Topologías fuertes en espacios linealmente topologizados de funciones continuas

Por J. R. Ferrer, M. Lopez Pellicer
J. Mas y L. M. Sanchez Ruiz

Recibido: 5 de abril de 1989

Presentado por el académico numerario Excmo. Sr. D. Manuel Valdivia

Abstract

In the space $C(X)$ of real or complex continuous functions defined in a completely regular topological space X we considerer a natural linear topology in the Lefschez sense, which enables us to give some characterizations of the μ and real-compact spaces.

Resumen

En el espacio $C(X)$ de las funciones continuas definidas en un espacio completamente regular X y con valores reales o complejos se considera una topología lineal, en el sentido de Lefschez, que permite caracterizar cuando X es μ ó v espacio.

Clasificación A.M.S. (1980): 46A15, 54D60.

1. INTRODUCCION

Se representará por X a un espacio T_2 completamente regular, por βX a su compactación de Stone-Cech, por υX la realcompactación de X y por $C(X)$ al espacio vectorial de las funciones continuas definidas en X con valores reales o complejos. Si $f \in C(X)$ representaremos por f^β a la extensión continua de f a βX con valores en la compactación de Alexandroff del espacio topológico real o complejo.

Un subconjunto A de X se dice que es topológicamente acotado si $f(A)$ es acotado para cada $f \in C(X)$. Cuando los subconjuntos topológicamente acotados de X son relativamente compactos en X se dice que X es un μ-espacio. Si $\upsilon X = X$ se dice que X es realcompacto. Un espacio realcompacto es μ-espacio, ya que los subconjuntos topológicamente acotados son relativamente compactos en υX.

Son clásicos los resultados de Nachbin y Shirota [5] y [7]: $C_c(X)$ es tonelado si, y sólo si, X es μ-espacio, y $C_c(X)$ es bornológico si, y sólo si, X es υ-espacio, lo que equivalía a que $C_c(X)$ fuese ultrabornológico, probado posteriormente en (1).

El soporte de una función $f \in C(X)$ es la clausura en X de $\{x \in X: f(x) \neq 0\}$. Para cada subconjunto compacto K de X escribiremos $L_K = \{f \in C(X): K \cap \operatorname{sop} f = \emptyset\}$. Los subespacios vectoriales L_K dotan a $C(X)$ de estructura de espacio linealmente topologizado, considerando en el cuerpo la topología discreta, según [3] §10, que representaremos por $C_\lambda(X)$. El soporte de un subconjunto absolutamente convexo L de $C(X)$ se representará por $\operatorname{sop} L$ y es el mínimo compacto de βX tal que si $f \in C(X)$ y $\operatorname{sop} f^\beta \cap \operatorname{sop} L = \emptyset$ entonces $f \in L$ (6-II.1.3).

Vamos a caracterizar cuando X es μ-espacio o real compacto por propiedades de $C_\lambda(X)$, recordando los teoremas de Nachbin y Shirota.

2. LEMAS Y CARACTERIZACIONES

Lema 1. Un subespacio vectorial L de $C_\lambda(X)$ es abierto si, y sólo si, $\operatorname{sop} L \subset X$. En particular dado $A \subset X$ se tiene que $L = \{f \in C(X): f(A) = \{0\}\}$ es abierto si, y sólo si, $\overline{A}^{\beta X} \subset X$.

Demostración.

$$M = \{f \in C(X): \operatorname{sop} L \cap \operatorname{sop} f^\beta = \emptyset\} \subset L,$$

por la definición de soporte. Si $\operatorname{sop} L \subset X$, entonces L contiene el abierto $M = \{f \in C(X): \operatorname{sop} L \cap \operatorname{sop} f = \emptyset\}$. Recíprocamente, si L es abierto existe un compacto K en X tal que

$$\{f \in C(X): K \cap \operatorname{sop} f = \emptyset\} = \{f \in C(X): K \cap \operatorname{sop} f^\beta = \emptyset\} \subset L,$$

luego $\operatorname{sop} L \subset K$.

Es bien conocido que si $A \subset \beta X$ y L es el subespacio vectorial de las funciones de $C(X)$ que son nulas en A entonces el soporte de L es $\overline{A}^{\beta X}$, pues dado un subconjunto K compacto y propio de $\overline{A}^{\beta X}$ podemos construir una función nula en K que vale 1 en algún punto de A. Por lo probado anteriormente L es abierto si, y sólo si, $\overline{A}^{\beta X} \subset X$.

