Conexiones en el fibrado de campos osculadores de orden dos que conservan el orden de osculación

POR FERNANDO ETAYO GORDEJUELA

Recibido: 8 noviembre 1989

Presentado por el académico numerario D. José J. Etayo

Abstract

The second order vector bundle of osculators fields over a real manifold M is the second order jet bundle from the manifold M to $\mathbb{R}$. We show that a connection on this vector bundle induces a linear connection on M and a linear connection on the vector bundle of symmetric (2, 0)-tensor fields on M if and only if the first connection preserves the osculation order (Pastore's connection). Moreover, we relate Pohl's definition of a linear connection with the lifts respect to good squares, a concept introduced in the thesis of the author.

1.– El *fibrado de campos osculadores de orden dos* sobre una variedad M, diferenciable real, de dimensión n, es el fibrado vectorial de los jets de orden dos de M en $\mathbb{R}$ cuyo término (o sumidero) es $0 \in \mathbb{R}$. Denotaremos dicho fibrado mediante

$$T_2M \, (= J^2 (M, \mathbb{R})_0) \longrightarrow \mathrm{M}$$

y emplearemos la notación reducida $T_2M \longrightarrow M$. El rango de este fibrado vectorial es

$$n + \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La siguiente sucesión de fibrados vectoriales sobre M es exacta:

$$0 \longrightarrow TM \longrightarrow T_2M \longrightarrow S_0^2(M) \longrightarrow 0 \qquad (1)$$

donde el último término representa el fibrado vectorial de los campos tensoriales simétricos de tipo (2, 0) sobre M.

Estas y otras propiedades básicas de este fibrado pueden hallarse en [5], [6], [7] especialmente para T_2M, y en [2], [4], [8], [9] para T_rM, con r arbitrario. Para todo lo referente a conexiones lineales en fibrados vectoriales, véase [1], [3], [10].

La inclusión canónica $TM \subseteq T_2M$ permitió dar a la profesora Pastore una definición de conexión, que conserva el orden de osculación, en T_2M·

Definición (ver [5], [6], [7]).– Una *conexión de Pastore (de orden dos)* en M es una conexión lineal ∇ en $T_2M \longrightarrow M$ tal que para cualesquiera X, $Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$ es $\nabla_X Y \in \mathcal{T}_0^1(M)$, donde $\mathcal{T}_0^1(M)$ es el módulo de campos vectoriales sobre M.

Trabajando en coordenadas locales, la sucesión (1) se expresa como

$$\begin{array}{lllll}
0 \longrightarrow TM & \longrightarrow T_2M & \longrightarrow S_0^2(M) \longrightarrow 0 \\
U^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow & U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow & U^n \times \mathbb{R}^m \\
(x^i, y^i) & \longrightarrow (x^i, y^i, 0) & \\
& (x^i, y^i, y^{(ij)}) & \longrightarrow (x^i, y^{(ij)})
\end{array}$$

donde los paréntesis (ij) indican que $i \leqslant j$, siendo

$$i, j \in \{1, ..., n\}, \qquad \text{y} \qquad m = \binom{n}{2}$$

Una conexión lineal en $T_2M \longrightarrow M$ viene dada por los símbolos locales

$$\nabla_{e_i} e_j = e_k \, \Gamma_{ij}^k + e_{(pq)} \, \Gamma_{ij}^{(pq)}$$

$$\nabla_{e_i} e_{(jk)} = e_k \, \Gamma_{i\,(jk)}^k + e_{(pq)} \, \Gamma_{i\,(jk)}^{(pq)}$$

donde representamos

$$e_i = \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad e_{(ij)} = \frac{\partial}{\partial y^{(ij)}}.$$

Pues bien, ∇ es una conexión de Pastore si y sólo si $\Gamma_{ij}^{(pq)} = 0$.

Además se tiene la siguiente

Proposición.– **1.** [6]. Cada conexión de Pastore induce una conexión lineal en M de símbolos Γ_{ij}^k y otra en $S_0^2(M) \longrightarrow M$ de símbolos $\Gamma_{i\,(jk)}^{(pq)}$.

