Resoluciones proyectivas del operador identidad y bases de Markushevich en ciertos espacios de Banach

POR M. VALDIVIA

Recibido: 22 octubre 1989

Académico numerario

Abstract

In this paper the existence of bases of Markushevich and projective resolutions of the identity operator on certain Banach spaces in shown.

Los espacios vectoriales que utilizamos aquí están definidos sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales. Denotamos por Q el cuerpo de los números racionales. $\aleph_0$ es el primer número cardinal infinito. $\aleph_1$ es el primer número cardinal mayor que $\aleph_0$.

Si A es un conjunto, $|A|$ es su número cardinal. Representamos por $|\alpha|$ el número cardinal de un número ordinal α. ω es el primer ordinal infinito. ω_1 es el primer ordinal infinito no numerable.

Si X es un espacio de Banach, X^* es un conjugado. Si Y es un subespacio vectorial de X^*, ponemos $\sigma(X, Y)$ para la topología sobre X de la convergencia sobre cada subconjunto finito de Y. Si A es un subconjunto de X^*, A_σ, y también $(A)_\sigma$, es dicho subconjunto dotado de la topología inducida por la débil-estrella de X^*; $A_\perp$ es el subespacio de X orthogonal a A; lin A es la envoltura lineal de A. Si x es un elemento de X y u pertenece a X^*, $\langle x, u\rangle$ significa el valor que toma u en el punto x. Si T es un operador lineal y continuo en X, T^* es un conjugado y $\ker T$ es el núcleo de T. B_X es la bola unidad cerrada de X. Identificamos X, como es habitual, con un subespacio de su segundo conjungado X^{**} mediante la inyección cónica. Si M es un subconjunto de X, $M^\perp$ es el subespacio de X^* orthogonal a M y $[M]$ es la envoltura lineal cerrada de M; lin M es la envoltura lineal de M; $S(M)$ es el conjunto formado por todos los elementos u de X^* tales que

$$\{x \in M: \langle x, u\rangle \neq 0\}$$

es numerable.

Representamos por $\|.\|$ la norma de cualquier espacio de Banach X. Se dice que X es un espacio de Asplund si cada subespacio separable de X tiene un espacio conjugado separable.

El carácter de densidad de un espacio topológico E es el primer número cardinal λ tal que existe un subconjunto denso A de E de manera que $|A| = \lambda$. Escribimos entonces $\lambda = \text{dens}\, E$.

Una base de Markushevich en un espacio de Banach X es un sistema biortogonal

$$(x_i, u_i)_{i \in I}, \qquad x_i \in X, \qquad u_i \in X^*, \qquad i \in I,$$

de manera que

$$X = [\{x_i\colon\ i \in I\}]$$

y la envoltura lineal de $\{u_i\colon\ i \in I\}$ es densa en X_σ^*. Diremos con Plicko, [3], que $(x_i, u_i)_{i \in I}$ es numerablemente 1-normante si el conjunto de los elementos u de B_{X^*} tales que

$$\{i \in I\colon\ \langle x_i, u\rangle \neq 0\}$$

es numerable es débil-estrella denso en B_{X^*}.

Una resolución proyectiva del operador identidad en un espacio de Banach X, o bien una resolución de la identidad en X, es una familia

$$\{P_\alpha\colon\ \omega \leqslant \alpha \leqslant \mu\} \tag{1}$$

de proyecciones continuas en X, siendo μ el primer número ordinal de den X, de manera que P_μ es el operador identidad en X,

$$\|P_\alpha\| = 1, \qquad \text{dens}\, P_\alpha(X) \leqslant |\alpha|,$$

$$P_\alpha \circ P_\beta = P_\beta = P_\beta \circ P_\alpha, \qquad \omega \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \mu,$$

y si α es un número ordinal límite, la clausura de

$$\bigcup \{P_\beta(X)\colon\ \omega \leqslant \beta < \alpha\}$$

en X coincide con $P_\alpha(X)$. Una base de Markushevich $(x_i, u_i)_{i \in I}$ diremos que está asociada a la resolución de la identidad (1) si existe una partición de I,

$$I_\omega, \qquad I_{\alpha+1}, \qquad \omega \leqslant \alpha < \mu,$$

de manera que

$$(x_i,\ u_i \mid P_\omega(X))_{i \in I_\omega}$$

es una base de Markushevich en $P_\omega(X)$ y

$$(x_i, u_i \mid (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X))_{i \in I_{\alpha+1}}$$

es una base de Markushevich en $(P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X)$, $\omega \leqslant \alpha < \mu$.