Lema 2. Sea L un subconjunto absolutamente convexo de $C(X)$ que contiene eventualmente a cada sucesión $\{f_n: n \in N\}$ tal que la familia de los soportes de las funciones f_n sea localmente finita. Entonces $\operatorname{sop} L \subset vX$.

Si, además L es un subespacio vectorial cerrado y X es un μ-espacio, entonces $\operatorname{sop} L \subset X$.

Demostración. Si hubiese un punto $p \in \operatorname{sop} L - vX$ existiría una función $g \in C(X)$ tal que $g^\beta(p) = \infty$. Por definición de soporte para cada compacto $G_n = \{x \in \beta X: |g(x)| \leqslant n\}$ existe una función $g_n \in C(X) - L$ cuya extensión g_n^β es nula en G_n. Esto es contradictorio, pues la familia de $\operatorname{sop} g_n$, $n = 1, 2, \ldots$, es localmente finita por ser g_n^β nula en G_n.

Por el lema 1, $B = \cup \{\text{sop}\,(L + L_K)\colon K \text{ compacto} \subset X\}$ está contenido en $\text{sop}\, L \cap X$, por lo que B es topológicamente acotado, ya que es un subconjunto de $\text{sop}\, L$ que es compacto en νX, y al ser X μ-espacio se tiene que $\bar{B}^X$ es un subconjunto compacto de $\text{sop}\, L$. Si $f \in C\,(X)$ y $\bar{B}^X \cap \text{sop}\, f = \emptyset$, entonces $f \in L + L_K$, luego $f \in L$, ya que L es cerrado. Luego $\text{sop}\, L \subset \bar{B}^X$, llegando a que $\text{sop}\, L = \bar{B}^X$.

En un espacio linealmente topologizado E un subespacio vectorial cerrado L es abierto en la topología lineal fuerte si cada subespacio vectorial linealmente compacto M es acotado respecto a L, para lo que por [3] §10.9 (1), 10.9 (2) y (3) y 12.1 (5) es suficiente que cada sucesión nula completa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ esté eventualmente en L.

Lema 3. Un subconjunto A de X es topológicamente acotado si, y sólo si, $L = \{f \in C\,(X)\colon f\,(A) = \{0\}\}$ es abierto en la topología lineal fuerte de $C_\lambda\,(X)$.

Demostración. Si L no contiene eventualmente a la sucesión nula completa $\{f_n\colon n \in N\}$ podríamos encontrar $a_1 \in A$ y n_1 tales que $f_{n_1}(a_1) \neq 0$, y determinados a_1, a_2, ... y a_p en A y los subíndices n_1, n_2, ... y n_p tales que

$$f_{n_i}(a_i) \neq 0 \quad \text{y} \quad f_{n_j}(a_i) = 0 \quad \text{si } i < j, \quad \text{con } 1 < i,\ j < p,$$

podemos determinar un n_{p+1} y un a_{p+1} tales que

$$f_{n_{p+1}}(a_i) = 0 \quad \text{para } i < p + 1$$

y

$$f_{n_{p+1}}(a_{n_{p+1}}) \neq 0,$$

pues $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ es compacto, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 y no está eventualmente en L.

Por tanto, por inducción podemos determinar una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ de puntos de A y una sucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de funciones tales que

$$f_{n_i}(a_i) \neq 0 \qquad y \qquad f_{n_j}(a_i) = 0 \quad \text{si } i < j.$$

Entonces la función

$$g = \sum_{1}^{\infty} \alpha_p f_{n_p} \in C\,(X),$$

cualesquiera que sean los valores de las α_p, ya que $\{f_{n_p}\}_{n=1}^{\infty}$ es nula completa. Se pueden elegir los valores α_p de forma que $g\,(a_p) \geqslant p$, contradiciendo que A sea topológicamente acotado.

Si A no es topológicamente acotado existirá $g \in C\,(X)$ no acotado en A, pudiendo elegir una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A tales que

$$g\,(a_n) > g\,(a_{n-1}) + 1.$$

Entonces una sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $f_n(a_n) = 1$, de manera que el soporte de f_n esté contenido en $\{x \in X: \ |g(a_n) - g(x)| < 0{,}5\}$, está en $C(X) - L$, por lo que L no es abierto en la topología fuerte de $C_\lambda(X)$, ya que la familia $\{\text{sop}\, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es localmente finita, y por lo tanto nula completa.

