# *Les espaces (p)-tonnelés et le théorème du graphe fermé*

Par Mohamed Aamri

Recibido: 1 febrero, 1989

*Presentado por el académico D. Manuel Valdivia Ureña*

**Résumé**

On donne une forme générale de certains résultats sur le théorème du graphe fermé.

**Summary**

We give general form of certain results on the closed graph theorem.

Les espaces vectoriels considérés ici ont pour corps en base $K$ égal à $\mathbb{R}$ pu C.

## I. CARACTERISATICN DE LA FERMETUR D'UN GRAPHE

Soient $E(S)$ et $F(T)$ deux e.l.c. séparés et u une application linéaire de $E$ dans F. Désignons par $S'$(resp. $T'$) un système fondamental de voisinages de l'origine dans $E(S)$ (resp. $F(T)$) et par Tu la topologie localement convexe pour laquelle les ensembles de la forme $u(W) + V$, $W \in S'$ et $V \in T'$, forment un système fondamental de voisinages de l'origine dans $F$. Cette topologie n'est pas, en général, séparée; toutefois, on a le résultat suivant qui aractérise la fermeture du graphe de u à partir de la séparation de $Tu$.

1) *Proposition*: Les propriétés suivantes sont équivalentes:

*a*– L'application $u : E(S) \to F(T)$ est fermée

*b*– La topologie $Tu$ est separée

*c*– L'espace dual $F(Tu)'$ est faiblement dense dans $F'$.

De même on caractérise la continuité faible de u dans le résultat suivant:

2) *Proposition*: Les proprietés suivantes sont équivalentes:

*a*– L'application $u : E(S) \to F(T)$ est faiblement continue.

*b*– On a $\sigma(F, F') \subset Tu \subset T$.

*c*– L'espace $F(Tu)'$ est faiblement dense dans $F'$.

ces deux propositions sont démontrées dans [1].

## II. RESULTATS SUR LE THEOREME DU GRAPHE FERME

Dans ce qui suit quand on parle d'une propriété topologique $(P)$ il s'agit d'une conjonction d'un nombre fini de propriétés topologiques parmi lesquelles figurent eventuellement des propriétés algébriques. Si $(P)$ désigne une seule propriété, dans ce cas il s'agit d'une propriété topologique.

1) *Définition*: Soit $(P)$ une propriété topologique; $(P)$ est dite $(c)$-stable si pour tous e.l.c. séparés $E(S)$, $F(T)$ et toute application linéaire continue u de $E(S)$ dans $F(T)$, l'image de toute partie de $E(S)$, vérifiant la propriété $(P)$, vérifie elle aussi cette propriété.

2) *Définition*: Soit $(P)$ une propriété topologique; $(P$ est dite $(s)$-stable (resp.$(k)$-stable) si toute partie (resp. pratie séquentiellment fermée) d'un espace topologique, vérifiant la propriété $(P)$, vérifie elle aussi cette propriété.

3) *Definition*: Soient $E(S)$ un e.l.c. séparé et $(P)$ une propriété topologique $(c)$-stable: $E(S)$ est dit $(P)$-espace si toute partie de $E'(\sigma(E', E))$ qui vérifie la propriété $(P)$, est équicontinue.

4) *Exemples*: Considérons les propriétés suivantes:

$(P_1)$ = être faiblement borné

$(P_2)$ = être une partie absolument convexe, faiblement métrisable et compacte.

$(P_3)$ = être faiblement borné et essentiellement séparable.

$(P_4)$ = être une partie d'une partie absolument convexe, faiblement compace et métrisable et de dimension inférieure ou égale à $d$ (où $d$ est un nombre cardinal infini).

Toutes ces propriétés sont $(c)$-stables.

5) *Proposition*: Considerons une propriété topologique $(P)$ $(c)$-stable. Et, soient $E(S)$ et $F(T)$ deux e.l.c. séparés et u une application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$; si $E(S)$ et $F(T)$ sont des $(P)$-espaces, il en est de même de $F(Tu)$.