Si K es un espacio topológico compacto, $C(K)$ es el espacio de Banach de las funciones reales y continuas f, definidas en K, con la norma:

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|:\ x \in K\}$$

Dado un conjunto Γ, representamos por $\Sigma(\Gamma)$ el subespacio topológico de $\mathbb{R}^\Gamma$ formado por todos aquellos puntos $(x_\gamma:\ \gamma \in \Gamma)$ tales que

$$\{\gamma \in \Gamma:\ x_\gamma \neq 0\}$$

es numerable. Si K es un compacto de $\mathbb{R}^\Gamma$, ponemos

$$A(K) := K \cap \Sigma(\Gamma)$$

Lema 1.– Sea M un subconjunto de un espacio de Banach X tal que $[M] = X$ y $S(M) \cap B_{X^*}$ sea débil-estrella denso en B_X. Sean A_0 y B_0 dos subconjuntos infinitos de X y $S(M)$, respectivamente. Si λ es un número cardinal tal que $|A_0| \leqslant \lambda$ y $|B_0| \leqslant \lambda$, existen una proyección continua T en X y un subconjunto M_1 de M que cumplen las siguientes condiciones:

a) $\|T\| = 1, \quad T(X) \supset A_0, \quad \text{dens}\, T(X) \leqslant \lambda.$

b) $T^*(X^*) \supset B_0.$

c) $M_1 \subset T(X)$ y $M \setminus M_1 \subset \ker T.$

Demostración.– Para cada x de X, elegimos un elemento $u(x)$ en $S(M)$ tal que

$$\|u(x)\| = 1, \qquad \langle x, u(x)\rangle = \|x\|.$$

Procedemos por recurrencia y suponemos que, para un entero no negativo n, hemos determinado $A_n \subset X$ y $B_n \subset S(M)$, con $|A_n| \leqslant \lambda$ y $|B_n| \leqslant \lambda$. Sean C_n y D_n las envolturas lineales sobre Q de A_n y B_n, respectivamente. Escribimos

$$A_{n+1} := C_n \bigcup \{x \in M:\ \langle x, u\rangle \neq 0,\ \ u \in D_n\}$$

$$B_{n+1} := D_n \bigcup \{u(x):\ x \in C_n\}.$$

Ponemos E y F para las clausuras de

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$$

en X y X_σ^*, respectivamente. Puesto que $A_{n+1} \supset C_n$ y $B_{n+1} \supset D_n$, resulta que E y F son espacios vectoriales.

Dados x en E, z en $F_\perp$ y $\varepsilon > 0$, hallamos un entero positivo n y un vector t en A_n de manera que $\|x-t\| < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x\| &\leqslant \|x-t\| + \|t\| < \varepsilon + \langle t,\ u(t)\rangle = \varepsilon + \langle t+z,\ u(t)\rangle \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + |\langle t-x,\ u(t)\rangle| + |\langle x+z,\ u(t)\rangle| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + \|t-x\| + \|x+x\| < 2\varepsilon + \|x+z\|\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\|x\| \leqslant \|x+z\|,$$

de donde se deduce que $E \cap F_\perp = \{0\}$ y que la proyección en $E+F_\perp$ sobre E, a lo largo de $F_\perp$, tiene norma igual a uno.