En la proposición 2 de este trabajo probaremos que esta condición caracteriza las conexiones de Pastore.

2. En esta sección presentamos de modo adecuado a nuestro desarrollo posterior cuatro resultados de Pohl ([8], [9]) referentes a fibrados vectoriales y conexiones lineales, con el fin de aplicarlos en la sección 3 a la sucesión exacta (1).

Sea $E \longrightarrow M$ un fibrado vectorial de rango r. En [8], [9] se define un fibrado vectorial $\Delta_1(E) \longrightarrow M$, llamado *primer fibrado derivado* del dado, que verifica las siguientes propiedades:

a) $\Delta_1(E)$ es topológicamente equivalente a $E \oplus (TM \otimes E)$, con lo que es un fibrado vectorial sobre M de rango $r + nr$. De hecho, $\Delta_1(E)$ tiene como secciones las de $E \oplus (TM \otimes E)$ módulo las generadas por $\{-X(f) \bullet \Sigma \oplus (X \otimes f\Sigma - f X \otimes \Sigma)$, para $X \in \mathcal{T}_0^1(M)$, $f \in \mathcal{T}_0^0(M)$ y $\Sigma \in \Gamma(\Delta_1(E) \longrightarrow M)\}$.

b) La siguiente sucesión de fibrados vectoriales sobre M es exacta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow E & \xrightarrow{\ i\ } & \Delta_1(E) & \xrightarrow{\ p\ } & TM \otimes E \longrightarrow 0 \\
U^n \times \mathbb{R}^r & \longrightarrow & U^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{nr} & \longrightarrow & U^n \times \mathbb{R}^{nr} \\
(x^i, a^\alpha) & \longrightarrow & (x^i, a^\alpha, 0) & & \\
 & & (x^i, a^\alpha, y^{i\alpha}) & \longrightarrow & (x^i, y^{i\alpha})
\end{array} \tag{2}$$

donde $i \in \{1, ..., n\}$, $\alpha \in \{1, ..., r\}$.

c) Δ_1 es un funtor covariante y exacto, de modo que si

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\ \alpha\ } E_2 \xrightarrow{\ \beta\ } E_3 \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de fibrados vectoriales sobre M, el siguiente diagrama de fibrados vectoriales sobre M es conmutativo y está formado por filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\alpha"] & \Delta_1(E_1) \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\Delta_1(\alpha)"] & TM \otimes E_1 \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_2 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\beta"] & \Delta_1(E_2) \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\Delta_1(\beta)"] & TM \otimes E_2 \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \beta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_3 \arrow[r, "i_3"] \arrow[d] & \Delta_1(E_3) \arrow[r, "p_3"] \arrow[d] & TM \otimes E_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

d) Cada conexión lineal en $E \longrightarrow M$ viene definida por una escisión π de la sucesión (2) dada localmente por

$$\pi(x^i, a^\alpha, y^{i\alpha}) = (x^i, \ a^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta}\, y^{i\beta})$$

Esta última propiedad se basa en la definición del fibrado derivado del dado como cociente de $E \oplus (TM \otimes E)$. Está probada con detalle en [9].

3. El diagrama (3) correspondiente a la sucesión (1) es:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & TM \arrow[rr, shift left, "i_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] & & \Delta_1(TM) \arrow[ll, shift left, dashed, "\pi_1"] \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "\alpha_2"] & TM \otimes TM \arrow[d, "\alpha_3"] \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[r] & T_2M \arrow[rr, shift left, "i_2"] \arrow[d, "\beta_1"] & & \Delta_2(T_2M) \arrow[ll, shift left, dashed, "\pi_2"] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\beta_2"] & TM \otimes T_2M \arrow[d, "\beta_3"] \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[r] & S_0^2(M) \arrow[rr, shift left, "i_3"] \arrow[d] & & \Delta_1(S_0^2(M)) \arrow[ll, shift left, dashed, "\pi_3"] \arrow[r, "p_3"] \arrow[d] & TM \otimes S_0^2(M) \arrow[d] \arrow[rr] & & 0 \\
 & 0 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

donde denotamos $\Delta_1(\alpha_1)$ por α_2, $id \otimes \alpha_1$ por α_3 y análogamente para los símbolos que involucran β.