*Démonstration*: Soient $X$ une partie de $F(Tu)'$ muni de la topologie faible, qui satisfait à la propriété $(P)$: l'application $u : E(S) \to F(Tu)$ est continue: et, donc, l'application transposée $u'$: $F(Tu)' \to E'$ est faiblement continue. Puisque $(P)$ est $(c)$-stable, $u'(X)$ vérifie la propriété $(P)$ dans $E'(\sigma(E', E))$. Et comme $E(S)$ est un $(P)$-espace, $u'(X) = \{\text{vou}; \text{v} \in X\}$ est $S$-équicontinue. De même, puisque l'identité $id_F$: $F(T) \to F(Tu)$ est continue, il résulte que $X$ est une partie de $F'(\sigma(F', F)$, qui verifie la proprieté $(P)$. Et par conséquent $X$ est $T$-équicontinue. Donc, il existe un voisinage, $W$ , de l'origene pour $S$ et un voisinage, $V$, de l'origine pour $T$ tel que vou $(W) \subset 1/2\ b$ et $v(V) \subset 1/2\ b$ (oû $b$ est la boulé unité de $K$) quelque soit v appartenant à $X$. On en déduit, v$(u(W) + V \subset b$, $v \in X$. Par suite, $X$ est $Tu$-équicontinue.

6) *Définition*: Soient $(P)$ une propriété topologique $(c)$-stable et $F(T)$ un e.l.c. séparé; $F(T)$ est dit $(\Gamma_\sigma\ P)$-espace si pour tout espace $H$ faiblement dense dans $F'$, on a la propriété sui-vante:

On a l'égalité $H = F'$ si l'intersection $H \cap X$ est faiblement fermée pour toute partie $X$ faiblement fermée vérifiant la propriété $(P)$.

7) *Theórème*: Considerons une proprieté topologique $(c)$-stable et $(s)$-stable. Et, soient $E(S)$ un $(P)$ espace, $F(T)$ un $(\Gamma_\sigma\ P)$-espace et $u$ une application lineaire de $E$ dans $F$; on a les propriétés suivantes:

*a*– Si $u$: $E(S) \to F(T)$ est fermée, u est faiblement continue.

*b*– Si $u$: $E(S) \to F(T$ est fermée et si $S = \tau(E, E')$, $u$ est continue.

*c*– Si $u$: $E(S) \to F(T)$ est fermée et si $F(T)$ est un $(P)$-espace qui admet un système fondamental de voisinages de l'origine formé d'ensembles absolument convexes et fermés, $T'$, tel que le polaire $V^\circ$ (pris dans $F'$) de chaque $V \in T'$, muni de la topologie induite par $\sigma(F', F)$, vérifie la propriété $(P)$; alors $u$ est continue.

*Demonstration*:

*a*– Si $u$:$E(S) \to F(T)$ est fermée, $F(Tu)'$ est faiblement dense dans $F'$. Soient $X$ une partie fermée de $F'(\sigma(F', F))$ qui satisfait à la proprieté $(P)$ et $\{v_i, i \in I\}$ une suite généralisée de $X \cap F(Tu)'$ qui converge faiblement vers $v$ dans $F'$. Comme $(P)$ est $(s)$-stable, $\{v_i, i \in I)\ \}$ vérifie la propieté $(P)$ dans $F(Tu)'$ $(\sigma(F(Tu)', F'))$. Et puisque l'application linéaire $u$: $E(S) \to F(Tu)$ est continue, alors son application transposée $u'$: $F(Tu)' \to E'$ est faiblement continue; comme $(P)$ est $(c)$-stable, la suite généralisée $\{u'(v_i)\ i \in \mathrm{I}\} = \{v_i\ ou, i \in I\}$ verifie la propriété $(P)$ dans $E'(\sigma(E', E))$. Par suite, elle $(S)$-équicontinue. Donc, il existe un voisinage, $W$, de l'origine pour $S$ tel que $v_i$ou $(W) \subset\ 1/2\ b$(*ou* $b$ est la boule unité fermée de $K$). En passant à la limite sans cette inclusion, obtient $v\ ou\ (W) \subset\ 1/2\ b$. Or, il existe un voisinage $V$, de l'origine pour $T$, tel que $v(V) \subset 1/2.\ b$ On a donc $v(u(W) + V\ ) \subset b$. D'oú l'égalité $F(Tu)' = F'$. Et de ceci, on déduit que $u$ est faiblement continue.