Tomemos ahora un elemento w en $E^\perp \cap F$. Supongamos que $w \neq 0$. Hallamos un x en M tal que $\langle x, w\rangle \neq 0$. Entonces existen un entero positivo n y un vector v en B_n de manera que $\langle x, v\rangle \neq 0$. Consecuentemente, x pertenece a A_{n+1} y así $\langle x, w\rangle \neq 0$, lo cual es una contradicción. Luego $E^\perp \cap F = \{0\}$ y, por tanto, $E+F_\perp = X$.

Es inmediato que T cumple las condiciones a) y b).

Sea M_1 el subconjunto de M cuyos elementos están en $T(X)$. Si x pertenece a $M \setminus M_1$, se deduce de la construcción que hemos hecho antes que x pertenece a $\ker T$ y, en consecuencia, se cumple la condición c).

q.e.d.

Teorema 1.– Sea M un subconjunto de un espacio de Banach X tal que $[M]=X$ y $S(M) \cap B_{X^*}$ sea débil-estrella denso en B_{X^*}. Si μ es el primer número ordinal de dens X, existen una resolución de la identidad

$$\{P_\alpha\colon \omega \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$$

en X y una partición de M,

$$M_\omega, \qquad M_{\alpha+1}, \qquad \omega \leqslant \alpha < \mu,$$

de manera que

$$M_\omega \subset P_\omega(X), \qquad M_{\alpha+1} \subset (P_{\alpha+1} - P_\alpha)(X), \qquad \omega \leqslant \alpha < \mu.$$

Demostración.– Si dens $X = \aleph_0$, ponemos P_ω para el operador identidad en X, y la conclusión es obvia. Supongamos ahora que den $X > \aleph_0$. Podemos escribir M en la forma $\{x_\upsilon\colon \upsilon < \mu\}$. Determinamos una proyección T en X que cumpla las condiciones a), b) y c) del lema anterior con

$$A_0 = \{x_\upsilon\colon \upsilon < \omega\}$$

y B_0 un subconjunto infinito numerable que tomamos en $S(M)$. Denotamos por P_ω el operador T y por R_ω el subconjunto de M formado por todos aquellos elementos contenidos en $P_\omega(X)$. Procedemos por inducción transfinita. Tomamos $\omega < \alpha \leqslant \mu$ y suponemos que las proyecciones

$$\{P_\beta\colon \omega \leqslant \beta < \alpha\}$$

han sido definidas en X de manera que

$$\|P_\beta\| = 1, \qquad \operatorname{dens} P_\beta(X) \leqslant |\beta|, \qquad \{x_\upsilon\colon \upsilon < \beta\} \subset P_\beta(X),$$

$$P_\eta \circ P_\zeta = P_\eta = P_\zeta \circ P_\eta, \qquad \omega \leqslant \eta \leqslant \zeta < \alpha,$$

y si R_β es el subconjunto de todos los elementos de M que pertenecen a $P_\beta(X)$, entonces

$$M \setminus R_\beta \subset \ker P_\beta.$$

Si α no es un número ordinal límite, ponemos $\gamma\colon = \alpha - 1$. Si u es un vector cualquiera de $S(M) \cap B_{X^*}$, es inmediato que $P_\gamma^*(u)$ pertenece a este último conjunto y, por tanto,

$$P_\gamma^*(X^*) \cap S(M) \cap B_{X^*}$$

es débil-estrella denso en $P_\gamma^*(X^*) \cap B_{X^*}$. Tomamos dos subconjuntos densos A_γ y B_γ en $P_\gamma(X)$ y $(S(M) \cap P_\gamma^*(X^*))_\sigma$, respectivamente, con $|A_\gamma| \leqslant$ $\leqslant |\gamma|$ y $|B_\gamma| \leqslant |\gamma|$. Tomamos un subconjunto C_γ en X que contiene a

$$A_\gamma \cup \{x_\upsilon\colon \upsilon < \alpha\},$$

no está contenido en $P_\gamma(X)$ y $|C_\gamma| \leqslant |\gamma|$. Aplicamos el lema anterior para

$$A_0 = C_\gamma, \qquad |\lambda| = |\alpha|, \qquad B_0 = B_\gamma,$$

y obtenemos una proyección T en X que verifica a), b) y c). Denotamos dicho operador T por P_α y ponemos R_α para el subconjunto formado por todos los elementos de M que pertenecen a $P_\alpha(X)$. Entonces