De estos lemas se deduce inmediatamente el teorema de Nachbin-Shirota para espacios linealmente topologizados, pues:

Teorema 1. X es μ-espacio si, y sólo si, $C_\lambda(X)$ tiene la topología lineal fuerte.

Demostración. Si X es μ-espacio entonces por los lemas 2 y 1 cada subespacio cerrado L de $C(X)$ que contenga eventualmente a las sucesiones nulas completas es λ-abierto.

Si X no es μ-espacio existe un subconjunto A de X topológicamente acotado cuya clausura en βX no está en X. Por el lema 3, $L = \{f \in C(X): f(A) = \{0\}\}$ es abierto en la topología lineal fuerte, y por el lema 1 no es λ-abierto.

En la prueba del lema 3 se ha establecido que un subconjunto A de X es topológicamente acotado si, y sólo si, $L\,\{f \in C(X): f(A) = \{0\}\}$ contiene eventualmente a cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ tal que $\{\text{sop}\, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea localmente finita.

Llamando $\hat{a}$ a la evaluación en un punto a de X se puede expresar el resultado anterior en la forma:

Lema 4. Un subconjunto A de X es topológicamente acotado si, y sólo si, para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $C(X)$ tal que la familia $\{\text{sop}\, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea localmente finita se tiene que existe un n_0 tal que $\hat{a}(f_n) = 0$ para cada $a \in A$ y $n > n_0$.

Este enunciado del lema 3 nos permite demostrar cómodamente la proposición siguiente:

Proposición 1. Son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) X es μ-espacio.
b) Dado un espacio linealmente topologizado F cualquier familia de aplicaciones lineales continuas T_i: $C(X) \to F$, $i \in I$, que para cada sucesión $\{f_n \in C(X)\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{\text{sop}\, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una familia localmente finita verifique que

$$\lim_{n \to \infty} T_i(f_n) = 0$$

uniformemente en $i \in I$, es uniformemente continua.
c) Idem a) y b) sustituyendo aplicaciones lineales por formas lineales.

Demostración. Si se verifica la condición a) y U es un subespacio vectorial de F entorno de 0 es inmediato comprobar, utilizando las condiciones dadas en b), que

$$L = \bigcap_i T_i^{-1}(U)$$

verifica el lema 2, y del lema 1 se deduce que L es abierto, por lo que las aplicaciones T_i son uniformemente continuas.

Si no se verifica la condición a) existirá un subconjunto A en X que será topológicamente acotado y cuya clausura en βX no está contenida en X. Por el lema 4 las evaluaciones $\hat{a}$, con $a \in A$, verifican las hipótesis de la condición c), y dicha familia de evaluaciones no es uniformemente equicontinua, pues

$$\cap\, \hat{a}^{-1}(O) = \{f \in C(X) \colon f(A) = 0\}$$

no es abierto ya que su suporte, $\bar{A}^{\beta X}$ no está contenido en X (ver lema 1).

Ahora vamos a caracterizar cuando X es realcompacto por propiedades de $C_\lambda(X)$

Proposición 2. Son equivalentes las siguientes propiedades:

a) $X = vX$.
b) Una aplicación T definida en $C_\lambda(X)$ y con valores en un espacio linealmente topologizado F es continua si

$$\lim_{n\to\infty} T(f_n) = 0$$

para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que la familia de sus soportes sea localmente finita.
c) Idem a) y b) sustituyendo aplicación lineal por forma lineal.

Demostración. De la condición a) se deduce la condición b), pues si U es un subespacio vectorial entorno de O en F, entonces $L = T^{-1}(U)$ verifica el lema 2, y de sop $L \subset vX = X$ se deduce por el lema 1 que L es abierto.

Se completa la prueba observando que si $X \neq vX$ y $a \in vX - X$ entonces por el lema 1 la evaluación $\hat{a}$ no es continua, ya que sop $\hat{a} = \{a\}$ no está contenido en X, en tanto que directamente, o aplicando el lema 4, se deduce que $\hat{a}$ verifica las hipótesis de la condición c).

Es obvio que en b) (c) se pueden utilizar familias T_i de aplicaciones (formas) lineales con la condición de que

$$\lim_{n\to\infty} T_i(f_n) = 0$$

uniformemente en $i \in I$, obteniéndose entonces que las aplicaciones lineales T_i sean uniformemente continuas. La prueba es la misma.

