucesión débilmente de Cauchy. Por tanto, todo operador de Dieudonné sobre E es débilmente compacto, lo que prueba (b). Finalmente, si F es débilmente secuencialmente compacto, es obvio que $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{D}(E,F)$, de donde resulta (c).∎

I.14 Observaciones y ejemplos.

a) De la definición resulta claramente que la PD implica la PRDP. Sin embargo, no se conocen ejemplos de espacios de Banach que muestren que ambas propiedades son distintas.

b) De I.13(c) resulta que un espacio débilmente secuencialmente completo tiene la propiedad de Dieudonné si y sólo si es reflexivo. En particular, $L_1([0,1])$ no posee la PD. Es fácil ver que tampoco posee la PRDP (una proyección sobre un subespacio isomorfo a l_1 es un operador de Dunford–Pettis, no débilmente compacto.)

c) Grothendieck probó en [G] que todo espacio de tipo $C(K)$ tiene la PD. En particular, de I.13(c) resulta entonces que todo operador T de un $C(K)$ en un espacio débilmente secuencialmente completo, es débilmente compacto. Este resultado de Grothendieck, fue extendido por Pelczynski, como veremos más adelante.

Las dos propiedades que vamos a tratar a continuación, creemos que fueron introducidas por primera vez en [B1]:

I.15 Definición.

Sea E un espacio de Banach:

a) Se dice que E tiene la *Propiedad* S_1 (PS_1 para abreviar) si $E \in P(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}\mathfrak{P})$.

b) Se dice que E tiene la *Propiedad* S_2 (PS_2 para abreviar) si $E \in I(\mathfrak{I}, \mathfrak{D}\mathfrak{P})$.

I.16 Proposición (Bombal [B$_1$]).

a) *Tanto la PS_1 como la PS_2 son estables por isomorfismos topológicos, productos finitos y paso a subespacios complementados.*

b) *Para un espacio de Banach E son equivalentes:*

(i) E es de Schur.

(ii) E verifica PS_2 y no contiene copias de c_0.

(iii) E verifica PS_1 y es débilmente secuencialmente completo.

Demostración.

(a) resulta de I.1, y (b) de que las tres afirmaciones son equivalentes a que todo operador sobre E sea de Dunford–Pettis.∎

I.17 Observaciones y ejemplos.

a) Obviamente, $PS_2 \Rightarrow PS_1 \Rightarrow PDP$. Ninguna de las dos implicaciones se puede invertir. En efecto, $L_1([0,1])$ es débilmente secuencialmente completo, pero no de Schur, luego por I.16(b) no tiene la PS_1, aunque sí la PDP. Por otro lado, en [BD] se construye un espacio separable E con la PDP, que no tiene copias de c_0 ni de l_1, luego por I.16(b), E no tiene la PS_2. Como E tiene la PD y la PDP, resulta que E tiene la PS_1.

b) Los espacios de tipo $C(K)$ tienen la PS_1 y la PS_2.

c) Ni PS_1 ni PS_2 se heredan, en general, por cocientes: l_1 tiene la PS_2, y por tanto la PS_1, pero l_2, que es isomorfo a un cociente de l_1, no tiene ninguna de estas propiedades, como resulta de I.16(b).

I.18

Volviendo al esquema general desarrollado al comienzo de la sección, resulta que, con respecto al cuadro (*) de la pág. 4, nos quedan por tratar los siguientes casos (para $\mathscr{C}$ la clase de todos los espacios de Banach):

1. $\Theta = \mathcal{I}$ y $\Phi = \mathcal{W}$. La propiedad $P(\mathcal{I}, \mathcal{W})$ fue introducida por Pelczynski en [P2], con el nombre de *Propiedad V* (PV para abreviar). Obviamente, tiene las mismas propiedades de estabilidad que la PD, y la implica, aunque es distinta de ella: El espacio J de James que consideramos al final del corolario I.5, tiene la PD (pues no contiene copias de l_1) y la identidad I_J es incondicionalmente convergente (corolario I.4) y no débilmente compacto. Estudiaremos la propiedad V con más detalle en la próxima sección.

2. $\Theta = \mathcal{D}\mathcal{P}$ y $\Phi = \mathcal{K}$. Como consecuencia de un resultado no trivial de Odell, Rosenthal y Stegall (que probaremos en la próxima sección), se demuestra que $E \in P(\mathcal{D}\mathcal{P}, \mathcal{K})$ si y sólo si E no contiene copias de l_1. Como $\mathcal{K}$ es supráyectivo, I.1 proporciona entonces una sencilla demostración de que la propiedad de no contener copias de l_1 es estable por productos finitos y cocientes.

3. $\Theta = \mathcal{W}$ y $\Phi = \mathcal{K}$. Veremos en la próxima sección que $E \in P(\mathcal{W}, \mathcal{K})$ si y sólo si E^* es un espacio de Schur.

4. $\Theta = \mathcal{I}$ y $\Phi = \mathcal{D}$. Aparentemente, la propiedad $P(\mathcal{I}, \mathcal{D})$ no ha sido estudiada sistemáticamente en la literatura aunque, por ejemplo, la llamada *propiedad (u) de Pelczynski* (véase [LT], II.1.c.1) claramente la implica. Obviamente, la conjunción de esta propiedad con la PD es equivalente a la PV. En particular, resulta la siguiente extensión del corolario 4 de [P1]:

   Si E tiene la PD y la Propiedad (u), entonces tiene la PV.

Hasta ahora, hemos utilizado el esquema general tomando como $\mathcal{C}$ la clase de todos los espacios de Banach. Sin embargo, hemos visto en en teorema I.9 que

$$P(\mathcal{W}, \mathcal{D}\mathcal{P}) = P(\mathcal{W}, \mathcal{D}\mathcal{P}; \{c_0\}).$$

A continuación, vamos a ver otra propiedad que se puede "localizar" en una subclase propia $\mathcal{C}$:

I.19 Definición.

Un espacio de Banach E se dice que es un *espacio de Grothendieck* o que tiene la *propiedad de Grothendieck* (PG para abreviar) si

$$E \in P(\mathcal{L}, \mathcal{W}; \{c_0\}).$$

I.20 Proposición.

a) *La Propiedad de Grothendieck es estable por isomorfismos topológicos, productos finitos, paso a complementados y a cocientes en general.*

b) *Para un espacio de Banach E, son equivalentes:*

i) E es un espacio de Grothendieck.

ii) En E^* coinciden las sucesiones $\sigma(E^*, E)$ convergentes con las débilmente convergentes.

iii) Para todo espacio separable F, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{W}(E, F)$.

c) *Sea E un espacio de Banach con la PV. Entonces E es de Grothendieck si y sólo si no contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0.*

Demostración.

(a) resulta inmediatamente de I.1.

Veamos (b): (i)$\Rightarrow$(ii). Sea $(x_n^*) \subseteq E^*$ una sucesión $\sigma(E^*, E)$–nula. Como ya hemos visto antes, la fórmula $T(x) = (x_n^*(x))$ define un operador de E en c_0 que, por (i), es débilmente compacto, y por tanto también lo es T^* por el teorema de Gantmacher. En particular,

$$\{T^*(e_n): \ n \in \mathbb{N}\} = \{x_n^*: \ n \in \mathbb{N}\}$$

es débilmente relativamente compacto, y el único punto débil de aglomeración posible es el 0, luego (x_n^*) converge débilmente a 0.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Sea F separable, $(y_n^*) \subseteq B(F^*)$ y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Como $B(F^*)$ es $\sigma(E^*, E)$–compacto y metrizable, podemos suponer que (y_n^*) es $\sigma(F^*, F)$ convergente. Por tanto, $(T^*(y_n^*))$ es $\sigma(E^*, E)$–convergente y, por (ii), débilmente convergente. Así pues, T^*, y en consecuencia T, es débilmente compacto.

(iii)$\Rightarrow$(i) es obvio.

