Una nota sobre continuidad de funciones semicontinuas

POR V. GREGORI Y P. GRIMALT[1]

Recibido: 9 de mayo de 1990

Presentado por el Académico Numerario Excmo. Sr. D.Manuel Valdivia

Abstract

In this paper we give some conditions for continuity of semicontinuous functions obtaining as an inmediate consequence that R–Blumberg spaces are Baire.

Resumen

En lo que sigue daremos condiciones para la continuidad de funciones semicontinuas y obtendremos como una consecuencia inmediata que los espacios R–Blumberg son de Baire.

1. INTRODUCCION

Designaremos por función, toda aplicación del espacio topológico X en la recta real R provista de la topología usual.

La función f es semicontinua inferiormente en $a \in X$ si

$$\forall c > 0,\ f^{-1}(]f(a) - c, +\infty[)$$

es un entorno de a, que equivale a que $f(a)$ sea el límite de la red

$$\{i_V :\ V \in \mathcal{E}(a), \subset\}$$

donde $i_V = \inf\{f(y) :\ y \in V\}$ y $\mathcal{E}(a)$ es la familia de entornos de a.

Si f es una función semicontinua inferiormente para cada $x \in X$, se dice que f es semicontinua inferiormente en X, lo cual equivale a que

[1]Los autores desean mostrar su agradecimiento al profesor J. Ferrer por sus valiosas sugerencias en la preparación de este artículo.

$$\forall k \in R, \quad f^{-1}(]k, +\infty[)$$

es abierto.

La función f se dice semicontinua superiormente en $a \in X$ si $-f$ es semicontinua inferiormente en a.

El concepto de regularizada se encuentra en Bourbaki [1], donde las funciones pueden tomar los valores de la recta compactada $\bar{R} = R \cup \{-\infty, +\infty\}$ con la topología usual.

Los resultados que se establecen a continuación para funciones semicontinuas inferiormente, tienen sus análogos para las semicontinuas superiormente.

2. SEMICONTINUIDAD EN ESPACIOS R–BLUMBERG

El siguiente Teorema será de utilidad a lo largo de todo el artículo:

Teorema 1.

Sea f una función semicontinua en X, y D un denso de X. Si la restricción $f|_D$ de f a D es continua, entonces f es continua en los puntos de D.

Demostración.

Sea a un punto de D y $c > 0$. Supongamos que f es semicontinua inferiormente; se tiene entonces que: existe un entorno abierto U de a tal que

$$f(U) \subset]f(a) - c, +\infty[.$$

Como $f|_D$ es continua en a, se tiene que existe un entorno abierto V de a, contenido en U tal que

$$f(V \cap D) \subset]f(a) - c/2, f(a) + c/2[.$$

Veamos que $f(V) \subset]-\infty, f(a) + c/2[$: para cada y de V y cada $r > 0$, se tiene:

$$f^{-1}(]f(y) - r, +\infty[) \cap V \cap D \neq \emptyset;$$

así que existe z de $V \cap D$ tal que:

$$f(z) > f(y) - r, \quad \text{luego} \quad f(y) - r < f(a) + c/2.$$

Así pues:

$$f(y) < f(a) + c/2 + r,$$

para todo $r > 0$, luego

$$f(y) \leqslant f(a) + c/2 < f(a) + c.$$

Por tanto

$$f(V) \subset]f(a) - c, \quad f(a) + c[.$$

Si f es semicontinua superiormente, la demostración es similar.

Un espacio topológico X se dice que es un espacio R–Blumberg (o que X tiene la propiedad de Blumberg respecto a R)[3], si para cada función f de X en R, existe un denso D de X de manera que la restricción $f|_D$ de f a D es continua. Entonces, toda función semicontinua definida en un espacio X R–Blumberg, es continua en un denso de X según el Teorema 1, y por el Teorema 1.6 de [2] se concluye que los espacios R–Blumberg son de Baire, y que X es de Baire si para cada función semicontinua f en X existe un denso D de X tal que $f|_D$ es continua.

3. REGULARIZADA DE FUNCIONES SEMICONTINUAS

Sea f una función con valores reales definida sobre un denso A de X. La función g, semicontinua inferiormente, definida en X y con valores en $\bar{R}$ tal que

$$g(x) = \lim\{i'_V : V \in \mathcal{E}(x), \subset\}$$

donde

$$i'_V = \inf\{f(y) : y \in V \cap A\}$$

se llama la regularizada inferior de f respecto A.

Si f es semicontinua inferiormente en A, entonces $f(x) = g(x)$ si $x \in A$ ([1], pág. 31).

Análogamente se considera la regularizada superior de f, que es semicontinua superiormente.

Proposición 1.

Consideremos definida en X la función semicontinua inferiormente f y la función semicontinua superiormente g. Si $f \leqslant g$ en un denso D de X, entonces $f(x) \leqslant g(x)$, para $x \in X$.

Demostración.

Puesto que $f - g$ es semicontinua inferiormente en X, entonces:

$$\{x \in X : \; g(x) < f(x)\} = (f - g)^{-1}(]0, \infty[)$$

es abierto de X disjunto con D, y por tanto vacío.

Corolario 1.

Sea f semicontinua inferiormente en X. Entonces, f es continua en X si y sólo si existe una función semicontinua superiormente g en X y un denso D de X, de manera que $f = g$, para $x \in D$, y $g(x) \leqslant f(x)$, para $x \in X$.

Proposición 2.

Sea f una función semicontinua inferiormente en X. Entonces f es continua en X si y sólo si existe un denso D de X tal que la regularizada superior g de f respecto D verifica

$$g(x) \leqslant f(x), \quad x \in X.$$

Demostración.