*b*– On a démontré en *a– que u* est faiblement continue, et puisque $S$ est la topologie de Mackey, alors $u$ est continue.

$c-$ Puisque $E(S)$ et $F(T)$ sont des $(P)$-espaces et que $u$ est fermée, il résulte de la proposition 5) que $F(Tu)$ est un $(P)$-espace. Soient $X$ une partie fermée de $F'(\sigma(F', F))$ qui verifie la propriété $(P)$ et $\{v_i, i \in I\}$ une suite généralisée de $X \cap F(Tu)'$ qui converge faiblement vers $v$ dans $F'$. $\{v_i, i \in I\}$ vérifie la propriété $(P)$ dans $F(Tu)'$ $(\sigma(F(Tu)', F))$; donc; elle est $Tu$-équicontinue. Il existe donc un voisonage de l'origine $v_0$ tel que $v_i(V_0) \subset b$. d'où $v(V_0) \subset b$. Et, donc, on a $v \in F(Tu)'$; ceci montre l'egalité $F(Tu)' = F'$. On en déduit $\sigma(F, F') \subset Tu \subset T$.

Soit $V \in T'$; par hypothèse $V^\circ$, muni de la topologie induite par $\sigma(F', F) = \sigma(F\ (Tu)', F)$, vérifie la propriété $(P)$. Par suite, $V^\circ$ est $Tu$-équicontinu. Et, donc, $V = V^{\circ\circ}$est un voisinage de l'origine pour $Tu$. On en déduit l'égalité $T = Tu$, c'est-à-dire que $u$ est continue.

8) *Remarque*: L'hypothèse faite sur le $(P)$-espace $F(T)$ permet de se passer de la topologie de Mackey (sur $E$) pour montrer la continuité de l'application $u$.

9) *Définition*: Soient $(P)$ une topologique $(c)$-stable et $(k)$-stable et $F(T)$ est dit $(\Gamma_\sigma\ sP)$-espace si pour sous espace $H$ faiblement dense et séquentiellement fermé dans $F'$ on a la proprieté suivante:

On a l'égalité $H = F'$ si pour toute partie $X$ faiblement fermé de $F'$ vérifiant la propriété $(P)$ l'intersection $H \cap X$ est faiblement fermée.

10) *Lemme*: Soit $E(S)$ un espace localement convexe séparé tel que toute suite de Cauchy dans $E'(\sigma(E', E))$ soit équicontinue; si $u$ une application linéaire fermée de $E(S)$ dans un espace localement convexe séparé $F(T)$. L'espace dual $F(Tu)'$ est faiblement séquentiellement fermé et dense dans $F'(\sigma(F', F))$.

*Démonstration*: On sait déjà que $F(Tu)'$ est faiblement dense dans $F'$. Considérons une suite $\{v_n, n \in \mathbb{N}\}$ de $F(Tu)'$ qui converge faiblement vers $v$ dans $F'$.

Comme $u': F\ (Tu)' \to E'$ est faiblement continue

$$\{u'(v_n), n \in \mathbb{N}\} = \{v_n\ ou, n \in \mathbb{N}\}$$

converge vers vou. Donc il existe un voisinage de l'origine $W$ pour $S$ *tel que* $vou\ (W) \subset 1/2\ b$ (où $b$ est la boule unité fermée de $K$). D'autre part, il existe un voisinage de l'origine $V$ pour $T$ tel que $v(V) \subset 1/2 \cdot b$; d'où $v(u(W) + V) \subset b$, c'est-à-dire que $v \in F(Tu)'$.

De ceci on déduit:

11) *Théorème*: Considérons une propriété $(c)$-stable et $(k)$-stable. Et soit $E(S)$ un $(P)$-espace tel que toute suite de Cauchy dans $E'(\sigma(E', E))$ soit équicontinue, $F(T)$ un $(\Gamma_\sigma^{sP})$-space et $u$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

On a les propriétés suivantes:

*a*) Si $u:E(S) \to F(T)$ est fermée, u est faiblement continue.

*b*) Si $u:E(S) \to F(T)$ est fermée et si $S = T(E, E')$, $u$ est continue.