Una conexión lineal en el fibrado T_2M (resp. TM, $S_0^2(M)$) está dada por la escisión π_2 (resp. π_1, π_3).

Decimos que π_1 (resp. π_3) está *inducida* por π_2 si $\alpha_1 \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \alpha_2$ (resp. si $\beta_1 \circ \pi_2 = \pi_3 \circ \beta_2$). En esta sección nos preguntamos qué conexiones en $T_2M \longrightarrow M$ inducen conexiones en los otros dos fibrados mediante la anterior construcción. La respuesta está dada por la siguiente

Proposición 2.– Una conexión lineal en $T_2M \longrightarrow M$, definida por π_2, induce conexiones lineales definidas por π_1 y π_3 si y sólo si la conexión dada es una conexión de Pastore.

Demostración.– Expresemos en coordenadas locales el diagrama (4). Empecemos por las cartas locales de las variedades involucradas:

$$\begin{array}{llllll}
TM & : & U^n \times \mathbb{R}^n & : & (x^i, y^i) \\
\Delta_1(TM) & : & U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} & : & (x^i, y^i, y^{ij}) \\
TM \otimes TM & : & U^n \times \mathbb{R}^{n^2} & : & (x^i, y^{ij}) \\
T_2M & : & U^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & : & (x^i, y^i, y^{(ij)}) \\
S_0^2(M) & : & U^n \times \mathbb{R}^m & : & (x^i, y^{(ij)})
\end{array}$$

donde $m = \binom{n}{2}$, y, análogamente, las variedades que faltan. Entonces las expresiones locales de las aplicaciones son:

$$
\begin{array}{lcl}
i_1\,(x^i, y^i) = (x^i, y^i, 0) & ; & p_1\,(x^i, y^i, y^{ij}) = (x^i, y^{ij}) \\
i_2\,(x^i, y^i, y^{(ij)}) = (x^i, y^i, y^{(ij)}, 0, 0) & ; & p_2\,(x^i, y^i, y^{(ij)}, y^{ij}, y^{i\,(jk)}) = (x^i, y^{ij}, y^{i\,(jk)}) \\
i_3\,(x^i, y^{(ij)}) = (x^i, y^{(ij)}, 0) & ; & p_3\,(x^i, y^{(ij)}, y^{i\,(jk)}) = (x^i, y^{i\,(jk)}) \\
\alpha_1\,(x^i, y^i) = (x^i, y^i, 0) & ; & \beta_1\,(x^i, y^i, y^{(ij)}) = (x^i, y^{(ij)}) \\
\alpha_2\,(x^i, y^i, y^{ij}) = (x^i, y^i, 0, y^{ij}, 0) & ; & \beta_2\,(x^i, y^i, y^{(ij)}, y^{ij}, y^{i\,(jk)}) = (x^i, y^{(ij)}, y^{i\,(jk)}) \\
\alpha_3\,(x^i, y^{ij}) = (x^i, y^{ij}, 0) & ; & \beta_3\,(x^i, y^{ij}, y^{i\,(jk)}) = (x^i, y^{i\,(jk)})
\end{array}
$$

Las conexiones están dadas por las escisiones π_1, π_2 y π_3:

$$\pi_1\,(x^i, y^i, y^{ij}) = (x^i, \quad y^i + \Gamma^i_{jk}\, y^{jk})$$

$$\pi_2\,(x^i, y^i, y^{(ij)}, y^{ij}, y^{i\,(jk)}) =$$

$$= (x^i, \quad y^i + \overline{\Gamma}^i_{jk}\, y^{jk} + \overline{\Gamma}^i_{j\,(pq)}\, y^{j\,(pq)}, \quad y^{(ij)} + \overline{\Gamma}^{(ij)}_{pq}\, y^{pq} + \overline{\Gamma}^{(ij)}_{k\,(pq)}\, y^{k\,(pq)})$$

$$\pi_3\,(x^i, y^{(ij)}, y^{i\,(jk)}) = (x^i, \quad y^{(ij)} + \Gamma'^{(ij)}_{k\,(pq)}\, y^{k\,(pq)})$$