Sólo veremos el recíproco: Por definición de regularizada superior se tiene que

$$f(x) \leqslant g(x), \quad x \in D$$

y por tanto $f = g$ en D, y el resultado se obtiene del Corolario 1.

El Teorema siguiente extiende el conocido resultado de que si dos funciones continuas coinciden en un denso, son iguales.

Lema 1.

Sea f una función semicontinua inferiormente en X, y A un denso de X tal que f es continua en los puntos de $X - A$. Entonces, f es la regularizada inferior g de f respecto A

Demostración.

Es suficiente probar que f y g coinciden en $X - A$. Sea pues $x \in X - A$; entonces,

$$f(x) \leqslant \lim\{i'_V : V \in \pounds(x), \subset\} = g(x) \leqslant \lim\{S_V : V \in \pounds(x), \subset\} = f(x),$$

ya que f es continua en x, siendo

$$i'_V = \inf\{f(y) : y \in V \cap A\} \quad \text{y} \quad S_V = \sup\{f(y) : y \in V\}.$$

Teorema 2.

Sean f y h dos funciones semicontinuas en X. Supongamos que f y h coinciden en un denso A de X, y que f y h son continuas en los puntos de $X - A$. Entonces, $f = h$ (en X).

Demostración.

Distinguimos dos casos:

a) Si f y h son ambas semicontinuas inferiormente (o superiormente), el resultado se sigue del Lema 1.

b) Supongamos que f es semicontinua inferiormente y h semicontinua superiormente; entonces $f|_A = h|_A$ es continua en A, y por tanto f y h son continuas en los puntos de A según el Teorema 1. Así pues, f y h son continuas en X, y nos encontramos en las condiciones del apartado (a).

Corolario 2.

Sean A y B dos densos de X con $A \cup B = X$. Supongamos que $f|_A$ es una función semicontinua inferiormente en A y $f|_B$ superiormente en B. Si la regularizada inferior g de f respecto a A verifica $f(x) = g(x)$, $x \in B$, entonces f es la única extensión semicontinua de $f|_A$ a X, que es continua en cada punto de $X - A$.

Demostración.

Como $f|_A$ es semicontinua inferiormente en A, coincide con g en A, y por tanto $f = g$ en X; así pues f es semicontinua inferiormente en X, y además $f|_B$ es continua. Entonces, según el Teorema 1, f es continua en los puntos de B, y por tanto en los de $X - A$. Según el Teorema 2, si h es una extensión semicontinua de $f|_A$ a X continua en los puntos de $X - A$, entonces $h = f$.

4. EJEMPLOS DE REGULARIZADAS DE FUNCIONES SEMICONTINUAS

A continuación, con los resultados obtenidos, estudiaremos dos ejemplos; el primero de ellos, se encuentra en Bourbaki ([1], Ex.2, pág. 29).

4.1 Ejemplos:

a) Sea $f : R \to R$ la función definida por $f(x) = 0$ si x es irracional y $f(x) = 1/q$ si es la fracción irreducible p/q.

Se verifica ([1] pág. 29) que f es una función semicontinua superiormente en R. Además, puesto que f es constante en $R - Q$ (Q es el conjunto de los racionales), según el Teorema 1, es continua en los puntos de $R - Q$.

En consecuencia, por el Lema 1 (versión semicontinuidad superior), f es la regularizada superior de $f|_Q$ (respecto Q) y según el Teorema 2, es la única extensión semicontinua de $f|_Q$ a R, que es continua en $R - Q$.

b) Sea X un conjunto linealmente ordenado por una relación de orden transitiva, con la topología del orden, y supongamos que X es de Baire.

Sea $\{f_n : n \in N\}$ una sucesión de funciones semicontinuas inferiormente, crecientes en X tal que $|f_n(x)| < 1/2^n$, $x \in X$. Para cada $n \in N$ sea A_n el conjunto de puntos donde f_n no es continua. Por la Prop. 1.3. de [2], los conjuntos A_n son de primera categoría en X, para $n \in N$. Las funciones

$$S_m = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$$

son semicontinuas inferiormente para $m = 1, 2, \ldots$ Por el criterio de convergencia de Weierstrass, la serie $\sum f_n$ converge uniformemente a una función f que es continua en $X - \cup A_n$. Además como f es el supremo del conjunto $\{S_m : m \in N\}$, del Teorema 4, de [1] se concluye que f es semicontinua inferiormente en X.

La función f no es continua en los puntos de $\cup A_n$. En efecto: si $x \in A_n$ para algún $n \in N$, entonces la oscilación $w_n(x)$ de f_n en x es $w_n(x) > 0$; en consecuencia puesto que las funciones f_n, $n \in N$, son crecientes, la oscilación $w(x)$ de f en x es $w(x) > 0$.

Como X es de Baire, el conjunto $\cup A_n$ es de primera categoría en X y además $X - \cup A_n$ es denso en X.

Finalmente, si $\cup A_n$ es denso en X, del Lema 1, se concluye que f es la regularizada inferior de f respecto a $\cup A_n$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N.: Topologie Generale. Chapter IV. Hermann. París, 1971.

[2] FROLIK, Z.: Baire spaces and some generalizations of complete metric spaces. Czech. Math. J. (1961), 237–247.

[3] HAWORTH, R. C. AND MC. COY, R. A.: Dissertationes Mathematicae, CXLI. Baire spaces, Warszawa, 1977.

Valentín Gregori Gregori
E. U. de Informática
Dep. de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica
Apartado 22012
46071 Valencia

Pedro Grimalt Ivars
Facultad de Ciencias
Dep. de Matemáticas y Estadística
Universidad de Alicante
03690 San Vicente de Raspeig
Alicante