Si E es de Grothendieck y P es una proyección continua sobre un subespacio M separable, entonces P es débilmente compacto y, por ser abierta, M es reflexivo, y por tanto no puede ser isomorfo a c_0. Recíprocamente, si E no es de Grothendieck, existe un operador T de E en c_0 que no es débilmente compacto. Como E tiene la PV, $T \notin \mathcal{I}(E, c_0)$, luego por I.3, existe un subespacio M de E, isomorfo a c_0, tal que la restricción $T_{|M}$ es un isomorfismo. Pero $T(M)$ es entonces un subespacio isomorfo a c_0, contenido en el subespacio *separable* c_0. Un teorema de Sobczyk (véase, p. ej., [D], Ch. VII, Th. 4), muestra que existe una proyección continua $Q: \ c_0 \longrightarrow T(M)$. Es claro entonces que

$$P = (T_{|M})^{-1} \circ Q \circ T$$

es una proyección continua de E sobre M.∎

I.21 Observaciones y ejemplos.

a) La demostración de la implicación (ii)$\Rightarrow$(iii) de I.19(b), muestra realmente que todo operador de un espacio de Grothendieck en un espacio

F tal que $B(F^*)$ sea $\sigma(F^*, F)$ secuencialmente compacta, es débilmente compacto.

b) Los espacios de Grothendieck fueron introducidos en [G]. Grothendieck demostró que si K es un compacto extremadamente disconexo, $C(K)$ tiene la PG. En particular, $l_\infty = C(\beta\mathbb{N})$ es un espacio de Grothendieck y, por tanto, no posee ningún subespacio complementado separable.

c) En [DSe] se prueba que si E es de Grothendieck, todo operador T no débilmente compacto sobre E fija una copia de l_1. En particular, todo espacio de Grothendieck no reflexivo, contiene una copia de l_1.

II. El método conjuntista

Este segundo método general consiste, como dijimos en la introducción, en establecer relaciones no triviales de inclusión entre subconjuntos notables de un espacio de Banach. El esquema general es el siguiente: Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ dos clases de subconjuntos (de modo que $\mathcal{H}(E)$ y $\mathcal{G}(E)$ serán clases de subconjuntos de E). Diremos que E tiene la *propiedad* $p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ si $\mathcal{H}(E) \subseteq \mathcal{G}(E)$. Naturalmente, la propiedad tendrá algún interés cuando la relación de contenido sea no trivial. Como en el caso del método homológico, habitualmente las clases consideradas tienen alguna propiedad adicional. En particular, estaremos interesados en las clases $\mathcal{H}$ que verifican las siguientes propiedades:

(C_0) Para todo espacio de Banach E, $\mathcal{H}(E) \neq \emptyset$.

(C_1) Si $A, B \in \mathcal{H}(E)$, entonces $A + B$ y $A \cup B$ pertenecen a $\mathcal{H}(E)$.

(C_2) $\mathcal{H}$ es estable por aplicaciones lineales continuas.

(C_3) $\mathcal{H}$ es estable por paso a subconjuntos.

De (C_0), (C_2) y (C_3) resulta que para todo $x \in E$, $\{x\} \in \mathcal{H}(E)$. Si $A_i \in \mathcal{H}(E_i)$ $(i = 1, 2)$, la fórmula

$$A_1 \times A_2 = J_1(A_1) + J_2(A_2)$$

(donde J_i son las inyecciones canónicas), muestra que $\mathcal{H}$ es también estable por productos finitos.

Por comodidad, llamaremos *clase de tipo* (C) a una que verifique las propiedades (C_0) a (C_3) anteriores.

Diremos que una clase $\mathcal{H}$ es *inyectiva* si para toda inyección (esto es, isomorfismo sobre la imagen) $J : E_0 \longrightarrow E$, de $J(B) \in \mathcal{H}(E)$ resulta que $B \in \mathcal{H}(E_0)$. Asímismo, diremos que $\mathcal{H}$ es *suprayectiva* si para toda suprayección $P : E \longrightarrow E_0$ y para todo $B_0 \in \mathcal{H}(E_0)$, existe $B \in \mathcal{H}(E)$ tal que $P(B) = B_0$. Con estas notaciones, resulta

II.1 Proposición.

Sean $\mathcal{H}$ y $\mathcal{G}$ clases de tipo (C).

a) *La propiedad $p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ es estable por isomorfismos topológicos, productos finitos y paso a subespacios complementados.*

b) *Si $\mathcal{H}$ es una clase suprayectiva, $p(\mathcal{H}, G)$ es estable por cocientes por subespacios cerrados.*

c) *Si $\mathcal{G}$ es inyectiva, $p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ se hereda por el paso a subespacios cerrados arbitrarios.*

Demostración.

(a) Probemos, por ejemplo, la estabilidad por productos finitos: Sean E_1, E_2 verificando $p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$. Si $B \in \mathcal{H}(E_1 \times E_2)$, entonces

$$B \subseteq \pi_1(B) \times \pi_2(B) \in \mathcal{G}(E_1 \times E_2).$$

b) Sea E con la propiedad $p(\mathcal{H}, \mathcal{G})$, $P : E \longrightarrow E_0$ una suprayección y $B_0 \in \mathcal{H}(E_0)$. Por la hipótesis, existe $B \in \mathcal{H}(E) \subseteq \mathcal{G}(E)$ tal que

$$B_0 = P(B) \in \mathcal{G}(E_0) \text{ por } (C_2).$$

La demostración de (c) es totalmente análoga.∎

A continuación vamos a ver algunas situaciones concretas del método que acabamos de describir. En primer lugar, dado un espacio de Banach E, denotaremos por $\mathcal{K}(E)$, $\mathcal{W}(E)$, $\mathcal{WC}(E)$ y $\mathcal{B}(E)$ las clases de los subconjuntos relativamente compactos, débilmente relativamente compactos, débilmente condicionalmente compacto y acotados de E, respectivamente. Esto es, B pertenece a cada una de estas clases si y sólo si toda sucesión en B posee una subsucesión

- convergente en norma (caso $\mathcal{K}(E)$),
- débilmente convergente (caso $\mathcal{W}(E)$),
- débilmente de Cauchy (caso $\mathcal{WC}(E)$),
- acotada (caso $\mathcal{B}(E)$).

Cada una de estas clases es claramente de tipo (C), estable por el paso a envolturas absolutamente convexas y cerradas (para $\mathcal{W}$, es el teorema de Krein–Smulian, [DS] V.6.4; En II.9 daremos una demostración para el otro caso no trivial $\mathcal{WC}$), y verifican las relaciones

$$(**) \qquad \mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{W}(E) \subseteq \mathcal{WC}(E) \subseteq \mathcal{B}(E).$$

Además, todas ellas son inyectivas, según se comprueba fácilmente. $\mathcal{B}$ y $\mathcal{K}$ son también suprayectivas. Esto resulta, por ejemplo, de que si $P : E \longrightarrow E_0$ es una suprayección, por el teorema de selección de Michael existe una sección $\varphi : E_0 \longrightarrow E$ continua y homogénea (en general, no lineal), de modo que

$$P \circ \varphi = I_{E_0} \text{ y } \varphi(B(E)) \subseteq 2B(E_0)$$

(véase, p. ej., [H], §21C).

Por el contrario, $\mathcal{W}$ y $\mathcal{WC}$ no son suprayectivas. En efecto, si $P : l_1 \longrightarrow l_2$ es una suprayección, $B(l_2)$ es débilmente compacto y no compacto, luego no puede ser imagen por P de ningún subconjunto $B \in \mathcal{WC}(l_1)$ pues, por el lema de Schur, $\mathcal{WC}(l_1) = \mathcal{K}(l_1)$.