*c*) Si $u:E(S) \to F(T)$ est fermée et si $F(T)$ est un $(P)$-espace qui admet un système fondamental de voisinages de l'origine, $T'$, formé d'ensembles absolument convexes et fermés tel que pour tout $V \in T'$ le polaire $V^{\circ}$ de $V$ (pris dans $F'$), muni de la topologie induite par $\sigma(F, F')$, vérifie la proprieté $(P)$, alors u est continue.

14) *Exemples*: *a*) Pour la proprieté $(P_1)$ voir exemple 4), la classe des $(P_1)$–espace coïncide avec celle des espaces tonnelés séparés et la classe de $(\Gamma_\sigma^{P_1})$-espaces contient celle des espaces infra-Ptàk (ou$(Br)$-complets. Donc, grâce au théorème 7), on retrouve les résultats trouvés par Ptàk [10], Robertson [11] Persson [9] et Macintosh [7].

*b*) Considérons, maintenant, la proprieté $(P_2)$; la classe des $(\Gamma_\sigma P_2)$-espaces contient celle des espaces infra-Ptàk séparables. Et comme résultat que l'on peut déduire du théorème 7), on peut citer par exemple:

"Toute applications linéaire fermée d'un $(M)$-espace $E(S)$ (c'est-à-dire toute partie absolument convexe faiblement compacte et métrisable de $E'$ équicontinue) dans un space de Fréchet séparable est continue."

*c*) On remarque que la classe des espaces de Banach de dimension inférieure ou égale à $2^{\aleph_0}$ est contenue dans celle des $(\Gamma_\sigma P_3)$-espaces et que la classe des $(P_3)$-espaces coïncide avec celle des espaces $(\delta)$-tonnelés. Par conséquent si dans le théorème 7), on remplace $(P)$ par $(P_3)$, on retrouve un résultat démontré par Tweddle [12].

*d*) Si $d = 2^{\beta}$ où $\beta$ est un nombre cardinal infini, il résulte du théorème 7) que toute application linéaire fermée d'un $(P_4)$-espace dans un espace de Banach, de dimensión inférieure ou égale à $\beta$, est continue. En particulier si $\beta = 2^{2^{\aleph_0}}$, on déduit que toute application linéaire fermée d'un $(P_4)$-espace dans un espace de Banach séparable est continue.

## III DOMAINE DU THEOREME DU GRAPHE FERME DANS UN CAS GENERAL

Soient $E(S)$ un e.l.c. séparé et $X$ tonneau de $E(S)$ considérons l'ensemble $N(X) = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda X$. $N(X)$ est un sous-espace fermé de $E(S)$. La suite $\{1/n\, X, n \in \mathbb{N}\}$ définit un s.f.v. de l'origine pour une topologie localement convexe sur $E$ que l'on note $Z_x$. Cette topologie est séparée si et seulement si $N(X) = 0$. Comme $N(X)$ est fermée l'espace quotient $E/N(X)$ $(\tilde{Z}_X)$ estun espace normé. Et par suite le complété $E_X(S_X) = E/_{N(X)}(\tilde{Z}_X)$ est un espace de Banach.

On désigne par $f$ l'application canonique de $E(S)$ dans $ES)$ dans $E_X(S_X)$. Et on démontre que $f$ est fermée. On peut trouver différentes démonstrations de ce résultat (voir par exemple Mahowald [8] ou Köthe [6] qui a été d'une grande importance pour la démonstration du théorème de Mahowald (Mahowald [8]) qui caractérisé le domaine du théorème du graphe fermé pour la classe des espaces de Banach. Et tous les résultats connus jusqu'ici sur de telles caractérisations se basent sur cette proposition. Ainsi, en s'inspírant de la méthode de Mahowald, on donnera une caractérisation générale du domaine du théorème du graphe fermé.

Soit $(P)$ una propriété topologique $(c)$-stable et $(s)$-stable.

1) *Définition*: Soit $E(S)$ un espace de Banach; $E(S)$ est dit $(P)$-Banach si le polaire $B^\circ$ de la boule unité $B$ de $E(S)$, pris dans $E'$, vérifie la proprieté $(P)$ dans $E'$ $(\sigma(E', E))$.