$$\|P_\alpha\| = 1, \qquad \operatorname{dens} P_\alpha(X) \leqslant |\alpha|, \qquad \{x_\upsilon\colon \upsilon < \alpha\} \subset P_\alpha(X),$$

$$P_\eta \circ P_\zeta = P_\eta = P_\xi \circ P_\eta, \qquad \omega \leqslant \eta \leqslant \zeta \leqslant \alpha, \qquad M \setminus R_\alpha \subset \ker P_\alpha.$$

Si α es un número ordinal límite, ponemos

$$E\colon = \bigcup \{P_\beta(X)\colon \omega \leqslant \beta < \alpha\}$$

$$F\colon = \bigcap \{P_\beta^{-1}(0)\colon \omega \leqslant \beta < \alpha\}$$

Si u está en B_{X^*}, la red

$$\{P_\beta^*(u)\colon \omega \leqslant \beta < \alpha\}$$

está en $F^\perp \cap B_{X^*}$ y tiene un punto v dévil-estrella adherente en $F^\perp \cap B_{X^*}$. Puesto que

$$u - P_\beta^*(u) \in P_\beta(X)^\perp, \qquad \omega \leqslant \beta < \alpha,$$

resulta que

$$u - v \in \cap \{P_\beta(X)^\perp \colon \omega \leqslant \beta < \alpha\} = E^\perp,$$

de aquí que $E^\perp + F^\perp = X^*$ y, por tanto, si $\bar{E}$ es la clausura de E en X, $\bar{E} \cap F = \{0\}$. Supongamos ahora que existe un elemento w en $F^\perp \cap E^\perp$ distinto de cero. Hallamos un vector z en M tal que $\langle z, w\rangle \neq 0$. Puesto que $F^\perp$ coincide con la clausura débil-estrella de

$$\bigcup \{P_\beta^*(X^*) \colon \omega \leqslant \beta < \alpha\}$$

existe un ordinal β_1, $\omega \leqslant \beta_1 < \alpha$, y un elemento x_1 en $P_{\beta_1}^*(X^*)$ de manera que $\langle z, w_1\rangle \neq 0$. Entonces z pertenece a $P_{\beta_1}(X)$ y, por tanto, $\langle z, w\rangle = = 0$, lo cual es una contradicción. Luego $E^\perp \cap F^\perp = \{0\}$ y, en consecuencia, $\bar{E} + R = X$. Ponemos P_α para la proyección de X sobre $\bar{E}$ a lo largo de F y R_α para el conjunto de todos los elementos de M que pertenecen a $P_\alpha(X)$. Entonces

$$\|P_\alpha\| = 1, \qquad \text{dens}\, P_\alpha(X) \leqslant |\alpha|, \qquad \{x_\upsilon \colon \upsilon < \alpha\} \subset P_\alpha(X),$$

$$P_\beta \circ P_\zeta = P_\eta = P_\xi \circ P_\eta, \qquad \omega \leqslant \eta \leqslant \zeta \leqslant \alpha,$$

$$M \setminus R_\alpha \subset \ker P_\alpha.$$

Es inmediato ahora que

$$\{P_\alpha \colon \omega \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$$

Es una resolución de la identidad en X de manera que

$$R_\alpha \subset P_\alpha(X), \qquad M \setminus R_\alpha \subset \ker P_\alpha.$$

Si ponemos

$$R_\omega = M_\omega, \qquad R_{\alpha+1} \setminus R_\alpha = M_{\alpha+1}, \qquad \omega \leqslant \alpha < \mu,$$

la conclusión se sigue.

c.q.d.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata de un teorema de Zizler, [4.Th.1]:

a) Sea $\mathscr{B}$ una clase de espacios de Banach que cumplen las siguientes condiciones: 1) Cada espacio de Banach separable pertenece a $\mathscr{B}$. 2) Si X pertenece a $\mathscr{B}$ y μ es el primer número ordinal de dens X, X admite una resolución de la identidad

$$\{P_\alpha \colon \omega \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$$

de manera que $P_\alpha(X)$ pertenece a $\mathscr{B}$, $\omega \leqslant \alpha < \mu$. Entonces cada espacio de Banach perteneciente a $\mathscr{B}$ admite una norma equivalente local, uniformemente rotunda.