Todas las demás clases que vamos a considerar en esta sección, están formadas por conjuntos acotados. Notemos que un subconjunto $B \subseteq E$ es acotado si y sólo si toda sucesión $(x_n^*) \subseteq E^*$ convergente a 0 en norma, converge uniformemente sobre B (a 0, naturalmente). Por tanto, si consideramos una familia $\Sigma(E^*)$ de sucesiones en E^* que contenga a las sucesiones convergentes a 0 en norma, la clase $\mathcal{H}_\Sigma(E)$ de los subconjuntos $B \subseteq E$ tales que para cada $(x_n^*) \in \Sigma(E^*)$ se tenga

$$(\#) \qquad \lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n^*(x)| : x \in B\} = 0$$

estará formada por conjuntos acotados. Es obvio que $\mathcal{H}_\Sigma(E)$ verifica siempre (C_0), (C_1) y (C_3). Si además Σ es tal que para todo $T \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$T^*(\Sigma(F^*)) \subseteq \Sigma(E^*),$$

es claro que $\mathcal{H}_\Sigma$ verifica también (C_2), y por tanto es una clase de tipo (C). Esta es la idea general de las siguientes definiciones: Sea E un Banach. Un subconjunto $B \subseteq E$ diremos que es

- *Limitado (Köthe, 1938; Grothendieck, 1953)*, y escribiremos $B \in \mathcal{L}^*(E)$, si verifica (#) cuando $\Sigma(E^*)$ son las sucesiones $\sigma(E^*, E)$–nulas de E^*.

- *Dunford–Pettis (Andrews, 1979)* y escribiremos $E \in \mathcal{DP}(E)$, si verifica (#) cuando $\Sigma(E^*)$ son las sucesiones débilmente (e.d., $\sigma(E^*, E^{**})$) nulas de E^*.

- (V^*)*(Pelczynski, 1962)*, y escribiremos $B \in \mathcal{V}^*(E)$, si verifica (#) cuando $\Sigma(E^*)$ son las sucesiones tales que $\sum x_n^*$ es d.i.c. en E^*.

Por lo visto anteriormente, cada una de estas clases es de tipo (C) y está formada por conjuntos acotados. Además, por la definición, se verifican las siguientes relaciones:

$$(***) \qquad \mathcal{L}^*(E) \subseteq \mathcal{DP}(E) \subseteq \mathcal{V}^*(E) \subseteq \mathcal{B}(E).$$

En el siguiente teorema se recogen algunas útiles caracterizaciones de las últimas clases definidas, en términos de operadores:

II.2 Teorema.

Sea E un espacio de Banach y $B \in \mathcal{B}(E)$.

a) ([SL]) Son equivalentes:

i) $B \in \mathcal{L}^*(E)$.

ii) $T(B)$ *es relativamente compacto, para cada* $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$.

b) ([A]) Son equivalentes:

i) $B \in \mathcal{DP}(E)$.

ii) Cualquiera que sea el espacio de Banach F, $T(B)$ es relativamente compacto para cada operador $T \in \mathcal{W}(E, F)$.

iii) Igual que (ii), con $F = c_0$.

c) ([B3], [E2]) Son equivalentes:

i) $B \in \mathcal{V}^*(E)$.

ii) Toda serie d.i.c. $\sum x_n^*$ en E^*, converge absoluta y uniformemente sobre B, es decir,

$$\lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \sum_{n=m}^{\infty} |x_n^*(x)| : \; x \in B \right\} = 0.$$

iii) $T(B)$ *es relativamente compacto, para cada* $T \in \mathcal{L}(E, l_1)$.

Demostración.

(a). Como hemos señalado varias veces, existe una biyección entre las sucesiones (x_n^*) que son $\sigma(E^*, E)$–nulas y los operadores $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$, dada por $T(x) = (x_n^*(x))$ y $x_n^* = T^*(e_n)$. La equivalencia de (i) y (ii) resulta entonces de la siguiente caracterización ([DS], IV. 13.9): *Un subconjunto acotado $A \subseteq c_0$ es relativamente compacto si y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n| : \; x = (x_n) \in A\} = 0.$$

Pasemos a probar (b). (i)$\Rightarrow$(ii): Supongamos $T \in \mathcal{W}(E, F)$. Un importante resultado de Davis, Figiel, Johnson y Pelczynski ([DFJP)] establece que T se factoriza a través de un espacio reflexivo, lo que permite suponer (y así lo haremos) que F es reflexivo. Desde luego, $T(B) \in \mathcal{W}(F)$. Si $T(B) \notin \mathcal{K}(F)$, existirá una sucesión $(x_n) \subseteq B$, un $\delta > 0$ y un $y \in F$ tales que $(T(x_n))$ converge débilmente a y, pero $\|T(x_n) - y\| > \delta$ para todo n. Elijamos para cada n un

$$y_n^* \in B(F^*) \text{ tal que } < T(x_n) - y, y_n^* >> \delta.$$

Como F es reflexivo, pasando si es preciso a una subsucesión, podemos suponer que (y_n^*) converge débilmente a un cierto $y^* \in F^*$. Por tanto, $T^*(y_n^* - y^*)$ converge débilmente a 0. Por (i), resulta entonces

$$0 = \lim_{n\to\infty} < x_n, T^*(y_n^* - y^*) > = \lim_{n\to\infty} < T(x_n), y_n^* - y^* > .$$

Pero también

$$\lim_{n\to\infty} < T(x_n) - y, y^* > = \lim_{n\to\infty} < y, y_n^* - y^* > = 0,$$

luego

$$0 = \lim_{n\to\infty} < T(x_n), y_n^* - y^* > + < T(x_n) - y, y^* > +$$

$$+ < y, y^* - y_n^* > = \lim_{n\to\infty} < T(x_n) - y, y_n^* > > \delta,$$

que es una contradicción.

(ii)$\Rightarrow$(iii) es evidente. (iii)$\Rightarrow$(i): Sea (x_n^*) una sucesión débilmente nula de E^*. Como vimos en el teorema I.9, el operador $T : E \longrightarrow c_0$ asociado, es débilmente compacto . Por la hipótesis, $T(B) \in \mathcal{K}(c_0)$ lo que, según el criterio citado en la demostración de (a), equivale a que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x_n^*(x)| : x \in B\} = 0,$$

lo que prueba que $B \in \mathcal{D}\mathcal{P}(E)$.

Finalmente, veamos (c). (i)$\Rightarrow$(ii): Sea $\sum x_n^*$ una serie d.i.c. en E^*. Si no se cumple (ii), existe $\varepsilon > 0$, una subsucesión $p_1 < q_1 < p_2 < \ldots < p_n < q_n < \ldots$ de enteros y una sucesión (x_n) en B, tales que

$$\sum_{n=pj}^{qj} |x_n^*(x_j)| > \varepsilon.$$

Pero entonces existe un subconjunto σ_j de $\{p_j, \ldots, q_j\}$ tal que

$$\left| \sum_{\sigma_j} x_n^*(x_j) \right| > \varepsilon/4.$$

(Véase, por ejemplo [R], lemma 6.3). Si ponemos

$$y_j^* = \sum_{\sigma_j} x_n^*,$$

claramente $\sum y_j^*$ es d.i.c. en E^*, y $|y_j^*(x_j)| > \varepsilon/4$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

La demostración de la equivalencia entre (ii) y (iii) es totalmente análoga a la (i)$\Leftrightarrow$(ii) de (a). Basta tener en cuenta la biyección existente entre

$\mathcal{L}(E, l_1)$ y las series d.i.c. de E^*, que asocia a cada serie $\sum x_n^*$ el operador definido por

$$T(x) = (x_n^*(x)) \in l_1$$

(véase [D], Ch. VII), así como el conocido criterio de compacidad en l_1 ([DS], IV. 13.3): *Un subconjunto acotado $A \subseteq l_1$ es relativamente compacto si y sólo si*

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} |x_i| \; : \; x = (x_i) \in A \right\} = 0.$$

Obviamente, (ii)$\Rightarrow$(i).∎

II.3 Corolario.

Sea $\mathcal{H}$ una cualquiera de las clases $\mathcal{L}^*$, $\mathcal{DP}$ o $\mathcal{V}^*$.

a) $\mathcal{H}(E)$ es estable por la operación de tomar envolturas absolutamente convexas cerradas.

b) Sea $B \subseteq E$. Si todo subconjunto numerable de B pertenece a $\mathcal{H}(E)$, entonces $B \in \mathcal{H}(E)$.

c) Sea $B \subseteq E$. Si para cada $\varepsilon > 0$ existe $B_\varepsilon \in \mathcal{H}(E)$ tal que $B \subseteq B_\varepsilon + \varepsilon B(E)$, entonces $B \in \mathcal{H}(E)$.

d) $\mathcal{H}$ no es inyectiva.