2) *Définition*: Soient $E(S)$ un e.l.c. séparé et $X$ un tonneau de $E$; $X$ est dit $(P)$-tonneau si l'e.l.c. $E_X(S_X)$ est un $(P)$-Banach et si le polaire $X^\circ$, de $X$, pris dans $E'$, vérifie la proprieté $(P)$ dans $E'(\sigma(E', E))$.

3) *Définition*: Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; $E(S)$ est dit $(P)$-tonnelé si tout $(P)$-tonneau est un voisinage de l'origine.

4) *Proposition*: Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; si pour tout $(P)$-Banach $F(T)$ toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ alors $E(S)$ est $(P)$-tonnelé.

*Démonstration:* Soit $X$ un $(P)$-tonneau de $E(S)$, $E_X(S_X)$ est un $(P)$-Banach. Comme l'application $f$: $E(S) \to E_X(S_X)$ est fermée, elle est, par hypothèse, continue. Or on a $X = f^{-1}(\overline{f(X)})$, où $\overline{f(X)}$ est l'adhérence de $f(X)$ dans $E_X(S_X)$, $\overline{f(X)}$ est un tonneau de $E_X(S_X)$; donc, c'est un voisinage de l'origine pour $S_X$, car $E_X(S_X)$ est tonnelé. On en déduit que $X$ est un voisinage de l'origine. Ceci montre que $E(S)$ est $(P)$-tonnelé.

5) *Corollaire*: Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; si pour tout $(P)$-espace de Banach $F(T)$, toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue, alors $E(S)$ est $(P)$-tonnelé.

Ce corolaire provient du fait qu'un $(P)$-Banach est un $(P)$-espace de Banach.

6) *Proposition*: Toute application linéaire fermée d'un $(P)$-espace $E(S)$ dans un $(P)$-Banach de $F(T)$ est continue.

*Démonstration*: On démontre l'égalité $F(Tu)' = F'$. De ceci on déduit $\sigma(F, F') \subset Tu \subset T$. Soit $B$ la boule unité fermé de $F(T)$; le polaire $B^\circ$ de $B$, pris dans $F'$, vérifie la proprieté $(P)$ dans $F(Tu)'$ $(\sigma(F(Tu)', F))$. Et. puisque $(P)$ est $(c)$-stable, alors $F(Tu)$ est un $(P)$-espace. Par suite $B$ est un voisonage de l'origine pour $Tu$. Donc, $u$ est continue.

Il est évident qu'un $(P)$-espace est $(P)$-tonnelé et que tout espace tonnelé est un $(P)$-espace; et, donc, tout espace tonnelé est $(P)$-tonnelé.

7) *Définition*: La propriété $(P)$ est dite $(d)$-stable si tout espace $(P)$-tonnelé es un $(P)$-espace.

8) *Théorème*: Supposons la propriété $(P)$ $(d)$-stable; et, soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; les proprietés suivantes sont équivalents.

a) $E(S)$ est un espace $(P)$-tonnelé

*b*) Pour tout $(P)$-Banach $F(T)$, toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue.

*Demonstration*: La démonstration de ce résultat se déduit aussitôt des Propositions 4) et 6).

9–*Corollaire*: Supposons la propriété $(P)$ $(d)$-stable, le produit d'une famille quelconque d'espaces $(P)$-tonnelés est $(P)$-tonnelé.

Ce corollaire résulte du théorème 8) et d'un résultat, concernant la caractérisation d'une application linéaire d'un produit quelconque d'e.l.c. séparés dans un *g-LB*-espace, démontré par Iyahen [4].

10) *Corollaire*: Supposons la propriété $(P)$ $(d)$-stable, tout sous-espace de codimension finie d'un espace $(P)$-tonnelé est $(P)$-tonnelé.

Ceci résulte du théorème 8) et d'une application linéaire fermée pour les sous-espaces de codimension finie, démontré par Dewilde [3].

11) *Exemples*:

*a*) Comme un e.l.c. séparé est tonnelé et si et seulement si c'est un $(P^1)$-espace, la propriété $(P_1)$ est$(d)$-stable. Donc, du théorème 8), on déduit le résultat suivant:

"Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $E(S)$ est tonnelé

2) Pour tout espace de Banach F$(T)$, toute application lineaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue".