Corolario 1.1.– Sea Y un espacio de Banach que tiene un subconjunto P tal que $[P] = Y$ y $S(P) \cap B_{Y^*}$ sea débil-estrella denso en B_{Y^*}. Entonces Y admite una norma equivalente local, uniformemente rotunda.

Demostración.– Sea $\mathscr{B}$ clase de todos los espacios de Banach Z con un subconjunto D tal que $[D] = Z$ y $S(D) \cap B_{Z^*}$ sea débil-estrella denso en B_{Z^*}. Obviamente, todos los espacios de Banach separables pertenecen a $\mathscr{B}$. Por otra parte, si X está en $\mathscr{B}$ y M es un subconjunto de X tal que $[M] = X$ y $S(M) \cap B_{X^*}$ es débil-estrella denso en B_{X^*}, aplicamos el Teorema 1 y obtenemos una resolución de la identidad en X con las características enunciadas en dicho teorema. Entonces es inmediato que

$$P_\alpha(X) \in \mathscr{B}, \qquad \omega \leqslant \alpha < \mu,$$

y, por tanto, $\mathscr{B}$ cumple las condiciones que se requieren para aplicar el resultado a) y alcanzar la conclusión.

c.q.d.

Nota: Como consecuencia del Teorema 1, se obtiene un resultado de Plicko, [3], que afirma que si X es un espacio de Banach que tiene una base de Markushevich $(x_i, u_i)_{i \in I}$ numerablemente 1-normante, y μ es el primer número ordinal de dens X, entonces existe una resolución de la identidad

$$\{P_\alpha\colon \omega \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$$

en X de manera que, para cada número ordinal α con $\omega \leqslant \alpha \leqslant \mu$, se puede obtener un subconjunto I_α de I tal que

$$\{x_i\colon i \in I_\alpha\} \subset P_\alpha(X), \qquad \{x_i\colon i \subset I \setminus I_\alpha\} \subset \ker P_\alpha.$$

Teorema 2.– Sea X un espacio de Banach que tiene un subconjunto M tal que $[M] = X$ y $S(M) \cap B_{X^*}$ sea débil-estrella denso en B_{X^*}. Si μ es el primer número ordinal de dens X, existen una resolución de la identidad

$$\{P_\alpha\colon \omega \leqslant \alpha \leqslant \mu\}$$

en X y una base de Markushevich $(x_i, u_i)_{i \in I}$ asociada a ella de manera que

$$\text{lin}\{x_i\colon i \in I\} = \text{lin}\, M \qquad \text{y} \qquad S(\{x_i\colon i \in I\}) = S(M).$$

Demostración.– Razonamos sobre el carácter de densidad de X. Si X es separable la prueba del teorema no ofrece dificultad (véase [2, p. 16 y pp. 43-44]). Tomemos ahora un número cardinal $\alpha > \aleph_0$ y supongamos que siempre que $\operatorname{dens} X < \alpha$ el teorema es cierto. Elegimos ahora un espacio de Banach X tal que $\alpha = \operatorname{dens} X$ y que cumple las condiciones impuestas en el teorema. Sea

$$\{P_\lambda: \alpha \leqslant \lambda \leqslant \mu\}$$

una resolución de la identidad en X y sea

$$M_\omega, \qquad M_{\lambda+1}, \qquad \omega \leqslant \lambda < \mu,$$

una partición de M de manera que

$$M_\omega \subset P_\omega(X), \qquad M_{\lambda+1} \subset (P_{\lambda+1} - P_\lambda)(X), \qquad \omega \leqslant \lambda < \mu.$$