Demostración

Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ y $B \subseteq E$, resulta que $T(\overline{coe}(B)) \subseteq \overline{coe}(T(B))$. Por tanto, (a) se deduce de la caracterización dada en II.2 y de la estabilidad de $\mathcal{K}$ por envolturas absolutamente convexas cerradas. Análogamente, (b) resulta de II.2 y de la caracterización de $\mathcal{K}$ por sucesiones. (c) se deduce también de II.2 y de la correspondiente propiedad para $\mathcal{K}$ (véase lema I.6).

(d) Es bien conocido que l_∞ contiene una copia isométrica de cualquier espacio de Banach separable. Sea $M \subseteq l_\infty$ un subespacio isométrico a l_2. Entonces $B(M) \in \mathcal{W}(l_\infty)$. Como l_∞ es un espacio de Grothendieck (I.21(b)) y tiene la PDP (I.11(c)),

$$\mathcal{L}(l_\infty, c_0) = \mathcal{W}(l_\infty, c_0) \subseteq \mathcal{DP}(l_\infty, c_0),$$

luego $T(B(M)) \in \mathcal{K}(c_0)$, para todo $T \in \mathcal{L}(l_\infty, c_0)$. De II.2 (a) resulta que $B(M) \in \mathcal{L}^*(l_\infty)$. Sin embargo,

$$B(l_2) \notin \mathcal{L}^*(l_2) = \mathcal{DP}(l_2)$$

pues, por ejemplo, la inclusión canónica J de l_2 en c_0 es débilmente compacta, pero $J(B(l_2))$ no es relativamente compacto (la sucesión de vectores unitarios no posee subsucesiones convergentes en norma).

Sea ahora $M \subseteq l_\infty$ un subespacio isométrico a l_1. De nuevo por ser l_∞ un espacio de Grothendieck, se tiene que

$$\mathcal{L}(l_\infty, l_1) = \mathcal{W}(l_\infty, l_1) = \mathcal{K}(l_\infty, l_1),$$

luego $B(M) \in \mathcal{V}^*(l_\infty)$. Sin embargo, de II.2(c) resulta evidente que

$$\mathcal{V}^*(l_1) = \mathcal{K}(l_1),$$

luego $B(M)$ ($\approx B(l_1)$) no pertenece a $\mathcal{V}^*(M)$.■

De II.2 resulta también inmediatamente que

$$\mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E) \text{ y } \mathcal{W}\mathcal{C}(E) \subseteq \mathcal{V}^*(E).$$

El siguiente resultado de Odell y Stegall permitirá establecer la cadena completa de inclusiones entre las clases que hemos definido. La demostración que vamos a dar se debe a Drewnowski ([DR]), quién la usó para probar que $\mathcal{L}^*(E) \subseteq \mathcal{W}\mathcal{C}(E)$:

II.4 Corolario.

Para todo espacio de Banach E, $\mathcal{D}\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{W}\mathcal{C}(E)$.

Demostración

Supongamos que existe

$$B \in \mathcal{D}\mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{W}\mathcal{C}(E).$$

Por el teorema de dicotomía de Rosenthal, existe entonces una sucesión $(u_n) \subseteq B$ que es equivalente a la base canónica de l_1. Definamos

$$S_1 : M = \overline{[u_n : n \in N]} \longrightarrow L_\infty([0,1]) = L_\infty$$

por

$$S_1\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n r_n,$$

siendo $r_n(t) = \operatorname{sgn}(\operatorname{sen}(2^n \pi t))$ la n–sima función de Rademacher. Como quiera que las (r_n) en L_∞ son equivalentes a la base unidad canónica de l_1 (véase, por ej., [D], Ch. IX, pág. 203), resulta que S_1 es un isomorfismo topológico sobre su imagen. Pero todo operador sobre un subespacio, con valores en L_∞, se puede extender al espacio total conservando su norma (véase, p. ej., [LT], I., pág. 111), luego S_1 se extiende a un operador $S : E \longrightarrow L_\infty$. Notemos que (r_n) es un sistema ortonormal en L_2 y, por tanto, débilmente convergente a 0. *A fortioti*, (r_n) es entonces débilmente nula en $L_1 \subseteq L_\infty^*$, luego la fórmula

$$R(f) = \left(\int f\, r_n\right)_{n=1}^{\infty}, \; f \in L_\infty$$

define un operador débilmente compacto de L_∞ en c_0 (véase el argumento de II.2(b), (iii)$\Rightarrow$(i)). Entonces

$$T = R \circ S : E \longrightarrow c_0$$

es débilmente compacto. Pero $T(u_n) = e_n$, para todo n, luego $T(B) \notin \mathcal{K}(c_0)$, lo que contradice II.2(b).∎

II.5 Observación.

Notemos que L_∞ es isomorfo a l_∞ ([LT] I, pág. 111) y, por tanto, tiene la PDP. Así pues, el operador R construído en la demostración anterior, es de Dunford–Pettis y hemos demostrado entonces que *si E contiene una copia de l_1, existe $T \in \mathcal{DP}(E, c_0) \backslash \mathcal{K}(E, c_0)$*. Esto demuestra (d)$\Rightarrow$(a) del siguiente resultado, que anunciamos en la Sección I:

II.6 Proposición.

Para un espacio de Banach E, son equivalentes:

a) E no contiene copias de l_1.

b) $E \in p(\mathcal{R}, \mathcal{WC})$.

c) Para todo espacio de Banach F, $\mathcal{DP}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$, es decir, $E \in P(\mathcal{DP}, \mathcal{K})$.

d) $\mathcal{DP}(E, c_0) = \mathcal{K}(E, c_0)$, es decir, $E \in P(\mathcal{DP}, \mathcal{K};\ \{c_0\})$.

Demostración.

Sólo resta (a)$\Rightarrow$(b), que resulta inmediatamente del teorema de dicotomía de Rosenthal.∎

Como consecuencia de los resultados que hemos probado y de las relaciones (**) y (***), obtenemos

$$(\dagger) \qquad \mathcal{K}(E) \begin{array}{c} \subset \\ \subset \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{W}(E) \\ \mathcal{L}^*(E) \subseteq \mathcal{DP}(E) \end{array} \begin{array}{c} \subset \\ \subset \end{array} \mathcal{WC}(E) \subseteq \mathcal{V}^*(E) \subseteq \mathcal{R}(E)$$

Las inclusiones anteriores son, en general, estrictas, como muestran los siguientes ejemplos:

a) Si E es reflexivo de dimensión infinita,

$$I_E \in \mathcal{W}(E, E) \text{ pero } I_E(B(E)) \notin \mathcal{K}(E),$$

luego por II.2(b) resulta que $B(E) \in \mathcal{W}(E) \backslash \mathcal{DP}(E)$.

b) De II.2(a) resulta que $\mathcal{K}(c_0) = \mathcal{L}^*(c_0)$. Como $c_0^* \approx l_1$, toda sucesión débilmente nula en c_0^* converge a 0 en norma, luego $\mathcal{DP}(c_0) = \mathcal{B}(c_0)$. Esto prueba que $\mathcal{D}P(c_0) \neq \mathcal{L}^*(c_0)$.

c) Razonando como en la demostración de II.3(d), resulta que

$$B = \{e_n : n \in N\} \in \mathcal{L}^*(l_\infty)$$

(pues para todo operador $T \in \mathcal{L}(l_\infty, c_0)$, $T(B) \in \mathcal{K}(c_0)$), pero obviamente $B \notin \mathcal{K}(l_\infty)$.

d) Por el teorema de dicotomía de Rosenthal, $B(c_0) \in \mathcal{WC}(c_0)$. Claramente, $B(c_0) \notin \mathcal{W}(E)$.

e) La sucesión $x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$ es débilmente de Cauchy en c_0 y, por tanto, en l_∞. Como $\mathcal{L}(l_\infty, c_0) = \mathcal{DP}(l_\infty, c_0)$, resulta que

$$T(\{x_n : n \in N\}) \in \mathcal{K}(c_0)$$

y, por tanto, $B = \{x_n : n \in N\} \in \mathcal{L}^*(l_\infty)$ (por II.2(a)). Sin embargo, $B \notin \mathcal{W}(l_\infty)$, pues sino debería converger débilmente (necesariamente a $1 = (1, 1, \ldots)$!). Pero si LIM $\in (l_\infty)^*$ es un límite generalizado de Banach ([DS], II. 4.22), resulta que $\text{LIM}(1 - x_n) = 1$ para todo n.

f) En la demostración de II.3(d) vimos que si $M \subseteq l_\infty$ es isomorfo a l_1, entonces $B(M) \in \mathcal{V}^*(l_\infty)$. Claramente, $B(M) \notin \mathcal{WC}(l_\infty)$.

g) Finalmente, de II.2(c) resulta que $\mathcal{V}^*(l_1) = \mathcal{K}(l_1) \neq \mathcal{B}(l_1)$.