On retrouve ainsi le théorème de Mahowald.

*b*) Tout espace de Banach séparable $F(T)$ est un $(P_2)$-espace. Et, réciproquement, tout $(P_2)$-Banach est séparable (voir Köthe [6]). Par suite, on a le résultat suivant:

"Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; si pour tout espace de Banach séparable $F(T)$, toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue, alors $E(S)$ est $(P_2)$-tonnelé".

Montrons maintenant que tout espace $(P_2)$-tonnelé est un $(M)$-espace. Soient $E(S)$ un espace $(P_2)$-tonnelé et $Y$ une partie absolument convexe de $E'$ qui, munie de la topologie faible, vérifie la propriété $(P_2)$ et qui soit fermée. Le polaire $X = Y^\circ$ de $Y$, pris dans $E$, est un tonneau pour $S$. L'espace $E_{/N(X)}(Z_X)$ est séparable (voir Kalton [5]) ou Köthe [6]); par suite le polaire de $f(X)$, pris dans $(E/_{N(X)}(Z_X))$; est faiblement compact $E_X(S_X)' = (E/_N(X(Z_X))'$, est contenu dans celui de $f(X)$, il vérifie donc la propriété $(P_2)$. Il en résulte que $X$ est un $(P_2)$-tonneau pour $S$. Par hypothèse, $X$ est un voisinage de l'origine; donc, $Y$ est équicontinue.

On sait déjà que toute application linéaire fermée d'un $(M)$-espace dans un espace de Banach séparable est continue.

De ceci, on déduit alors le résultat suivant:

"Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; les propriétés suivantes son équivalentes:

*a*) $E(S)$ est un $(M)$-espace.

*b*) Pour tout espace de Banach séparable $F(T)$, toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue.

*c*) Pour la propriété $(P_3)$, tout espace de Banach $F(T)$ de dimension inférieure ou égale à $2^{N_0}$, est un $(P_3)$-Banach; en effet, si $B$ est la boule unité de $F(T)$, le polaire $B^\circ$, de $B$, pris dans $F'$m est borné es essentiellement séparable (voir Tweddle [12]).

D'après le théorème 8) on a le résultat suivant:

"Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; si pour tout $(P_3)$-Banach toute application lineaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue, alors $E(S)$ est un espace $(P_3)$-tonnelé".

On a déjà démontré que toute application linéaire fermée d'un espace $(\delta)$-tonnelé dans un espace $(P_3)$-Banach est continue. Donc, tout espace $(\delta)$-tonnelé est $(P_3)$-tonnelé. Réciproquement, on démontre que toute partie faiblement bornée et essentiellement séparable, du dual d'un espace $(P_3)$-tonnelé est équicontinue (voir Tweddle [12]). Par suite un espace $(P_3)$-tonnelé est $(\delta)$-tonnelé.

Tout ceci se résume dans le résultat suivant:

Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; les proprietés suivantes sont équivalentes:

1) $E(S)$ est un espace $(\delta)$-tonnelé.

2) Pour tout $(P_3)$-Banach, tout application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue.

3) Pour tout espace de Banach $F(T)$ de dimension inférieure ou égale à $2^{N_0}$, toute application linéaire fermé de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue.

*d*) Montrons que la proprieté $(P_4)$ est $(d)$-stable. Soient $E(S)$ un espace $(P_4)$-tonnelé et $Y$ une partie absolument convexe de $E'(\sigma(E', E))$, qui est faiblement compacte, métrisable et de cardinal inferieur ou égale à $d$, le polaire $Y^\circ = X$ de $Y$, pris dans $E$, est un tonneau pour $S$. Considérons l'application canonique:

$$f{:}E(S) \to E/_{N(X)}\,(Z_X)$$

on a $(f(X))^\circ = (f')^{-1}(X^\circ)$; et donc $f'(f(X)^\circ) \subset X^\circ$; où f'est la transposée de $f$ et le polaire $f(X)^\circ$ de $f(X)$ de $f(X)$ est pris dans $(E_{/N(X)}\,(Z_X))'$. Comme $f'$ est injective, $f(X)^\circ$ est de cardinal inferieur ou égal à $d$. Donc, $(\overline{f(X)})^\circ$ est de cardinal inférieur ou égal à $d$ $((\overline{f(X)})^\circ$ est le polaire, pris dans $E_X(S_X)' = (E/_{N(X)}(Z_X))'$; de l'adhérence de $f(X)$ dans $E_X(S_X)$). On en déduit que $X$ est un $(P)$-tonneau. Donc, par hypothèse $X$ est un voisinage de l'origine pour $S$. Et, par conséquent $Y$ est équicontinue; ce qui montre le résultat.

Par suite le théorème 8) s'applique à la propriété $(P_4)$, d'où le resultat qui va suivre:

"Soit $E(S)$ un e.l.c. séparé; les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $E(S)$ est un espace $(P_4)$-tonnelé.

2) Pour tout $(P_4)$-Banach, toute application linéaire fermée de $E(S)$ dans $F(T)$ est continue".

On peut citer d'autres exemples que l'on traite de la même maniére. Et pour la simplification de l'étude et la recherche de tels exemples, on donne la remarque suivante:

Soient $E(S)$ un e.l.c. séparé et $X$ un tonneau de $E(S)$; considérons l'application $f{:}E(S) \longrightarrow E/_{N(X)}(Z_X)$, son application transposée $f'$: $(E/_{N(X)}(Z_X))' \longrightarrow E'$ est injective et faiblement continue. Et puisque l'on a $(f(X))^\circ = (f')^{-1}(X^\circ)$, alors, si $(P)$ est une proprieté conservée par $(f')^{-1}$ et si elle est de plus $(s)$-stable, $(f(X))^\circ$ vérifie cette propriété si $X^\circ$ la vérifie. Comme on a $f'(f(X^\circ) \subset x^\circ$, on peut identifier (algébriquemente) $f(X)^\circ$ à une partie de $X^\circ$. Donc si $(P)$ est une propriété algébrique ($s$—stable et si $X^\circ$ vérifie la propriété $(P)$, il en est de méme de $(f(X))^\circ$.

Je tiens ici à remercier Monsieur le Professeur Valdivia de ses remarques et suggestions à propos de mon travail sur le théorème du graphe fermé.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] AAMRI, M. Sur le théorème de graphe fermé. Rendiconti del Seminario Matematico delle'Universita del Politecnico di Torino. Vol 43°, 3 (1985).

[2] ADASH, N.: Tormelierte Räume und zwei Sätze von Banach. *Math. Ann.* 186.209 -1A14 (1970).

[3] DEWILDE, M. : Finite codimensional subspaces of topological vector spaces and the closed graph theorem. *Arch. Math*, 23, 180-181 (1972).

[4] YYAHEN, S. O.: The domain space in a closed graph theorem II. Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliqués. Tome XVII, n°2, 39-46- (1972).

[5] KALTON, N. J.: Some forms of the closed graph theorem. *Proc. Cambridage, Phil. Soc.* 70, 401-408. (1972).

[6] KOTHE, G. Topological vector spaces II. *Springer Verlag.* (1979).

[7] MAC INTOSH, A. On the closed graph theorem. *Proc. Amer. Math. Soc.* 20,397-404 (1969).

[8] MAHOWALD, M.: Barreled spaces and the closed graph theorem. *J. London, Math. Soc.* 36, 108-110 (1961).

[9] PERSSON, A.: A remark on the closed graph theorem in locally convex spaces. *Math. Sacan,* 19, 54-58 (1966).

[10] PTAK, V.: Completeness and the open mapping theorem. *Bull. Soci. Math. France.* 86,41-74 (1958).

[11] ROBERTSON, A. P. and ROBERTSON, W. J.: On the closed graph theorem *Proc. Glasgow Math. Ass.* 3,9-12 (1956).

[12] TWEDDLE, I. and POPOLLA, J. O. On closed graph theorem. *Glagow. Mathematical Journal* 17, 89-97 (1976).

Université Hassan II
Faculte des Sciences II
Ben M'Sik Sidi Othman, B.P. 6621 Casablanca