Construimos un sistema biortogonal $(x_i, u_i)_{i \in I_\omega}$ de tal forma que

$$\operatorname{lin}\{x_i: i \in I_\omega) = \operatorname{lin} M_\omega = \operatorname{lin}(M \cap P_\omega(X)),$$

y $\operatorname{lin}\{u_i: i \in I_\omega\}$ sea un subespacio débil-estrella denso de $P_\omega^*(X^*)$. Entonces

$$\{u \in P_\omega^*(X^*): \{i \in I_\omega: \langle x_i, u\rangle \neq 0\} \text{ es numerable}\} =$$
$$= S(M) \bigcap P_\omega^*(X^*) = P_\omega^*(X^*).$$

Procedemos por inducción transfinita. Sea λ un número ordinal con $\omega < \lambda \leqslant \mu$. Supongamos que hemos construido en X los sistemas biortogonales

$$(x_i, u_i)_{i \in I_\beta}, \qquad \omega \leqslant \beta < \lambda,$$

de manera que

$$\operatorname{lin}\{x_i: i \in I_\beta\} = \operatorname{lin}(M \cap P_\beta(X)),$$

$\operatorname{lin}\{u_i: i \in I_\beta\}$ sea un espacio débil-estrella denso de $P_\beta^*(X^*)$ y

$$\{u \in P_\beta^*(X^*): \{i \in I_\beta: \langle x_i, u\rangle \neq 0\} \text{ es numerable}\} = S(M) \cap P_\beta^*(X^*).$$

Además, si

$$\omega \leqslant \eta \leqslant \xi < \lambda$$

$(x_i, u_i)_{i \in I_\xi}$ es una extensión de $(x_i, u_i)_{i \in I_\eta}$.

Si λ no es un ordinal límite, ponemos $\gamma := \lambda - 1$. Se tiene que

$$U := S(M) \cap P_\lambda^*(X^*) \cap B_{X^*}$$

es débil-estrella denso en

$$V := P_\lambda^*(X^*) \cap B_{X^*}$$

Si T es la proyección en $P_\lambda^*(X^*)$ sobre $(P_\lambda^* - P_\gamma^*)(X^*)$ a lo largo de $P_\gamma^*(X^*)$, ponemos

$$W: = T(V).$$

El espacio de Banach

$$E: = (P_\lambda - P_\gamma)(X)$$

tiene como conjugado un espacio de Banach F, que podemos identificar con $(P_\lambda^* - P_\gamma^*)(X^*)$ siendo W la bola unidad cerrada. Es inmediato que $S(M) \cap F$ coincide con

$$\{u \in F: \{x \in M_{\gamma+1}: \langle x, u\rangle \neq 0\} \text{ es numerable}\}.$$

Por otra parte, $T(U)$ pertenece a $S(M)$ y es débil-estrella denso en W. Teniendo en cuenta que

$$\operatorname{dens} E < |\mu|,$$

podemos hallar un sistema biortogonal $(x_i, u_i)_{i \in I_\lambda}$ en X de manera que

$$\operatorname{lin}\{x_i: i \in J_\lambda\} = \operatorname{lin} M_{\gamma+1},$$

$\operatorname{lin}\{u_i: i \in J_\lambda\}$ un subespacio débil-estrella denso de F y

$$\{u \in F: \{i \in J_\lambda: \langle x_i, u\rangle \neq 0\} \text{ es numerable}\} = S(M) \cap F.$$

Si ponemos $I_\lambda = I_\gamma \bigcup J_\lambda$, se tiene que $(x_i, u_i)_{i \in I_\lambda}$ es un sistema biortogonal en X tal que

$$\operatorname{lin}\{x_i: i \in I_\lambda\} = \operatorname{lin}(M \cap P_\lambda(X)),$$

$\operatorname{lin}\{u_i: i \in I_\lambda\}$ es un subespacio débil-estrella denso de $P_\lambda^*(X^*)$ y

$$\{u \in P_\lambda^*(X^*): \{i \in I_\lambda: \langle x_i, u\rangle \neq 0\} \text{ es numerable}\} = S(M) \cap P_\lambda^*(X^*).$$

Además, si

$$\omega \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant \lambda,$$

$(x_i, u_i)_{i \in I_\xi}$ es una extensión de $(x_i, u_i)_{i \in I_\eta}$.