En [2] 8.7 (III) se prueba que si $b' \in vX$ y H es un subespacio vectorial de $C(X)$ de dimensión numerable existe un punto b en X tal que $f(b') = f(b)$ para cada f de H por lo que la forma lineal $\hat{a}$ utilizada en la proposición anterior es sucesionalmente continua lo que permite sustituir en b) y c) la sucesión $\{f_n\}$ tal que la familia de los soportes de las funciones f_n sea localmente finita por una sucesión $\{f_n\}$ tenga por límite 0. Por lo que $X = vX$ si, y sólo si, las formas lineales definidas en $C_\lambda(X)$ sucesionalmente continuas son continuas, resultado obtenido en 4 con la topología compacta abierta. También se pueden utilizar en b) (c) familias T_i, $i \in I$, de aplicaciones (formas) lineales que para cada sucesión nula $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifiquen que

$$\lim_{n \to \infty} T_i(f_n) = 0,$$

uniformemente en I, exigiendo que entonces las aplicaciones T_i sean uniformemente continuas.

La descripción precedente caracteriza cuando $X = vX$ por propiedades de aplicaciones lineales definidas en $C_\lambda(X)$. Ahora las reescribiremos utilizando subespacios vectoriales de $C_\lambda(X)$.

Proposición 3. Son equivalentes:

a) $X = vX$.
b) Un subespacio vectorial de $C(X)$, que contenga eventualmente a las sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\{\operatorname{sop} f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea una familia localmente finita, es abierto.
c) Son abiertos los subespacios vectoriales de $C_\lambda(X)$ que contengan eventualmente a las sucesiones nulas.

Demostración. Por los lemas 2 y 1 de a) se deduce b). Por [2] 8.7 (III) se deduce que si $a \in vX - X$, entonces la evaluación $\hat{a}$ es sucesionalmente continua, por lo que $\hat{a}^{-1}(0)$ contiene eventualmente a las sucesiones nulas de $C_\lambda(X)$, ya que $\{0\}$ es abierto en el cuerpo topológico discreto K, y al no ser continua la evaluación $\hat{a}$ se tiene que $\hat{a}^{-1}(0)$ no es abierto. Por lo tanto de c) se deduce a).

Por lo tanto $X = vX$ si, y sólo si, $C_\lambda(X)$ es el límite inductivo de sus subespacios que sean envolturas lineales de sucesiones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que la familia $\{\operatorname{sop} f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea localmente finita. También es el límite inductivo de las clausuras de estos subespacios, que o son finito dimensionales o son isomorfos a ω, que es el producto de una familia numerable de copias del espacio discreto K. Por lo tanto $X = vX$ si, y sólo si, $C_\lambda(X)$ es el límite inductivo de sus subespacios isomorfos a ω.

Utilizando la condición c) de la proposición 3 se obtiene que $X = vX$ si, y sólo si, $C_\lambda(X)$ es el límite inductivo de las envolturas lineales generadas por sus sucesiones nulas, por lo que $X = vX$ si, y sólo si, $C_\lambda(X)$ es el límite inductivo de sus subespacios de dimensión numerable.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. DE WILDE ET J. SCHMETS. *Caractérisation des espaces $C(X)$ ultrabornologiques.* Bull. Soc. Roy. Sc. Liège *40* (1971), 119-121.

[2] L. GILLMAN AND M. JERISON. *Rings of continuous functions.* Van Nostrand, New York (1960).

[3] G. KOETHE. *Topological vector spaces I.* Springer-Verlag, Berlin (1969).

[4] M. LOPEZ PELLICER. *Una caracterización sucesional de los espacios $C(X)$ ultrabornológicos.* Rev. R. Acad. Ciencias de Madrid *LXVII* (1973), 485-503.

[5] L. NACHBIN. *Topological vector spaces of continuouas functions.* Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. *40* (1954), 471-474.

[6] J. SCHMETS. *Spaces of vector-valued continuous functions.* Springer Verlag, Berlin (1983).

[7] T. SHIROTA. *On locally convex vector spaces of continuous functions.* Proc. Jap. Acad. *30* (1954), 294-298.

Departamento de Matemáticas (ETSIA)
Universidad Politécnica Apartado 22012
46071 VALENCIA (SPAIN)