Una vez comprobado que todas las inclusiones en (†) son, en general, estrictas, podemos aplicar el esquema desarrollado al comienzo de la Sección. Algunas de las propiedades que resultan, son bien conocidas:

- $E \in p(\mathcal{B}, \mathcal{K})$ si y sólo si E *tiene dimensión finita.*
- $E \in p(\mathcal{B}, \mathcal{W})$ si y sólo si E *es reflexivo.*
- Ya vimos en II.6 que $E \in p(\mathcal{B}, \mathcal{WC})$ si y sólo si E *no contiene copias de* l_1.
- $E \in p(\mathcal{WC}, \mathcal{W})$ si y sólo si E *es débilmente secuencialmente completo.*

II.7 Proposición.

Para un espacio de Banach E, son equivalentes:

a) $E \in p(\mathcal{W}, \mathcal{K})$.

b) E es de Schur.

c) $E \in p(\mathcal{W}\mathcal{C}, \mathcal{K})$.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b) y (c)$\Rightarrow$(a) son evidentes. Por otro lado una sucesión (x_n) en un e.l.c. $(E, \mathcal{T})$ es $\mathcal{T}$–Cauchy si y sólo si para todo par (p_j) y (q_j) de subsucesiones estrictamente crecientes de enteros positivos, con $p_j < q_j$ para todo j, la sucesión $y_j = (x_{q_j} - x_{p_j})$ es $\mathcal{T}$–nula. Por tanto, (b) implica que las sucesiones débilmente de Cauchy son de Cauchy en norma y, en consecuencia, convergentes.∎

La siguiente proposición caracteriza la PDP en términos conjuntistas:

II.8 Proposición.

Para un espacio de Banach E, son equivalentes:

a) E tiene la PDP.

b) $\mathcal{W}\mathcal{C}(E) = \mathcal{D}\mathcal{P}(E)$, *es decir,* $E \in p(\mathcal{W}\mathcal{C}, \mathcal{D}\mathcal{P})$.

c) $\mathcal{W}(E) \subseteq \mathcal{D}\mathcal{P}(E)$, *es decir,* $E \in p(\mathcal{W}, \mathcal{D}\mathcal{P})$.

Demostración

(a)$\Rightarrow$(b): Si $B \in \mathcal{W}\mathcal{C}(E)$, como todo $T \in \mathcal{W}(E, c_0)$ es de Dunford–Pettis por la hipótesis, $T(B) \in \mathcal{K}(c_0)$. II.2(b) prueba entonces que $B \in \mathcal{D}\mathcal{P}(E)$. (b)$\Rightarrow$(c) es evidente. Finalmente, supongamos (c). Sea $T \in \mathcal{W}(E, c_0)$ y (x_n) una sucesión débilmente nula en E. Entonces

$$B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{W}(E) \subseteq \mathcal{D}\mathcal{P}(E),$$

por hipótesis. De II.2(b) resulta que $T(B) \in \mathcal{K}(c_0)$ y, por tanto,

$$\lim_{n \to \infty} \|T(x_n)\| = 0.$$

Es decir, $T \in \mathcal{D}\mathcal{P}(E, c_0)$, lo que prueba (a).∎

El resultado anterior permite dar una demostración sencilla del análogo al teorema de Krein–Smulian para $\mathcal{W}\mathcal{C}$, como habíamos anunciado:

II.9 Corolario.

Para todo espacio de Banach E, $\mathcal{W}\mathcal{C}(E)$ *es estable por envolturas absolutamente convexas y cerradas.*

Demostración.

Sea I tal que E sea isométrico a un subespacio de $l_\infty(I)$ (por ejemplo, $I = B(E^*)$; véase [H]) Como $\mathcal{W}\mathcal{C}$ es inyectiva, bastará probar el resultado para $E = l_\infty(I)$. Pero entonces E tiene la PDP (I.11(c)), luego por II.8 $\mathcal{W}\mathcal{C}(E) = \mathfrak{D}\mathcal{P}(E)$, que es estable por envolturas absolutamente convexas cerradas, según vimos en II.3(a).∎

El siguiente resultado también se anunció, en parte, al final de la Sección I:

II.10 Proposición.

Para un espacio de Banach E, son equivalentes:

a) Para todo espacio de Banach F, $\mathcal{W}(E,F) = \mathcal{K}(E,F)$ *(es decir,* $E \in P(\mathcal{W}, \mathcal{K})$*).*

b) $\mathcal{W}(E,c_0) = \mathcal{K}(E,c_0)$ *(es decir,* $E \in P(\mathcal{W}, \mathcal{K}; \{c_o\})$*).*

c) E^* *es de Schur.*

d) $\mathfrak{D}\mathcal{P}(E) = \mathfrak{B}(E)$*, es decir,* $E \in p(\mathfrak{B}, \mathfrak{D}\mathcal{P})$*.*

e) E tiene la PDP y no contiene copias de l_1*.*

Demostración.

(a)⇒(b) es evidente. Sea (x_n^*) una sucesión débilmente nula en E^*. Como sabemos, el operador asociado $T : E \longrightarrow c_0$ es entonces débilmente compacto. Si se supone (b), resulta que T, y por tanto T^*, es compacto. Si $(e_n) \subseteq l_1 \approx (c_0)^*$ son los vectores unitarios canónicos, se tiene entonces que $\{T^*(e_n) = x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ es relativamente compacto, luego (x_n^*) converge a 0 en norma. Así pues E^* es de Schur.

Si E^* es de Schur, las sucesiones débilmente convergentes en E^* son convergentes en norma, y por tanto convergen uniformemente sobre todo acotado de E. Esto prueba (c)⇒(d). Que (d)⇒(e) es consecuencia inmediata de la caracterización II.8(b) y el teorema de dicotomía de Rosenthal. Finalmente, (e)⇒(a) resulta de la definición I.8 de la PDP y de II.6(c).∎

La equivalencia (c)⇔(e) en II.10 se debe a Pethe y Thakare ([PT]), aunque su demostración es diferente de la que hemos dado.

Los casos que quedan, dentro del esquema general desarrollado al comienzo de la sección, cuando $\mathcal{H} = \mathfrak{B}$, se tratan a continuación:

II.11 Proposición.

Sea E un espacio de Banach.

a) $\mathcal{B}(E) = \mathcal{L}^*(E)$ (es decir, $E \in p(\mathcal{B}, \mathcal{L}^*)$) si y sólo si E es de dimensión finita.

b) ([B3]) Son equivalentes:

i) $\mathcal{B}(E) = \mathcal{V}^*(E)$ (es decir, $E \in p(\mathcal{B}, \mathcal{V}^*)$).

ii) $\mathcal{L}(E, l_1) = \mathcal{W}(E, l_1) = \mathcal{K}(E, l_1)$.

iii) E no contiene copias complementadas de l_1.

Demostración.

Un teorema, debido independientemente a Josefson y Nissenzweig (véase [D], Ch. XII), establece que en todo espacio de Banach de dimensión infinita E, existe una sucesión $(x_n^*) \subseteq E^*$ $\sigma(E^*, E)$–nula, formada por vectores unitarios. Esto implica que $B(E)$ no es un conjunto limitado en este caso, lo que prueba (a).