Si λ es un número ordinal límite, ponemos

$$I_\lambda: = \bigcup \{I_\beta: \omega \leqslant \beta < \lambda\}.$$

Entonces

$$\operatorname{lin}\{x_i: i \in I_\lambda\} = \operatorname{lin}(M \cap P_\lambda(X)),$$

$\operatorname{lin}\{u_i: i \in I_\lambda\}$ es débil-estrella denso en $P_\lambda^*(X^*)$ y

$$\{u \in P_\lambda^*(X^*) \colon \{i \in I_\lambda \colon \langle x_i, u\rangle \neq 0\} \text{ es numerable}\} = S(M) \cap P_\lambda^*(X^*).$$

Además, si

$$\omega \leqslant \eta \leqslant \xi \leqslant \lambda,$$

$(x_i, u_i)_{i \in I_\xi}$ es una extensión de $(x_i, u_i)_{i \in I_\eta}$.

Finalmente, si escribimos

$$I := \bigcup \{I_\lambda \colon \omega \leqslant \lambda < \mu\},$$

$(x_i, u_i)_{i \in I}$ es una base de Markushevich en X que responde al enunciado del teorema.

c.q.d.

Corolario 1.2.– Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^\Gamma$ de manera que $A(K)$ es denso en K. Si μ es el primer ordinal de dens $C(K)$, existe una resolución de la identidad

$$\{P_\alpha \colon \omega \leqslant \lambda < \mu\}$$

en $C(K)$ y una base de Markushevich $(f_i, u_i)_{i \in I}$ asociada a ella de manera que

$$A(K) = \{x \in K \colon \{i \in I \colon f_i(x) \neq 0\} \text{ es numerable}\}.$$

Demostración.– Sea $\{e_\gamma \colon \gamma \in \Gamma\}$ el conjunto de las funciones coordenadas de $\mathbb{R}^\Gamma$. Para cada γ de Γ, sea d_γ la restricción de e_γ a K. Sea

$$\{g_i \colon i \in I\} \tag{2}$$

el conjunto formado por la función que toma el valor uno en cada punto de K y las funciones que se representan como un producto finito de elementos de la forma d_γ. La envoltura lineal de (2) es un álgebra que separa los puntos de K y contiene a las constantes. Por tanto,

$$[\{g_i \colon i \in I\}] = C(K).$$

Identificamos, en la forma usual, K con un subconjunto de $C(K)^*$. Es inmediato que el conjunto $A(K)$ coincide con el subconjunto de K formado por aquellos elementos x tales que

$$\{i \in I \colon \langle g_i, x\rangle \neq 0\}$$

es numerable. Por otra parte, la bola unidad cerrada B de $C(K)^*$ coincide con la envoltura absolutamente convexa y débil-estrella cerrada de K. Por tanto,

$$S(\{g_i \colon i \in I\}) \cap B$$

es débil-estrella denso en B. Se aplica el Teorema 2 y se obtiene una resolución de la identidad

$$\{P_\alpha:\ \omega \leqslant \lambda \leqslant \mu\}$$

en $C(K)$ y una base de Markushevich $(f_i, u_i)_{i\in I}$ asociada a ella de manera que

$$S(\{f_i:\ i\in I\} = S(\{g_i:\ i\in I\}).$$

Entonces

$$A(K) = \{x\in K:\ \{i\in I:\ f_i(x)\neq 0\} \text{ es numerable}\}.$$

c.q.d.

Lema 2.– Si X es un espacio de Asplund tal que dens $X \leqslant \aleph_1$, existe una base de Markushevich $(v_i, w_i)_{i\in I}$ en X^* de manera que, para cada x de X,

$$|\{i\in I:\ \langle v_i, x\rangle \neq 0\}| \leqslant \aleph_0.$$

Demostración.– Por un resultado de Fabian y Godefroy, [1] existe una resolución de la identidad

$$\{Q_\alpha:\ \omega \leqslant \alpha \leqslant \omega_1\}$$

en X^* de manera que ker Q_α es débil-estrella cerrado.