Entonces un cálculo directo muestra que

$$\alpha_1 \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \alpha_2 \quad \text{si y sólo si} \quad \overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} \quad \text{y} \quad \overline{\Gamma}^{(ij)}_{pq} = 0$$

$$\beta_1 \circ \pi_2 = \pi_3 \circ \beta_2 \quad \text{si y sólo sí} \quad \overline{\Gamma}^{(ij)}_{k\,(pq)} = \Gamma'^{(ij)}_{k\,(pq)} \quad \text{y} \quad \overline{\Gamma}^{(ij)}_{pq} = 0$$

con lo que hemos obtenido la condición deseada. ■

4. En [1], [2], [3] se estudia la elevación de conexiones respecto de lo que denominamos *buenos cuadrados de fibrados vectoriales*. Un caso particular de tal situación es el dado por un diagrama de fibrados de expresión local

$$
\begin{tikzcd}
\overline{E} \arrow[r, "\overline{\gamma}"] \arrow[d, "\alpha"'] & M \arrow[d, "id"] \\
E \arrow[r, "\gamma"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \arrow[r] \arrow[d] & U^n \arrow[d] \\
U^n \times \mathbb{R}^r \arrow[r] & U^n
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(x^i, a^\alpha, b^\lambda) \arrow[r] \arrow[d] & (x^i) \arrow[d] \\
(x^i, a^\alpha) \arrow[r] & (x^i)
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

Una conexión lineal $\bar{\Gamma}$ en $\bar{\gamma}$ define una descomposición $T\bar{E} = V\bar{E} \oplus H\bar{E}$, y, del mismo modo, una conexión Γ en γ define $TE = VE \oplus HE$. Decimos que $\bar{\Gamma}$ es elevación de Γ respecto de (5) si $\alpha_*(V\bar{E}) = VE$ y $\alpha_*(H\bar{E}) = HE$. Se tiene entonces el siguiente resultado:

Proposición 3.– [1], [2], [3]. Si los símbolos locales de $\bar{\Gamma}$ y Γ son

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{j\beta}, \quad \bar{\Gamma}^{\alpha}_{j\mu}, \quad \bar{\Gamma}^{\lambda}_{j\beta}, \quad \bar{\Gamma}^{\lambda}_{j\mu} \quad \text{y} \quad \Gamma^{\alpha}_{j\beta}$$

entonces $\bar{\Gamma}$ es elevación de Γ respecto de (5) si y sólo si

$$\bar{\Gamma}^{\alpha}_{j\beta} = \Gamma^{\alpha}_{j\beta} \qquad \text{y} \qquad \bar{\Gamma}^{\alpha}_{j\mu} = 0.$$

Sean $\bar{\pi}$ y π las escisiones definidas por las conexiones $\bar{\Gamma}$ y Γ, y consideremos el correspondiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bar{E} \arrow[r, shift left, "\bar{i}"] \arrow[d, "\alpha"] & \Delta_1(\bar{E}) \arrow[l, shift left, "\bar{\pi}"] \arrow[r, "\bar{p}"] \arrow[d, "\Delta_1(\alpha)"] & TM \otimes \bar{E} \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, shift left, "i"] & \Delta_1(E) \arrow[l, shift left, "\pi"] \arrow[r, "p"] & TM \otimes E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces obtenemos:

Proposición 4.– En las condiciones anteriores, $\bar{\Gamma}$ es elevación de Γ respecto del buen cuadrado (5) si y sólo si $\alpha \circ \bar{\pi} = \pi \circ \Delta_1(\alpha)$.

Demostración.– Un cálculo sencillo, a partir de las expresiones locales de las aplicaciones, muestra la equivalencia entre la igualdad buscada y las condiciones locales de la proposición precedente.