En cuanto a (b), la equivalencia de (i) y (ii) es una reformulación de (i)$\Leftrightarrow$(iii) en II.2(c). Claramente, (ii)$\Rightarrow$(iii). Finalmente, un resultado clásico de Bessaga y Pelczynski ([D], Th. V.10), prueba que (iii) es equivalente a que E^* no contenga copias de c_0. Por el colorario I.5, toda serie $\sum x_n^*$ d.i.c. en E^*, converge en norma. En particular, $\lim_{n\to\infty} \|x_n^*\| = 0$ y, por tanto, $B(E) \in \mathcal{V}^*(E)$.∎

La siguiente propiedad tiene su origen en un error de Gelfand, quien en 1938 afirmó que (con notación moderna) todo conjunto limitado es relativamente compacto. El nombre actual se debe probablemente a Diestel.

II.12 Definición.

Se dice que E tiene la *propiedad de Gelfand–Phillips* (PGP para abreviar) si y sólo si $E \in p(\mathcal{L}^*, \mathcal{K})$.

II.13 Proposición.

a) La PGP es estable por isomorfismos topológicos, productos finitos y paso a subespacios cerrados.

b) Son equivalentes:

(i) E tiene la PGP.

(ii) Toda sucesión limitada y débilmente nula, converge a 0 en norma.

(iii) Toda sucesión limitada y débilmente de Cauchy, es de Cauchy en norma.

Demostración.

(a) resulta de II.1 y del hecho de que $\mathcal{K}$ es inyectiva. En cuanto a (b), claramente (i)$\Rightarrow$(ii). El argumento de la Proposición II.7 prueba que (ii)$\Rightarrow$(iii). Finalmente, supongamos (iii). Por II.3(b) para probar (i) bastará demostrar que toda sucesión limitada es relativamente compacta. Pero como $\mathcal{L}^*(E) \subseteq \mathcal{W}\mathcal{C}(E)$, si (x_n) es limitada, posee una subsucesión de Cauchy que, por (iii), converge en norma.∎

II.14 Observaciones y ejemplos.

a) II.7(c) prueba que todo espacio de Schur tiene la PGP.

b) Si $B(E^*)$ es $\sigma(E^*, E)$–secuencialmente compacta, entonces E tiene la PGP. En efecto, sea $(x_n) \subseteq E$ una sucesión limitada y débilmente nula. Si no converge a 0 en norma, pasando a una subsucesión podemos suponer que existe un $\varepsilon > 0$ y para cada n un $x_n^* \in B(E^*)$ tal que $|x_n^*(x_n)| > \varepsilon$. Por la hipótesis, podemos suponer que (x_n^*) es $\sigma(E^*, E)$–convergente a un x^*. Pero entonces, por definición,

$$\lim_{n\to\infty} |(x_n^* - x^*)(x_n)| = 0,$$

mientras que por otro lado

$$|(x_n^* - x^*)(x_n)| \geqslant |x_n^*(x_n)| - |x^*(x_n)| > \varepsilon/2,$$

para n suficientemente grande.

c) En particular, todo espacio separable o reflexivo tiene la PGP.

d) El argumento de (a) funciona también siempre que $B(E^*)$ contenga un subconjunto normante S tal que toda sucesión en él posea una subsucesión $\sigma(E^*, E)$–convergente. En particular, si E no contiene copias de l_1, $S = B(E) \subseteq B(E^{**})$ cumple esta condición, luego E^* tiene la PGP.

e) El argumento de II.3(d) prueba que $\mathcal{W}(l_\infty) \subseteq \mathcal{L}^*(l_\infty)$, luego l_∞ no tiene la PGP.

f) ([SL]), 1.3.3) Si E tiene la PGP toda $(x_n) \subseteq E$ equivalente a la base canónica de c_0 posee una subsucesión (también equivalente a la base canónica de c_0) que engendra un subespacio *complementado.*

g) Más información sobre la PGP puede verse en [DR] y en [SL].

II.15 Definición.

Sea E un espacio de Banach.

a) *(Pelczynski [P1])* Se dice que E tiene la *propiedad* (V^*) si

$$\mathcal{V}^*(E) = \mathcal{W}(E),$$

es decir, si $E \in p(\mathcal{V}^*, \mathcal{W})$.

b) *(Bombal [B3])* Se dice que E tiene la *propiedad* (V^*) *débil* si

$$\mathcal{V}^*(E) = \mathcal{W}\mathcal{C}(E),$$

es decir, si $E \in p(\mathcal{V}^*, \mathcal{W}\mathcal{C})$.

De la relación (†) resulta claramente que E tiene la propiedad $(V,^*)$ si y sólo si tiene la propiedad (V^*) débil y es débilmente secuencialmente completo.

II.16 Teorema.

Sea E un espacio de Banach.

a) Tanto la propiedad (V^*) como la (V^*) débil son estables por isomorfismos topológicos, productos finitos y paso a subespacios cerrados.

b) Son equivalentes:

i) E tiene la propiedad (V^*).

ii) Para todo espacio de Banach F, todo operador $T \in \mathcal{L}(F,E)$ tal que T^* sea incondicionalmente convergente, es débilmente compacto.

c) E tiene la propiedad (V^*) débil si y sólo si toda sucesión en E equivalente a la base canónica de l_1, posee una subsucesión que engendra un subespacio complementado.

Demostración.

(a) resulta de II.1 y de que tanto $\mathcal{W}$ como $\mathcal{W}\mathcal{C}$ son inyectivas. Veamos (b). (i)$\Rightarrow$(ii): Sea T e $\mathcal{L}(F,E)$ tal que $T^* \in \mathcal{I}(E^*,F^*)$, y pongamos $K = T(B(F))$. Si $\sum x_n^*$ es d.i.c. en E^*, $\sum T^*(x_n^*)$ converge en norma, luego

$$\lim_{n\to\infty} \|T^*(x_n^*)\| = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}\{| < T(y),\ x_n^* > | :\ y \in B(F)\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}\{| < y, T^*(x_n^*) > | : y \in B(F)\} = 0,$$

y $K \in \mathcal{V}^*(E) = \mathcal{W}(E)$. Así pues, T es débilmente compacto.

(ii)$\Rightarrow$(i): Sea $K \in \mathcal{V}^*(E)$. Por II.3(a), podemos suponer que K es absolutamente convexo y cerrado. Designemos por E_K el espacio vectorial engendrado por K, dotado con la norma p_K = funcional de Minkowski de K. E_K es un espacio de Banach, de bola unidad K ([Ho], 3.5.6), y la inclusión canónica $J : E_K \longrightarrow E$ es continua. Consideremos

$$\pi = J^* : E^* \longrightarrow (E_K)^*.$$

Si $\sum x_n^*$ es d.i.c. en E^*,

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi(x_n^*)\| = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}\{| < x, x_n^* > | : x \in K\} = 0,$$

luego π es incondicionalmente convergente. Por hipótesis, $\pi = J^*$, y por tanto J, es débilmente compacto, luego $K = J(B(E_K))$ es débilmente compacto.

Pasemos a la demostración de (c): Notemos en primer lugar que si (x_n) es equivalente a la base canónica de l_1 y a la vez un conjunto V^*, el subespacio M que engendra no puede ser complementado, pues si S es el isomorfismo entre M y l_1 dado por $S(x_n) = e_n$, y existiera una proyección continua P de E en M, $T = S \circ P$ sería un operador de E en l_1, y

$$\{T(x_n) : n \in \mathbb{N}\} \supseteq \{e_n : n \in \mathbb{N}\},$$

que no es relativamente compacto.

Entonces, si E no tiene la propiedad (V *) débil, existe un conjunto $K \in \mathcal{V}^*(E) \setminus \mathcal{W}\mathcal{C}(E)$. El teorema de Rosenthal, proporciona una sucesión $(x_n) \subseteq K$ equivalente a la base canónica de l_1. Por lo que acabamos de ver, ninguna subsucesión de (x_n) puede engendrar un subespacio complementado.