Puesto que $Q_\omega(X^*)$ es separable, podemos hallar un sistema biortogonal $(v_i, w_i)_{i\in I_\omega}$ en X^* de manera que

$$[\{v_i:\ i\in I_\omega\}] = Q_\omega(X^*)$$

y lin $\{w_i:\ i\in I_\omega\}$ sea un subconjunto débil-estrella denso de $Q_\alpha^*(X^{**})$. Dado un ordinal cualquiera α, $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$, se tiene que $(Q_{\alpha+1} - Q_\alpha)(X^*)$ es separable y, por tanto, podemos hallar un sistema biortogonal $(v_i, w_i)_{i\in I_{\alpha+1}}$ en X^* tal que

$$[\{v_i:\ i\in I_\alpha\}] = (Q_{\alpha+1} - Q_\alpha)(X^*)$$

y lin $\{w_i:\ i\in I_{\alpha+1}\}$ sea un subconjunto débil-estrella denso de $(Q_{\alpha+1} - Q_\alpha)(X^*)$. Si

$$I := I_\omega \bigcup \{I_{\alpha+1}:\ \omega \leqslant \alpha < \omega_1\}$$

se tiene que $(v_i, w_i)_{i\in I}$ es una base de Markushevich en X.

Tomamos un punto cualquiera x de X. Puesto que

$$\{0\} = \cap\,\{\ker Q_\alpha:\ \omega \leqslant \alpha < \omega_1\}$$

se tiene que

$$\bigcup \{X \cap Q_\alpha^*(X^{**}):\ \omega \leqslant \alpha < \omega_1\} \tag{3}$$

es denso en X y, por tanto, existe una sucesión en (3) que converge a x. Consecuentemente, existe un ordinal β, $\omega \leqslant \alpha < \beta < \omega_1$ tal que x pertenece a $X \cap Q_\beta^*(X^{**})$. Por tanto,

$$\langle x, u_i \rangle = 0, \qquad i \in I_{\gamma+1}, \qquad \beta \leqslant \gamma < \omega_1,$$

de aquí que

$$|\{i \in I:\ \langle v_i, x \rangle \neq 0\}| \leqslant \aleph_0.$$

c.q.d.

Teorema 3.– Sea X un espacio de Asplund tal que dens $X \leqslant \aleph_1$. Sea B la bola unidad cerrada de X^{**}. Entonces existe en $C(B_\sigma)$ una resolución de la identidad y una base de Markushevich $(f_i, u_i)_{i \in I}$ asociado a ella de manera que, para cada x de $B \cap X$,

$$|\{i \in I:\ f_i(x) \neq 0\}| \leqslant \aleph_0.$$

Demostración.– Aplicamos el lema anterior y obtenemos una base de Markushevich $\langle v_i, w_i \rangle_{i \in I}$ en X^* de manera que, para cada x de X,

$$|\{i \in I:\ \langle v_i, x \rangle \neq 0\}| \leqslant \aleph_0.$$

Identificamos ahora B_σ con un subespacio compacto de $\mathbb{R}^I$ mediante la aplicación φ tal que

$$\varphi(z) = (\langle v_i, z \rangle:\ i \in I).$$

Basta aplicar ahora el Corolario 1.2 para alcanzar la conclusión.

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] FABIAN, M. AND CODOFROY, G.: *The dual of every Asplund space admits a projectional resolution of identity*. Studia Math. (To appear).

[2] LINDENSTRAUSS, J. AND TZAFRIRI, L.: *Clasical Banach Spaces I*. Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[3] PLICKO, A. N.: *On projective resolutions of the identity operator and Markushevich bases*. Soviet Math. Dokl. *25*, 386-389 (1982).

[4] ZIZLER, V.: *Locally uniformly rotud renorming and decompositions of Banach spaces*. Bull. Austral, Math. Soc. *29*, 259-265 (1984).