■

Ejemplos

a) Una conexión de Pastore es elevación de la inducida en $S^2_0(M) \longrightarrow M$ respecto del buen cuadrado

$$\begin{tikzcd}
T_2M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
S^2_0(M) \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

b) Una conexión de Pastore es elevación de la conexión lineal inducida en M respecto de

$$\begin{tikzcd}
T_2M \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
TM \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

si y sólo si $\Gamma^{k}_{i\,(jk)} = \dot{0}$.

Estos dos resultados se obtienen en [2] empleando para su demostración la proposición 3. Apelando a las proposiciones 2 y 4 su demostración es ahora inmediata.

5. La definición de Pastore de conexión de orden dos se generaliza al fibrado vectorial $T_rM \longrightarrow M$ del siguiente modo [5]:

Una *conexión de Pastore de orden* r en M es una conexión lineal en $T_rM \longrightarrow M$ tal que para todo $s \in \{1, ..., r\}$ y cualesquiera $X \in \mathscr{T}_0^1\,(M)$, $\Sigma \in \Gamma\,(T_sM \longrightarrow M)$, se tiene que $\nabla_X \Sigma \in \Gamma\,(T_sM \longrightarrow M)$.

Cada conexión de orden r induce por restricción una de orden s, para cada $s \in \{1, ..., r\}$. Entonces, razonando como en la proposición 2, obtenemos:

Proposición 5.– Con las notaciones precedentes, al considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & T_sM \arrow[rr, shift left, "i_s"] \arrow[d, "\alpha"] & & \Delta_1\,(T_sM) \arrow[ll, shift left, "\pi_s"] \arrow[r, "p_s"] \arrow[d, "\Delta_1\,(\alpha)"] & TM \otimes T_sM \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_rM \arrow[rr, shift left, "i_r"] & & \Delta_1\,(T_rM) \arrow[ll, shift left, "\pi_r"] \arrow[r, "p_r"] & TM \otimes T_rM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

siendo π_r la conexión dada y π_s su restricción, resulta que

$$\alpha \circ \pi_s = \pi_r \circ \Delta_1\,(\alpha)$$

si y sólo si los símbolos de iguales índices de ambas conexiones coinciden y los siguientes símbolos de π_r se anulan:

$$\Gamma^{(j_1, \ldots, j_s, j_{s+1})}_{ik} = \ldots = \Gamma^{(j_1, \ldots, j_s, j_{s+1})}_{i\,(k_1, \ldots, k_s)} = 0\,,$$

$$\Gamma^{(j_1, \ldots, j_s, j_{s+1}, \ldots, j_r)}_{ik} = \ldots = \Gamma^{(j_1, \ldots, j_s, j_{s+1}, \ldots, j_r)}_{i\,(k_1, \ldots, k_s)} = 0$$

■

BIBLIOGRAFIA

[1] ETAYO, F.: *Estudio de conexiones en fibrados vectoriales.* Tesis Doctoral. Universidad Complutense. Madrid, 1989.

[2] ETAYO, F.: *Las conexiones de orden superior.* Aparecerá en las Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid.

[3] ETAYO, F.: *The Geometry of Good Squares of Vector Bundles.*

[4] FELDMAN, E. A.: "The Geometry of Immersions I". *Trans. Amer. Math. Soc.* **120** (1965) 185-224.

[5] PASTORE, A. M.: "Connessioni per campi vettoriali 2-osculatori". *Rend. Acad. Naz del XL* (4) **22/23** (1971/72) 135-148.

[6] PASTORE, A. M.: "Connessioni sul fibrato principale dei riferimenti 2-osculatori di una varietà differenciabile". *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) **29** (1980) 369-410.

[7] PASTORE, A. M.: "Sulle geodetiche rispetto ad una connessione per campi vettoriali osculatori". *Rend. di Mat.* (7) **1** (1981) 177-190.

[8] POHL, W. F.: "Differential Geometry of Higher Order". *Topology* **1** (1962) 169-211.

[9] POHL, W. F.: "Connexions in Differential Geometry of Higher Order". *Trans. Amer. Math. Soc.* **125** (1966) 310-325.

[10] POOR, W. A.: *Differential Geometric Structures.* McGraw Hill, N. York, 1981.

Departamento de Geometría y Topología
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense
28040 MADRID (SPAIN)