Recíprocamente, supongamos que E tiene la propiedad (V^*) débil, y sea (x_n) una sucesión equivalente a la base canónica de l_1. Como

$$B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{W}\mathcal{C}(E) = \mathcal{V}^*(E),$$

por II.2(c) (iii) existe un operador T de E en l_1 tal que $T(B)$ no es relativamente compacto. El teorema 1.4 de [N] asegura entonces la existencia de una subsucesión (y_k) de (x_n) tal que $(T(y_k))$ es equivalente a la base canónica de l_1 y engendra un subespacio cerrado M *complementado*. Para toda sucesión finita de escalares (λ_k) resulta entonces

$$m \sum |\lambda_k| \leqslant \| \sum \lambda_k T(y_k)\| \leqslant \|T\| \, \| \sum \lambda_k y_k\| \leqslant \|T\| M \sum |\lambda_k|,$$

para dos constantes positivas m y M adecuadas. Esto prueba que (y_k) es también equivalente a la base canónica de l_1 y que la restricción de T a $N = \overline{[y_k : k \in \mathbb{N}]}$ es un isomorfismo. Si Q es una proyección continua sobre M, entonces $(T_{|N})^{-1} \circ Q \circ T$ es una proyección continua de E sobre N.∎

II.17 Observaciones y ejemplos.

a) La caracterización II.15(b) aparece en [E3] con una demostración distinta. II.15(c) se encuentra en [B2].

b) La simple inspección del cuadro (†) muestra que todo espacio reflexivo tiene la propiedad (V^*). Análogamente, si E no contiene copias de l_1, tiene la propiedad (V^*) débil. Por otro lado, de II.11(b) resulta también que *un espacio con la propiedad* (V^*) *es reflexivo si y sólo si no contiene copias complementadas de* l_1 *([P1])*.

c) En [B3] se prueba que *todo retículo de Banach orden continuo tiene la propiedad* (V^*) *débil*. En particular, los espacios $L_1(\mu)$, que son también débilmente secuencialmente completos, tienen la propiedad (V^*) (resultado probado en [P1]). Probablemente esta es la clase más importante de espacios no reflexivos con la propiedad (V^*). El dual del álgebra del disco y el espacio L_1/H_0 tienen también esta propiedad.

d) II.15(c) muestra la utilidad que puede tener la propiedad (V^*) débil en la detección de copias complementadas de l_1, véase por ejemplo [B2] y [B4]. También permite mejorar un resultado de Tzafriri ([T], Th. 16) que afirma que si un retículo orden continuo contiene una copia de l_1, contiene también una copia complementada. (A la vista de II.15(c) podemos asegurar ahora que está contenida en la primera).

e) Ni la propiedad (V^*) ni la (V^*) débil se conservan, en general, por cocientes: $E = C([0,1])$ no tiene la propiedad (V^*) débil. En efecto, todo operador de E en l_1 es (débilmente) compacto, por I.14(c), luego $\mathcal{B}(E) = \mathcal{V}^*(E)$ por II.11(b). Pero un viejo resultado de Mazur prueba que E contiene copias de cualquier espacio separable (véase [H], §25B), en particular de l_1, luego $\mathcal{V}^*(E) = \mathcal{B}(E) \neq \mathcal{W}\mathcal{C}(E)$ (II.6). Sin embargo, como todo espacio de Banach separable, E es un cociente de l_1. A la vista de II.1(b), esto prueba también que la clase $\mathcal{V}^*$ *no es suprayectiva*.

II.18

Los casos que, salvo yuxtaposición, faltan por considerar al aplicar el esquema general al cuadro (†), son los siguientes:

1. $\mathcal{L}^*(E) \subseteq \mathcal{W}(E)$: Emmanuele designa esta propiedad como (BD) en [E3], probablemente porque Bourgain y Diestel prueban en [BDi] que los espacios que no contienen copias de l_1 tienen esta propiedad. Desde luego, está implicada por la PGP, pero no está apenas estudiada.

2. Las propiedades $\mathcal{W}(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$, y $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{D}\mathcal{P}(E)$, por lo que sabemos, tampoco han sido tratadas como tales en la literatura. Desde luego, los espacios de Schur poseen ambas. Si E es de Grothendieck

(Def. I.18), obviamente $\mathcal{L}^*(E) = \mathcal{DP}(E)$, luego los espacios de Grothendieck con la PDP (como l_∞, por ejemplo), verifican

$$\mathcal{W}(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E) = \mathcal{DP}(E).$$

3. La propiedad $\mathcal{DP}(E) \subseteq \mathcal{W}(E)$ ha sido considerada en [L], con el nombre de *propiedad* RDP^*, por analogía con la propiedad (V^*). Los espacios de Grothendieck con la PGP (por ejemplo, los reflexivos), cumplen obviamente $\mathcal{DP}(E) = \mathcal{L}^*(E) = \mathcal{K}(E) \subseteq \mathcal{W}(E)$. En II.21 trataremos más ampliamente esta propiedad.

Para finalizar, daremos dos ejemplos de propiedades definidas a través de subconjuntos del *dual* de un espacio de Banach.

II.19 Definición.

Sea E un espacio de Banach. Un subconjunto $B \subseteq E^*$ se llama un conjunto (L) (resp., *conjunto* (V)), y escribiremos $B \in \mathcal{L}(E^*)$ (resp., $B \in \mathcal{V}(E^*)$), si para toda sucesión débilmente nula $(x_n) \subseteq E$ (resp., serie $\sum x_n$ d.i.c. en E) se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|x^*(x_n)| : x^* \in B\} = 0.$$

(Es decir, con la notación de la página 16, se trata de las clases $\mathcal{H}_\Sigma(E^*)$ asociadas a las clases $\sum$ de las sucesiones débilmente nulas (resp., series d.i.c.) en $E \subseteq E^{**}$. Los conjuntos (L) fueron introducidos por Leavelle en [L], y los (V) en [P1], como noción dual de la de conjunto (V^*). Obviamente, tanto $\mathcal{V}(E^*)$ como $\mathcal{L}(E^*)$ son estables por combinaciones lineales, uniones finitas y paso a subconjuntos.

II.20 Proposición.

Sea E un espacio de Banach.

a) $B \in \mathcal{V}(E^*)$ *si y sólo si para todo* $T \in \mathcal{L}(c_0, E)$, $T^*(B)$ *es (débilmente) relativamente compacto en* $(c_0)^* \approx l_1$.

b) $B \in \mathcal{L}(E^*)$ *si y sólo si para todo operador* $S : E^* \longrightarrow c_0$ *que sea continuo para las topologías* $\sigma(E^*, E)$ *y* $\sigma(c_0, l_1)$, $S(B) \in \mathcal{K}(c_0)$.

Demostración.

Es totalmente análoga a la del teorema II.2. Basta tener en cuenta en cada caso que la correspondencia que a cada $T \in \mathcal{L}(c_0, E)$ (resp., $S \in \mathcal{L}(E^*, c_0)$) asocia la serie $\sum T(e_n)$ (resp., sucesión $S^*(e_n)$), es una biyección entre $\mathcal{L}(c_0, E)$ (resp., los operadores de E^* en c_0 continuos para $\sigma(E^*, E)$ y $\sigma(c_0, l_1)$) y las series d.i.c. en E (resp., las sucesiones débilmente nulas en E).■

Razonando como en II.3, resulta inmediatamente que tanto $\mathcal{V}(E^*)$ como $\mathcal{L}(E^*)$ son estables por envolturas absolutamente convexas y $\sigma(E^*, E)$ cerradas. También, si $T \in \mathcal{L}(F, E)$,

$$T^*(\mathcal{V}^*(E^*)) \subseteq \mathcal{V}^*(F^*) \text{ y } T^*(\mathcal{L}(E^*)) \subseteq \mathcal{L}(F^*).$$

Además, se cumplen las siguientes relaciones.

(††) $$\mathcal{K}(E) \subset \mathcal{W}(E^*) \subset \mathcal{WC}(E^*) \subset \mathcal{V}(E^*) \subset \mathcal{V}(E^*) \subset \mathcal{B}(E^*)$$

y

$$\mathcal{K}(E^*) \subset \mathcal{L}^*(E^*) \subset \mathcal{DP}(E^*) \subset \mathcal{L}(E^*) \subset \mathcal{V}(E^*)$$

II.21 Teorema.

Sea E un espacio de Banach.

a) ([P1]) Son equivalentes:

i) E tiene la PV (Véase definición I.18.1)

ii) $\mathcal{V}(E^*) = \mathcal{W}(E^*)$.

b) ([L]) Son equivalentes:

i) E tiene la PRDP (Véase definición I.12).

ii) $\mathcal{L}(E^*) \subseteq \mathcal{W}(E^*)$.

Demostración.

Se pueden dar demostraciones similares para (a) y (b), siguiendo el método que empleamos en la demostración de II.15(b). Veámoslo, por ejemplo, para (a). (i)$\Rightarrow$(ii): Sea $B \in \mathcal{V}(E^*)$. Por lo que hemos visto, podemos suponer B un disco $\sigma(E^*, E)$ cerrado. El conjunto polar $V = B^0$ es entonces un disco entorno de 0, cuyo funcional de Minkowski p es una seminorma en E. Si $N = \{x \in E : p(x) = 0\}$, designemos por E_V el espacio normado cociente E/N, con la norma inducida por p (véase [Ho], pág. 208). El dual de E_V es el espacio normado $(E^*)_{V^0} = (E^*)_K$ ([Ho], pág. 277) construído a partir de K como en II.15(b). Si $\pi : E \longrightarrow E_V$ es la suprayección canónica y $\sum x_n$ es una serie d.i.c. en E, resulta que

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}\{| < x_n, x^* > | : x^* \in K\} = 0,$$

luego π es incondicionalmente convergente. Por hipótesis, π es débilmente compacto, luego π^*, que es la inclusión canónica J de E_K en E, es débilmente compacto. En consecuencia, $K = J(B(E_K)) \in W(E^*)$, c.q.d.

Recíprocamente, supongamos (ii) y sea $T \in \mathcal{J}(E, F)$. Si $B = T^*(B(F^*))$, resulta

$$\mathrm{Sup}\{| < x_n, x^* > | : x^* \in B\} =$$
$$= \mathrm{Sup}\{| < T(x_n), y^* > | : y^* \in B(F^*)\} = \|T(x_n)\|,$$

que converge a 0, luego $B \in \mathcal{V}(E^*) = \mathcal{W}(E^*)$ y, por tanto, $T \in \mathcal{W}(E, F)$.∎

II.22 Observaciones y ejemplos.

a) II.20(a) aparece en [P1], con una demostración diferente, en la que se inspiran fuertemente las demostraciones de II.20(b) de [L] y II.15(b) de [E3].

b) La caracterización II.20 proporciona, tras una simple inspección de las relaciones (†) y (††), demostraciones inmediatas de las principales características de las propiedades (V) y RDP que aparecen en [L] y [P1]:

- Si E (resp., E^*) tiene PV, entonces E^* (resp., E) tiene la propiedad V^*.

- Si E (resp., E^*) tiene PRDP, entonces E^* (resp., E) tiene la propiedad RDP^* (definición II.17.3).

- El corolario I.5 muestra que $B(E^*) \in \mathcal{V}(E^*)$ si y sólo si E no contiene copias de c_0. Por tanto, un espacio con la PV es reflexivo si y sólo si no contiene copias de c_0.

- El espacio J de James (véase el final del Corolario I.5) y su dual tienen la PRDP, pues no contienen copias de l_1 (I.13(b)), luego J tiene también la propiedad RDP^*. Sin embargo, no tiene la PV (por ejemplo, no es reflexivo y no contiene copias de c_0).

BIBLIOGRAFIA

[A] K. T. ANDREWS.: *Dunford–Pettis sets in the space of Bochner integrable functions.* Math. Ann., 241 (1979), 35–41.

[B1] F. BOMBAL.: *Dos nuevas clases de espacios de Banach.* Aparecerá en el volumen homenaje al Prof. N. Hayeck.

[B2] F. BOMBAL.: *On embedding l_1 as a complemented subspace of Orlicz vector–valued function spaces.* Rev. Mat. Univ. Complutense, 1 (1988), 13–17.

[B3] F. BOMBAL.: *On (V^*) sets and Pelczynski's property (V^*).* Glasgow Math. J., 32 (1990), 109-120.

[B4] F. BOMBAL.: *On Pelczynski's property (V^*) in vector sequence spaces.* Coll. Math., 39 (1988), 141–148.

[BD] J. BOURGAIN Y F. DELBAEN.: *A class of special $\mathcal{L}_\infty$ spaces.* Acta Math., 145 (1981), 155–176.

[BDi] J. BOURGAIN Y J. DIESTEL.: *Limited operators and strict cosingularity.* Math. Nachr., 119 (1984), 55–58.

[D] J. DIESTEL.: *Sequences and series in Banach spaces,* Graduate texts in Math., No. 92, Springer, 1984.

[DR] L. DREWNOWSKI.: *On Banach spaces with the Gelfand–Phillips property.* Math. Zeitschrift 193 (1986), 405–411.

[DS] N. DUNFORD Y J. T. SCHWARTZ,.: *Linear operators, Part I.* Intersciense, New York and London, 1958.

[DSe] J. DIESTEL Y C. J. SEIFERT.: *The Banach Saks ideal. I. Operators acting on $C(\Omega)$.* Commen. Math., Tomus in Honorem L. Orlicz, I, 109–118.

[DFJP] W. J. DAVIS, T. FIGIEL, W. B. JOHNSON Y A. PELCZYNSKI.: *Factoring weakly compact operators.* J. Funct. Anal. 17 (1974), 311–327.

[E1] G. EMMANUELE.: *The (BD) property in $L^1(\mu, E)$.* Indiana Univ. Math. J., 36 (1987), 229–230.

[E2] G. EMMANUELE.: *On the Banach spaces with the property (V^*) of Pelczynski.* Annali Mat. Pura e Applicata, (1988), 171–181.

[E3] G. EMMANUELE.: *On the Banach spaces with the property (V^*) of Pelczynski. II.* Aparecerá en Ann. Mat. Pura Appl.

[G] A. GROTHENDIECK.: *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$.* Canad. J. Math., 5 (1953), 129–173.

[H] R. B. HOLMES.: *Geometric functional analysis and its applications.* Springer–Verlag, Berlin, 1977.

[Ho] J. HORVATH.: *Topological vector spaces and distributions.* Addison Wesley, Reading, Mass. 1966.

[L] T. LEAVELLE.: *The Reciprocal Dunford–Pettis property.* To appear in Ann. Mat. Pura e Appl.

[LT] J. LINDENSTRAUSS Y L. TZAFRIRI.: *Classical Banach Spaces.* Springer–Verlag, Berlin–New York. Vol. I, 1977; Vol. II, 1979.

[N] C. P. NICULESCU.: *Weak compactness in Banach lattices.* J. Operator Theory, 9 (1981), 217–231.

[P1] A. PELCZYNSKI.: *On Banach spaces on which every unconditionally convergent operator is weakly compact.* Bull. Acad. Pol. Sci., 10 (1962), 641–648.

[P2] A. PELCZYNSKI.: *On strictly singular and strictly consingular operators. 1.* Bull. Acad. Pol. Sci., 13 (1965), 31–36.

[PT] P. PETHE Y N. THAKARE—.: *A note on the Dunford–Pettis property and the Schur property*. Indiana Univ. J. Math., 27 (1978), 91–92.

[R] W. RUDIN.: *Real and complex analysis*. 3a. Ed., Mc Graw Hill, 1987.

[S] C. STEGALL.: *Duals of certain spaces with the Dunford–Pettis property*. Notices of the A.M.S. 19 (1972), 799.

[SL] T. SCHLUMPRECHT.: *Limitierte Mengen in Banachraumen*. Thesis. Ludwig–Maximilians Universität, München, 1988.

[T] L. TZAFRIRI.: *Reflexivity in Banach lattices and their supspaces*. J. Funct. Anal., 10 (1972), 1–18.

Fernando Bombal
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense
28040 Madrid